Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник

КОНКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

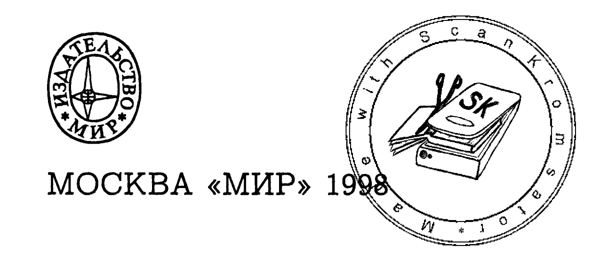
Основание информатики

Перевод с английского

Б. Б. Походзея

и А. Б. Ходулёва

под редакцией
А. Б. Ходулёва



МОСКВА «МИР» 1998

CONCRETE MATHEMATICS

A Foundation for Computer Science

Second Edition

This printing incorporates the final corrections made in 1998

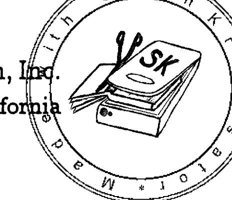
Ronald L. Graham
AT&T Bell Laboratories

Donald E. Knuth
Stanford University

Oren Patashnik
Center for Communications Research



ADDISON-WESLEY An Imprint of Addison Wesley Longman, Inc.
Reading, Massachusetts Harlow, England Menlo Park, California
Berkeley, California Don Mills, Ontario Sydney
Bonn Amsterdam Tokyo Mexico City



УДК 681.142.2
ББК 22.19
Г75

Переводчики: Б. Б. Походзей (предисловие, значения обозначений, гл. 1–6, приложения А, С), А. Б. Ходулёв (гл. 7–9, приложения А, С)

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.

Г75 Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — 703 с., ил.

ISBN 5-03-001793-3

Название этой оригинальной как по содержанию, так и по форме книги знаменитых американских математиков можно расшифровать как КОНтинуальная и дисКРЕТНАЯ математика. Прообразом книги послужил раздел „Математическое введение“ первого тома фундаментальной монографии Д. Кнута „Искусство программирования для ЭВМ“ (М.: Мир, 1976). Ее назначение — дать читателю технику оперирования с дискретными объектами, аналогичную технике для непрерывных объектов. Название книги можно понимать и буквально — обучение общим методам ведется на многочисленных конкретных примерах и упражнениях разной степени сложности. Все упражнения снабжены ответами.

При переводе на русский язык учтены исправления авторов 1998 года.

Книгу, без сомнения, можно рекомендовать всем изучающим и применяющим дискретную математику и информатику. Она раскрывает тайну одного феномена американского образования — как превращать малограмотных школьников в прекрасных математиков.

ББК 22.19



Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 97-01-14010

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001793-3 (русск.)
ISBN 0-201-55802-5 (англ.)

Оглавление

От Фибоначчи до Эрдёша

ТЕРМИН CONCRETE (означающий также „бетонный“) образован слиянием слов CONtinous и disCRETE. Авторы, избегая воды обобщений, на конкретных примерах обучают читателя методам исследования как дискретных, так и непрерывных систем.

Примеры учат не меньше, чем правила. И. М. Гельфанду приписывается высказывание: „Теории приходят и уходят, а примеры остаются“. „Конкретная математика“ — это и есть тот сухой остаток, который сохраняется при всех поворотах моды и составляет необходимую часть ремесла всякого математика.

Созданная Ньютоном и Эйлером, Бернулли и Гауссом, Лейбницем и Дирихле, она оказывается вечно юной и вновь возрождается следующими поколениями математиков.

Настоящая книга представляет собой попытку учебного изложения ряда действительно фундаментальных математических фактов. Издание ориентировано на потребителя, хотя и теоретики, несомненно, найдут в нем много полезного. Очевидная неполнота курса, отражающая личные вкусы авторов, является скорее достоинством, чем недостатком.

Книгу, без сомнения, можно рекомендовать всем работающим математикам и всем студентам и пользователям математики. Она раскрывает тайну одного феномена американского образования — как превращать малограмотных школьников в прекрасных математиков.

— В. Арнольд, 1998

Посвящается Леонарду Эйлеру (1707–1783)

Предисловие

В ОСНОВУ ЭТОЙ КНИГИ положен одноименный курс лекций, который ежегодно читается в Станфордском университете, начиная с 1970 года. Каждый год его слушателями становятся около пятидесяти человек — студентов предпоследнего и последнего курсов, но, в основном, дипломников,— а ряд наших выпускников уже начал насаждать подобные курсы и в других местах. Так что настала, видимо, пора ознакомить с материалами курса более широкую аудиторию (включая младшекурсников).

„Круг читателей, уровень изложения и трактовка материала — такого рода вопросы обычно обсуждаются в предисловиях."
— П. Р. Халмош [328]

Конкретная математика зарождалась в смутное и неспокойное десятилетие. В те бурные годы казавшиеся незыблемыми ценности постоянно подвергались сомнениям: студенческие городки превращались в очаги жарких дискуссий. Оспаривались сами учебные программы, и математика не стала исключением. Как раз в то время Джон Хаммерсли написал полемическую статью „О снижении уровня математической подготовки в школах и университетах благодаря 'современной математике' и подобной ей жидкой интеллектуальной похлебке" [330]; другие обеспокоенные математики [279] даже задавались вопросом: „Можно ли спасти математику?". Когда один из авторов настоящей книги задумал серию книг под названием *Искусство программирования для ЭВМ*, то при написании первого тома он (Д. Э. К.) обнаружил, что в его арсенале отсутствуют важные математические инструменты: математика, которая требовалась для досконального, обоснованного истолкования компьютерных программ, совершенно отличалась от той, которую автор изучал в колледже в качестве профилирующей дисциплины. Поэтому он ввел новый курс, содержащий материал, который он, в свое время, предпочел бы прослушать сам.

„Отдельные лица приобретают дешевый авторитет, оснастив свою речь жаргоном: они могут проповедовать и выставлять напоказ поверхностные суждения. Но от математиков-профессионалов требуются не их разглагольствования и даже не степень их осведомленности в тех или иных математических вопросах, а готовность применять свои знания и способность реально решать возникающие на практике математические задачи. Короче говоря, мы ждем дел, а не слов."
— Дж. Хаммерсли [330]

С самого начала название курса — „конкретная математика" — подразумевало его противопоставление „абстрактной математике", поскольку конкретные классические результаты стремительно вымывались из современного математического образования новой волной абстрактных идей, популярно именовавшихся „новой мат'кой". Абстрактная математика — чудесный предмет, и в ней нет ничего плохого: она красива, обща и полезна. Однако ее приверженцы впали в заблуждение, что вся остальная математика занимает более низкое положение и далее не заслуживает внимания. Погоня за обобщениями оказалась столь захватывающей, что целое поколение математиков потеряло способность находить

прелесть в частностях, в том числе получать удовольствие от решения численных задач или оценить по достоинству роль математических методов. Абстрактная математика стала вырождаться и терять связь с действительностью — математическое образование нуждалось в конкретном противовесе для восстановления устойчивого равновесия.

„Суть математики — в конкретных примерах и конкретных проблемах."
— П. Р. Халмош [327]

Когда Д. Э. К. приступал к чтению курса конкретной математики в Станфорде, он объяснял несколько странное название курса тем, что это попытка преподавания математики в стиле „хард" вместо „софт". Он объявил, что вопреки ожиданию некоторых его коллег он *не* собирается излагать ни теорию агрегатов Вейрштрасса, ни теорему вложения Стоуна, ни даже компактификацию Стоуна—Чеха. (Несколько студентов с факультета гражданского строительства поднялись со своих мест и потихоньку покинули аудиторию.)

Одно из значений слова „concrete" — бетон.
— Ред.

Хотя конкретная математика возникла в качестве реакции на другие тенденции в математике, основные причины ее появления скорее позитивны, нежели негативны. И по мере того как этот курс продолжал занимать надлежащее место в учебном процессе, содержание предмета „отвердевало" и доказывало свою ценность в целом ряде новых приложений. Тем временем поступило другое независимое подтверждение уместности подобного наименования курса: З. А. Мелзяк опубликовал два тома *Справочника по конкретной математике* [216].

„Учить абстрактному, не изучив конкретного,— непростительный грех."
— З. А. Мелзяк [216]

На первый взгляд, содержание конкретной математики может показаться беспорядочным нагромождением уловок, но на деле — это упорядоченный набор инструментов. Более того, методы конкретной математики обладают не только внутренним единством, но и внешней привлекательностью. Когда другой автор этой книги (Р. Л. Г.) впервые прочитал данный курс в 1979 г., студенты пришли в такой восторг, что договорились продлить это удовольствие на следующий год.

Конкретная математика — мост к абстрактной математике.

Но что же в действительности представляет собой КОНКРЕТНАЯ математика? Это смесь КОНТИНУальной и дисКРЕТНОЙ математики. Еще более конкретно: это осмысленное оперирование математическими формулами с использованием определенного набора методов решения задач. После того как вы, читатель, изучите материал этой книги, все, что вам потребуется,— это ясная голова, большой лист бумаги и сносный почерк для вычисления ужасных сумм, решения запутанных рекуррентных соотношений и выявления коварных закономерностей в данных. Вы овладеете алгебраической техникой в такой степени, что зачастую вам будет проще получить точные результаты, нежели удовлетвориться приближенными ответами, которые справедливы лишь в пределе.

„Более подготовленный читатель, пропустивший те части, которые кажутся ему слишком элементарными, может потерять больше, чем менее подготовленный читатель, который пропустит части, показавшиеся ему слишком сложными."
— Д. Пойа [242]

Исчисление сумм, рекуррентные соотношения, элементарная теория чисел, биномиальные коэффициенты, производящие функции, дискретная теория вероятностей и асимптотические методы — вот наиболее важные темы этой книги. При этом предпочтение отдается технической стороне дела, а не теоремам существо-

вания или комбинаторным рассуждениям: наша цель состоит в том, чтобы сделать каждого читателя настолько осведомленным в дискретных операциях (типа вычисления функции „наибольшего целого“ или конечной суммы), насколько изучающие анализ знакомы с непрерывными операциями (типа вычисления функции „абсолютной величины“ или определенного интеграла).

Заметим, что этот перечень тем совершенно отличается от того, что в наши дни обычно читается в качестве спецкурсов под названием „Дискретная математика“. Поэтому наш предмет нуждается в отличительном наименовании, и название „Конкретная математика“, право, не хуже любого другого.

(Мы не настолько дерзки, чтобы назвать наш предмет „Дистинуальная математика“.)

Первоначальным руководством по конкретной математике для стэнфордского курса служил раздел „Математическое введение“ из *Искусства программирования для ЭВМ* [139]. Но изложение на тех 110 страницах было слишком сжатым, поэтому еще один автор книги (О. П.) загорелся желанием составить длинный ряд дополнений. Настоящая книга выросла на их почве: она одновременно предваряет и дополняет материал „Математического введения“. Некоторые вопросы повышенной сложности были опущены; в то же время в книгу включено несколько тем, которых не было раньше и без которых изложение было бы неполным.

Авторы с удовольствием объединили свои усилия для работы над этой книгой, поскольку ее предмет начал зарождаться и обретать свою собственную жизнь на наших глазах; кажется, что книга написана как бы сама собой. Более того, отчасти разнородные подходы, которые выбирал каждый из нас, оказались после стольких лет совместной работы настолько плотно подогнанными друг к другу, что мы не могли удержаться от ощущения, что эта книга — своего рода манифест единодушно выбранного нами пути занятий математикой. Поэтому мы полагаем, что наша книга прозвучит одой математической красоте и очарованию, и надеемся, что наши читатели разделят с нами хотя бы ε того удовольствия, которое мы испытали при ее написании.

„... конкретный спасательный круг, брошенный студентам, тонущим в море абстракции.“
— У. Готшалк

Поскольку книга родилась в университетской среде, мы попытались передать дух аудитории наших дней, выбрав неформальный стиль изложения. Есть люди, полагающие, что математика — это нудное занятие, которое всегда уныло и скучно; мы же находим математику развлечением и не стыдимся признаться в этом. К чему проводить четкую грань между делом и игрой? Конкретная математика полна тому примеров: действия не всегда доставляют удовольствие, но результаты могут быть удивительно приятны. Радости и горести математической работы явно присутствуют в этой книге, поскольку являют собой части нашего бытия.

Студенты всегда умнее своих учителей, поэтому мы попросили изучавших впервые этот материал откровенно поделиться своим мнением в форме „граффи́ти“ на полях. Некоторые из их маргиналий были попросту банальны, некоторые не лишены смысла: одни предупреждали о двусмысленностях или неясностях,

Мат. граффи́ти: $N = 1 \Rightarrow P = NP$. *Килрой не был Хоаром.*

другие были типичными комментариями умников с последних рядов. Часть замечаний позитивна, часть — негативна, ценность остальных равна нулю. Но все они, несомненно, отражают реальные чувства читателей, что должно облегчить восприятие книги. (Вдохновляющая идея для подобных маргинальных пометок почерпнута из *Справочника для поступающих в Станфорд*, где официальной линии университета противопоставляются ремарки покидающих его студентов. К примеру, справочник гласит: „Есть несколько вещей, которые нельзя пропустить в таком аморфном *образовании*, каковым является Станфорд", а на полях помечено: „*Образование*, блин! Кругом одни псевдоинтеллектуалы." Справочник: „Потенциал группы совместно проживающих студентов безграничен." Граффити: „Станфордские общаги — это зверинец без смотрителя.")

К этому предмету у меня всего лишь маргинальный интерес.

На полях также цитируются знаменитые математики прошлого — подлинные слова, которыми они сопровождали некоторые свои фундаментальные открытия. Отчего представляется уместным свести воедино высказывания Лейбница, Эйлера, Гаусса и других с высказываниями тех, кому предстоит продолжить их дело в будущем? Математика по-прежнему продолжает привлекать своих приверженцев — из многих нитей сплетается богатое полотно!

Это был самый приятный предмет из пройденных мною. Но по мере продвижения вперед было бы неплохо подытоживать материал.

Книга содержит более 500 упражнений, разбитых на шесть категорий:

Понятно: конкретная математика — это муштра.

- ***разминочные упражнения,*** которые должен попытаться выполнить КАЖДЫЙ ЧИТАТЕЛЬ при первом чтении книги;
- ***обязательные упражнения,*** предназначенные для установления фактов, которые лучше всего усваиваются, если их выводить самостоятельно, а не читать о том, как это сделали другие;
- ***домашние задания,*** представляющие собой задачи для углубленного понимания материала той главы, к которой они относятся;
- ***контрольные работы,*** обычно охватывающие материал двух и более глав одновременно,— в основном они предназначены для выполнения дома (а не в аудитории при нехватке времени);
- ***конкурсные задачи,*** превышающие возможности, которые предполагаются у среднего студента, изучающего курс конкретной математики на базе этой книги,— они продвигают изложение в важных направлениях;
- ***исследовательские проблемы,*** разрешимые или неразрешимые человеком, но те из них, что предложены в книге, наверное следует попробовать решить (без ограничения времени).

Домашнее задание оказалось неподатливым, зато я выучил уйму нового. Каждый час стоил того.

Домашние контрольные еще пригодятся — храните их.

Контрольные оказались более трудными, чем я ожидал, глядя на домашние задания.

Ответы ко всем этим упражнениям приводятся в приложении А, зачастую с дополнительной информацией о родственных резуль-

татах. (Разумеется, „ответы“ на исследовательские проблемы являются неполными, но даже в этих случаях могут оказаться полезными частичные результаты или указания.) Читателям не возбраняется заглянуть в ответы главным образом разминочных задач, но только ПОСЛЕ серьезных попыток решить задачу без заглядывания украдкой в ответы.

Лодыри могут сдать этот курс, просто списывая ответы, но обманут они только себя.

В приложении С мы постарались воздать должное первоисточникам каждого упражнения, поскольку составление той или иной поучительной задачи зачастую является весьма творческим процессом с некоторой долей везения. К сожалению, у математиков сложилась традиция заимствовать упражнения без выражения какой бы то ни было признательности; мы полагаем, что гораздо лучше противоположная традиция, практикуемая, например, в шахматных книгах и журналах (где заведен порядок специально оговаривать авторов, дату и место появления оригинальных шахматных задач). Как бы то ни было, мы не смогли выявить источники многих задач, ставших частью математического фольклора. Если кому-нибудь из читателей известно о происхождении того или иного упражнения, ссылка на которое нами пропущена или неточна, мы были бы рады узнать об этом подробнее, с тем чтобы восполнить подобный пробел в последующих изданиях этой книги.

Конкурсные задачи не рассчитаны на студентов, которые специализируются по другим предметам.

Шрифт, которым набраны математические обозначения в книге — это новая разработка Германа Цапфа [159], заказанная Американским математическим обществом и выполненная при содействии комиссии, в состав которой вошли Б. Битон, Р. П. Боас, Л. К. Дерст, Д. Э. Кнут, П. Мёрдок, Р. С. Пале, П. Ренц, Э. Свенсон, С. Б. Уидден и У. Б. Вульф. Основная идея дизайна Цапфа — отразить особенности написания математических знаков идеальным почерком. Рукописный стиль в отличие от механического более естествен, поскольку математические формулы обычно выходят из-под карандаша, ручки или куска мела. (Примером одного из фирменных знаков этого нового дизайна является начертание символа нуля, ‘0’, который слегка заострен сверху, поскольку рукописный нуль редко закругляется в исходной точке гладко.) Буквы расположены прямо, а не наклонно, с тем чтобы нижние и верхние индексы, а также штрихи, было легче совмещать с обычными символами. Новое семейство шрифтов получило название *AMS Euler* в честь великого швейцарца Леонарда Эйлера (1707–1783), открывшего так много в математике из того, что мы сегодня знаем. Алфавиты *AMS Euler* включают в себя текстовые ($\mathrm{Aa\,Bb\,Cc}\ldots\mathrm{Xx\,Yy\,Zz}$), готические ($\mathfrak{Aa\,Bb\,Cc}\ldots\mathfrak{Xx\,Yy\,Zz}$) и рукописные прописные ($\mathcal{A\,B\,C}\ldots\mathcal{X\,Y\,Z}$) буквы, а также греческие буквы ($A\alpha\,B\beta\,\Gamma\gamma\ldots X\chi\,\Psi\psi\,\Omega\omega$) и спецзнаки типа $\wp$ и $\aleph$. Нас особенно радует возможность торжественно представить эйлерово семейство шрифтов в нашей книге, поскольку дух Леонарда Эйлера живет поистине на каждой ее странице: конкретная математика — это эйлерова математика!

Я не привык к такому обороту.

Авторы чрезвычайно признательны Андрею Бродеру, Эрнсту

Дорогой проф., спасибо за (1) каламбуры, (2) содержательность предмета.

Мэйру, Эндрю и Фрэнсис Яо, внесшим значительный вклад в эту книгу в те годы, когда они преподавали конкретную математику в Станфорде. Кроме того, мы выражаем 1024 благодарности ассистентам, творчески подошедшим к записи происходившего в аудитории каждый год и помогавшим составлять экзаменационные вопросы; их имена перечислены в приложении С. Эта книга, представляющая в сущности компендиум всего ценного, прозвучавшего на лекциях за шестнадцать лет, была бы невозможной без их первоклассной работы.

Не понимаю, сможет ли то, что я изучил, когда-нибудь мне пригодиться.

И еще многие помогли этой книге стать реальностью. Например, достойны похвалы студенты университетов Брауна и Райса, Колумбийского, Нью-Йоркского, Принстонского и Станфордского университетов, внесшие вклад в отобранные граффи́ти и оказавшие помощь в вылавливании ошибок первых вариантов этой книги. Наши контакты с издательством Эддисон-Уэсли были особенно эффективны и плодотворны; в частности, мы хотим поблагодарить нашего издателя (Питер Гордон), технического директора (Бет Аронсон), дизайнера (Рой Браун) и редактора (Лин Дюпре́). Национальный научный фонд и Отделение военно-морских исследований оказали нам неоценимую помощь. Ширли Грэхем была воистину незаменима при составлении указателя. А сверх того мы хотим поблагодарить наших жен (Фэн, Джилл и Эми) за их терпение, поддержку, ободрение и советы.

С этим предметом у меня хватило хлопот, но я знаю, что он отточил мои математические и умственные способности.

Это второе издание отличается новым разделом 5.8, описывающим ряд важных идей, которые Дорон Зильбергер открыл вскоре после выхода первого издания. Кроме того, исправления к первому изданию встречаются почти на каждой странице.

Мы пытались создать безупречную книгу, но мы — небезупречные авторы и поэтому призываем оказать содействие в исправлении допущенных нами ошибок. Мы с признательностью выплатим вознаграждение в сумме 2.56 доллара первому нашедшему любую ошибку, будь то математическая, историческая или типографская.

Случайному студенту следовало бы держаться подальше от этого курса.

Мюррей Хилл, Нью Джерси,
Станфорд, Калифорния,
май 1988 и октябрь 1993

— Р. Л. Г.
Д. Э. К.
О. П.

К русскому изданию

Я С БОЛЬШИМ УДОВЛЕТВОРЕНИЕМ встретил известие о том, что перевод нашей книги опубликован в стране, где долгое время жил и создал свои основополагающие работы Леонард Эйлер, которому и посвящена книга.

Мне доставило подлинное удовольствие сотрудничество с Ириной Маховой и в ее лице с издательством „Мир“, которое длится уже почти 20 лет. Было очень приятно увидеть, как элегантно Андрей Ходулёв, Ольга Лапко и их коллеги адаптировали полиграфические средства, разработанные мною для английского языка, под русские полиграфические традиции.

Я хотел бы отдать дань памяти Бориса Походзея, внесшего неоценимый вклад в перевод книги, работу над которым прервала его внезапная кончина. Во время моего визита в Санкт-Петербург в 1994 г. мы с Борисом посетили Александро-Невскую Лавру и возложили цветы на могилу Леонарда Эйлера.

— Д. Э. Кнут, 1998

Значения обозначений

„Плохая система обозначений может сделать хорошее изложение плохим, а плохое — еще худшим; лучшее обозначение — отсутствие обозначений.“
— П. Р. Халмош [327, с. 262]. (Добавл. перев.)

ЧАСТЬ СИМВОЛИКИ, используемой в этой книге (еще?) не стала нормой. Вот список обозначений, которые могут быть незнакомы читателям, изучавшим аналогичный материал по другим книгам. В списке указаны номера страниц, где эти обозначения разъясняются. (Ссылки на более стандартные обозначения см. в предметном указателе в конце книги.)

Обозначение	*Смысл*	*Стр.*
$\ln x$	натуральный логарифм: $\log_e x$	307
$\lg x$	двоичный логарифм: $\log_2 x$	91
$\log x$	десятичный логарифм: $\log_{10} x$	488
$\lfloor x \rfloor$	пол: $\max\{n \mid n \leqslant x, n$ — целое$\}$	88
$\lceil x \rceil$	потолок: $\min\{n \mid n \geqslant x, n$ — целое$\}$	88
$x \bmod y$	остаток: $x - y\lfloor x/y \rfloor$	104
$\{x\}$	дробная часть: $x \bmod 1$	91
$\sum f(x)\,\delta x$	неопределенная сумма	68
$\sum_a^b f(x)\,\delta x$	определенная сумма	69
$x^{\underline{n}}$	убывающая факториальная степень: $x!/(x-n)!$	67, 239
$x^{\overline{n}}$	возрастающая факториальная степень: $\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$	67, 239
$n¡$	субфакториал: $n!/0! - n!/1! + \cdots + (-1)^n n!/n!$	221
$\Re z$	действительная часть: x, если $z = x + iy$	84
$\Im z$	мнимая часть: y, если $z = x + iy$	84
H_n	гармоническое число: $1/1 + \cdots + 1/n$	47
$H_n^{(x)}$	обобщенное гармоническое число: $1/1^x + \cdots + 1/n^x$	308
$f^{(m)}(z)$	m-я производная функции f в точке z	509

$\left[{n \atop m}\right]$	число Стирлинга первого рода (число „циклов“)	289
$\left\{{n \atop m}\right\}$	число Стирлинга второго рода (число „подмножеств“)	288
$\left\langle{n \atop m}\right\rangle$	число Эйлера	297
$\left\langle\!\left\langle{n \atop m}\right\rangle\!\right\rangle$	число Эйлера второго порядка	300
$(a_m \ldots a_0)_b$	обозначение для $\sum_{k=0}^{m} a_k b^k$ в системе счисления с основанием b	28
$K(a_1, \ldots, a_n)$	континуант (K-многочлен)	334
$F\left({a, b \atop c}\middle\vert z\right)$	гипергеометрическая функция	233
$\#A$	мощность: количество элементов в множестве A	58
$[z^n]\, f(z)$	коэффициент при z^n в разложении $f(z)$	224
$[\alpha, \beta]$	замкнутый интервал: множество $\{x \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$	95
$[m=n]$	1, если $m = n$, 0 в противном случае*	42
$[m \backslash n]$	1, если m нацело делит n, 0 в противном случае*	125
$[m \backslash\backslash n]$	1, если m напросто делит n, 0 в противном случае*	171
$[m \perp n]$	1, если m взаимно просто с n, 0 в противном случае*	139

В толковом учебнике по конкретной математике не обойтись без сбивающего с толку списка обозначений.

*В общем случае, если S — некоторое утверждение, которое может быть истинно или ложно, квадратно-скобочное обозначение $[S]$ означает 1, если S истинно, и 0 в противном случае.

Повсюду в книге мы используем одинарные кавычки ('...') для выделения текста, как он *пишется*, а двойные кавычки („...“) — для фразы, как она *произносится*. Так, строка букв 'строка' называется “строка”.

'Нестрока' также строка.

Выражение типа 'a/bc' означает то же самое, что и '$a/(bc)$'. Кроме того, $\log x / \log y = (\log x)/(\log y)$ и $2n! = 2(n!)$.

1

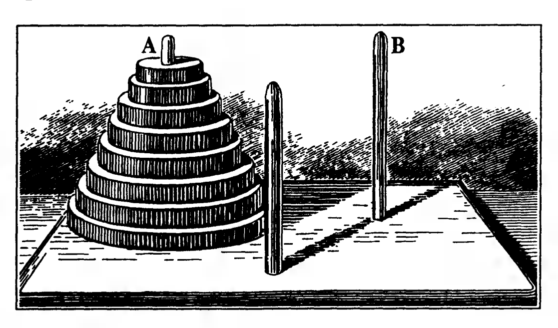
Возвратные задачи

В ЭТОЙ ГЛАВЕ В КАЧЕСТВЕ ПРИМЕРА рассматриваются три задачи, по которым можно будет судить о том, что нас ожидает в дальнейшем. Эти задачи имеют две общие черты: к ним неоднократно обращались математики и решение каждой из них основано на идее *возвратности* (или *рекуррентности*), согласно которой решение всей задачи зависит от решений той же самой задачи меньших размеров.

1.1 ЗАДАЧА О ХАНОЙСКОЙ БАШНЕ

Рассмотрим сначала маленькую изящную головоломку под названием *ханойская башня*, которую придумал французский математик Эдуард Люка́ в 1883 г. Башня представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков:

Кто раньше этого не видел, пусть поднимет руку. О'кей, остальные могут сразу перейти к соотношению (1.1).



Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

Бог с ними, с золотыми, разобраться бы с нашими, конкретными.

Люка [209] связывал свою игрушку с мифической легендой о значительно большей башне Брамы, которая, как утверждается, состоит из 64 дисков чистого золота, а колышки представляют собой три алмазных шпиля. При сотворении мира Всевышний поместил диски на первый шпиль и повелел, чтобы жрецы пере-

местили их на третий в соответствии с предписанными правилами. По имеющимся сведениям жрецы трудятся над этой задачей денно и нощно — как только они закончат, башня рассыплется в прах и наступит конец света.

Не тотчас очевидно, что эта головоломка разрешима, но по кратком размышлении (или предварительном знакомстве с данной задачей) убеждаемся, что это так. Тогда возникает следующий вопрос: какой способ самый оптимальный? То есть, какое количество перемещений дисков является необходимым и достаточным для выполнения поставленной задачи?

Наилучший способ разрешить вопрос, подобный нашему,— несколько обобщить его. Башня Брамы состоит из 64 дисков, а ханойская башня — из 8; посмотрим, что будет в случае n дисков.

Одно из преимуществ такого рода обобщения состоит в том, что можно будет даже еще уменьшить размер задачи. И в самом деле, на протяжении всей книги вы неоднократно сможете убедиться, что полезно вначале РАССМОТРЕТЬ КРАЙНИЕ СЛУЧАИ. Совершенно ясно, как перемещать башню, состоящую только из одного или двух дисков, а после нескольких попыток становится понятно, как перемещать башню из трех дисков.

Не впадая при этом в крайности, разумеется.

Следующий шаг в решении задачи — выбор подходящего обозначения: ОБОЗНАЧАЙ И ВЛАСТВУЙ. Будем говорить, что T_n есть минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения n дисков с одного колышка на другой по правилам Люка. Тогда T_1, очевидно, равно 1, а T_2 равно 3.

Можно получить дополнительную информацию, причем совершенно бесплатно, если рассмотреть самый крайний случай: ясно, что $T_0 = 0$, поскольку для перемещения башни из $n = 0$ дисков вообще не требуется ни одного перекладывания! Блестящие математики не стыдились впадать в крайности, потому что если хорошенько разобраться в частных случаях (даже в совсем тривиальных), легче постичь общие закономерности.

Но давайте теперь изменим точку зрения и попробуем подумать о главном — как переместить высокую башню? Эксперименты с тремя дисками показывают, что решающая идея состоит в переносе двух верхних дисков на средний колышек; затем переносится третий диск и на него помещаются два других. Это дает ключ к общему правилу перемещения n дисков: сначала мы перемещаем $n-1$ меньших дисков на любой из колышков (что требует T_{n-1} перекладываний), затем перекладываем самый большой диск (одно перекладывание) и, наконец, помещаем $n-1$ меньших дисков обратно на самый большой диск (еще T_{n-1} перекладываний). Таким образом, n дисков (при $n > 0$) можно переместить самое большее за $2T_{n-1} + 1$ перекладываний:

$$T_n \leqslant 2T_{n-1} + 1 \qquad \text{при } n > 0.$$

В этой формуле фигурирует знак '$\leqslant$' вместо '$=$', поскольку наше построение показывает только, что достаточно $2T_{n-1} + 1$ перекладываний; мы не доказали, что необходимо $2T_{n-1} + 1$ пере-

кладываний. Быть может, какой-нибудь мудрец отыщет лучший метод.

(Большинство опубликованных „решений" задачи Люка, вроде содержащегося в работе Аллардиса и Фрейзера [6], не объясняет, почему T_n должно быть $\geqslant 2T_{n-1}+1$.)

А действительно, нет ли более короткого пути? Оказывается, нет. На некотором этапе мы обязаны переместить самый большой диск. Когда мы это делаем, $n-1$ меньших дисков должны находиться на одном колышке, а для того чтобы собрать их вместе, потребуется по меньшей мере T_{n-1} перекладываний. Самый большой диск можно перекладывать и более одного раза, если мы не очень расторопны. Но после перемещения самого большого диска в последний раз мы обязаны поместить $n-1$ меньших дисков (которые опять должны находиться на одном колышке) обратно на наибольший диск, что также требует T_{n-1} перекладываний. Следовательно,

$$T_n \geqslant 2T_{n-1}+1 \qquad \text{при } n>0.$$

Эти два неравенства вместе с тривиальным решением при $n=0$ дают

$$\begin{aligned} T_0 &= 0\,, \\ T_n &= 2T_{n-1}+1 \qquad \text{при } n>0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

(Заметим, что уже известные нам значения $T_1=1$ и $T_2=3$ согласуются с этими формулами. Особое внимание к крайним случаям не только способствовало выводу общей формулы, но и обеспечило удобным способом проверки, что мы не совершили глупой ошибки. Такие проверки будут особенно ценными, когда мы отважимся на более рискованные маневры в последующих главах.)

Постойте, постойте... Я видел это слово раньше.

Совокупность равенств типа (1.1) называется *рекуррентностью* (говорят также о возвратном соотношении или рекурсивной зависимости). Она задается начальным значением и зависимостью общего члена от предыдущих. Иногда мы будем называть рекуррентностью только выражение для общего члена, хотя формально для полного задания рекуррентности необходимо еще начальное значение.

Рекуррентность позволяет вычислять T_n для любого n, какое мы пожелаем. Но в действительности никто не захочет пользоваться для вычисления рекуррентностью, когда n велико — это займет слишком много времени. Рекуррентность дает только косвенную, локальную информацию. *Решение рекуррентного соотношения* — вот что доставило бы нам чувство глубокого удовлетворения. То есть мы хотели бы получить T_n в простой, компактной, „замкнутой форме", что позволило бы вычислить T_n быстро даже при большом n. Располагая решением в замкнутой форме, мы могли бы понять, что на самом деле представляет собой T_n.

Итак, как же решить рекуррентное соотношение? Один из способов состоит в угадывании правильного решения с последующим доказательством, что наша догадка верна. А наша самая

большая надежда на угадывание решения — (снова) крайние случаи. Поэтому мы последовательно вычисляем $T_3 = 2\cdot3+1 = 7$; $T_4 = 2\cdot7+1 = 15$; $T_5 = 2\cdot15+1 = 31$; $T_6 = 2\cdot31+1 = 63$. Ага! Это определенно выглядит так, как если бы

$$T_n = 2^n - 1 \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{1.2}$$

По крайней мере эта формула „работает" при $n \leqslant 6$.

Математическая индукция — это общий способ доказательства, что некоторое утверждение о целом числе n справедливо при любом $n \geqslant n_0$. Сначала данное утверждение доказывается, когда n принимает свое наименьшее значение, n_0; это называется *базой* или *основанием.* Затем данное утверждение доказывается для $n > n_0$, в предположении, что оно уже доказано для всех n между n_0 и $n-1$ включительно; это называется *индукцией* или *индуктивным переходом.* Такого рода доказательство позволяет получить бесконечное число результатов при конечном объеме работы.

Математическая индукция доказывает, что можно подняться по лестнице так высоко, как мы того пожелаем,— для этого надо доказать, что можно подняться на нижнюю ступеньку (база) и что с каждой ступеньки можно подняться на следующую (индукция).

Рекуррентность идеально подходит для математической индукции. Например, в нашем случае (1.2) легко следует из (1.1): база индукции тривиальна, поскольку $T_0 = 2^0 - 1 = 0$, а индуктивный переход выполняется для $n > 0$, если предположить справедливость (1.2), когда n заменяется на $n-1$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1\,.$$

Следовательно, (1.2) справедливо с равным успехом при любом n. Отлично! С поиском выражения для T_n благополучно покончено.

Однако с задачей браминов дело обстоит иначе — они по-прежнему покорно перекладывают диски и им придется еще изрядно потрудиться, поскольку при $n = 64$ требуется $2^{64} - 1$ (примерно 18 с восемнадцатью нулями) перекладываний. Даже работая с фантастической скоростью одно перекладывание в микросекунду, они затратят свыше 5000 веков для перемещения башни Брамы. Сама же головоломка Люка несколько практичнее — она требует $2^8 - 1 = 255$ перекладываний, которые при известной сноровке можно выполнить приблизительно за четыре минуты.

А если найти ошибку в этой книге, то можно получить даже на 1 цент больше „стоимости" ханойской башни. — Перев.

Рекуррентность, связанная с ханойской башней, типична для множества задач, которые возникают во всякого рода приложениях. В процессе поиска выражения в замкнутой форме для некоторой интересующей нас величины, подобной T_n, мы проходим три стадии.

1 Рассмотрение крайних случаев. Это позволяет вникнуть в задачу и помогает на стадиях 2 и 3.

2 Нахождение и доказательство математического выражения для интересующей нас величины. В случае ханойской башни это рекуррентность (1.1), которая позволяет при заданной высоте башни вычислить T_n для любого n.

3 Нахождение и доказательство замкнутой формы для нашего математического выражения. В случае ханойской башни это решение рекуррентности (1.2).

Именно третьей стадии мы будем уделять внимание на протяжении всей книги. Порой будем перескакивать сразу через стадии 1 и 2, поскольку математическое выражение будет задано в качестве исходного. Но даже тогда мы будем сталкиваться с подзадачами, необходимость решения которых заставит нас проходить все три стадии.

Наш анализ задачи о ханойской башне привел к правильному ответу, но он требовал „индуктивного скачка"— мы полагались на счастливую догадку об ответе. Одна из основных целей этой книги состоит в том, чтобы объяснить, как читатель может решать рекуррентности, *не* являясь ясновидцем. Например, рекуррентность (1.1) может быть упрощена прибавлением 1 к обеим частям соотношений:

„Конечно, мы будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться!" —Д. Пойа, [242, с. 15]. (Добавл. перев.)

$$T_0 + 1 = 1\,,$$
$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 \qquad \text{при } n > 0.$$

Теперь, если положить $U_n = T_n + 1$, то получим

Забавно, мы избавляемся от +1 в (1.1) путем прибавления, а не вычитания.

$$U_0 = 1\,;$$
$$U_n = 2U_{n-1} \qquad \text{при } n > 0. \tag{1.3}$$

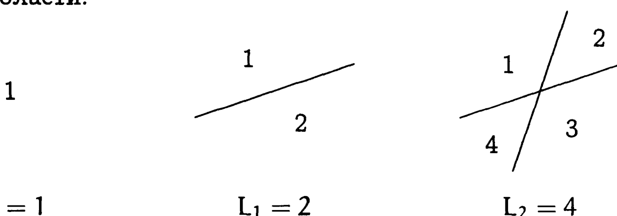
Не надо быть гением, чтобы обнаружить, что решение *этой* рекурсии есть просто $U_n = 2^n$; следовательно, $T_n = 2^n - 1$. Даже компьютер смог бы обнаружить это.

1.2 ЗАДАЧА О РАЗРЕЗАНИИ ПИЦЦЫ

Вторая выбранная нами задача имеет более ощутимый геометрический привкус: сколько кусков пиццы можно получить, делая n прямолинейных разрезов ножом? Или более академично: каково максимальное число L_n областей, на которые плоскость делится n прямыми? Впервые эта задача была решена в 1826 г. швейцарским математиком Якобом Штейнером [356].

А пицца была со швейцарским сыром?

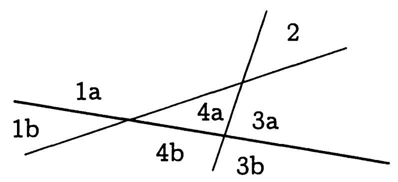
Снова начнем с рассмотрения крайних случаев, памятуя, что начинать надо с самого крайнего. Плоскость без прямых — это одна область, с одной прямой — две области, а с двумя прямыми — четыре области:



(Каждая прямая неограниченно продолжается в обоих направлениях.)

Вы наверняка думаете, что $L_n = 2^n$! Добавление новой прямой попросту удваивает число областей. К сожалению, это неверно. Мы могли бы достигнуть удвоения, если бы новая n-я прямая рассекала каждую старую область на две части; разумеется, она может рассекать старую область в лучшем случае на две части, поскольку каждая из старых областей выпукла. (Прямой линией можно рассечь выпуклую область самое большее на две новые части, которые также будут выпуклы.) Но когда добавляется третья прямая — жирная линия на нижнем рисунке — мы быстро обнаруживаем, что она может рассекать самое большее три старые области вне зависимости от того, как расположены первые две прямые:

Область называется выпуклой, если она целиком содержит прямолинейные отрезки, соединяющие две любые ее точки. (Это не то, что говорится в моем словаре, но так считают математики.)



Таким образом, $L_3 = 4 + 3 = 7$ — самое большее, что можно сделать.

А по некотором размышлении на ум приходит и подходящее обобщение. Новая n-я прямая (при $n > 0$) увеличивает число областей на k тогда и только тогда, когда рассекает k старых областей, а рассекает она k старых областей тогда и только тогда, когда пересекает прежние прямые в $k-1$ различных местах. Две прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Поэтому новая прямая может пересекать $n-1$ старых прямых не более чем в $n-1$ различных точках, и мы должны иметь $k \leqslant n$. Нами установлена верхняя граница

$$L_n \leqslant L_{n-1} + n \qquad \text{при } n > 0.$$

Более того, легко показать по индукции, что в этой формуле можно достичь равенства. Мы просто проводим n-ю прямую так, чтобы она не была параллельна никакой другой (следовательно, она пересекает каждую из них) и так, чтобы она не проходила ни через одну из имеющихся точек пересечения (следовательно, она пересекает каждую из прямых в различных местах). Поэтому искомое рекуррентное соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} L_0 &= 1\,, \\ L_n &= L_{n-1} + n \qquad \text{при } n > 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Уже известные значения L_1, L_2 и L_3 превосходно согласуются с этим соотношением, так что мы его берем.

Теперь нам нужно решение в замкнутой форме. Мы могли бы снова сыграть в „угадайку", но 1, 2, 4, 7, 11, 16,... не напоминает ничего знакомого: поэтому попробуем применить другой подход.

Зачастую можно разобраться в рекуррентности, „развертывая“ или „разматывая“ ее всю до конца следующим образом:

Развертывая? Я бы сказал „подставляя“.

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\;\;\vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 \;+\; S_n, \qquad \text{где } S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n. \end{aligned}$$

Другими словами, L_n на единицу больше суммы S_n первых n положительных целых чисел.

Поскольку величина S_n возникает сплошь и рядом, неплохо бы составить таблицу нескольких первых значений. Тогда мы смогли бы с большей легкостью распознать такие числа, когда они встретятся нам в дальнейшем:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

Эти числа называются также *треугольными числами*, поскольку S_n представляет собой число кеглей, расставленных треугольником в n рядов. Например, обычная четырехрядная расстановка ∵ состоит из $S_4 = 10$ кеглей.

Что-то Гауссу приписывают многовато — либо он был действительно толковым, либо имел толкового пресс-секретаря.

Для вычисления S_n можно воспользоваться уловкой, до которой, как утверждается, Гаусс додумался в 1786 г., когда ему было девять лет от роду [96] (см. также Эйлер [378, часть 1, §415]):

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n &=& 1 &+& 2 &+& 3 &+\cdots+& (n-1) &+& n \\ +\,S_n &=& n &+& (n-1) &+& (n-2) &+\cdots+& 2 &+& 1 \\ \hline 2S_n &=& (n+1) &+& (n+1) &+& (n+1) &+\cdots+& (n+1) &+& (n+1) \end{array}$$

Быть может, он просто имел привлекательную внешность?

Мы просто складываем S_n с самой собой, записанной в обратном порядке, так что сумма в каждой из n колонок справа равна $n+1$. После упрощения имеем

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{1.5}$$

На самом деле, Гаусса часто называют величайшим математиком всех времен. Поэтому приятно, что мы оказались в состоянии понять хотя бы одно из его открытий.

Ну вот мы и получили требуемое решение:

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Как специалисты, мы могли бы удовлетвориться этим выводом и рассматривать его в качестве доказательства, даже если слегка отмахивались от выполнения „развертывания“ и „обращения“. Но изучающие математику должны уметь действовать в соответствии с более строгими стандартами — вот хороший повод

для строгого доказательства по индукции. Решительный индуктивный шаг —

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\tfrac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) + 1,$$

и теперь можно не сомневаться в справедливости замкнутой формы (1.6).

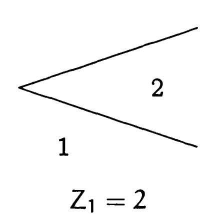
Между прочим, мы разглагольствуем о „замкнутых формах" без точного определения, что мы под этим понимаем. Обычно это и так достаточно очевидно. Рекуррентности типа (1.1) и (1.4) представлены в незамкнутой форме, ибо они выражают некоторую величину через самое себя, но их решения типа (1.2) и (1.6) — в замкнутой форме. Суммы вида $1 + 2 + \cdots + n$ записаны не в замкнутой форме, поскольку они грешат наличием '$\cdots$'; но выражения вида $n(n+1)/2$ представлены в замкнутой форме. Можно дать некое грубое определение типа следующего: выражение для величины $f(n)$ представлено в замкнутой форме, если ее можно вычислить с помощью некоторого фиксированного числа „известных" стандартных операций, независимо от n. Например, выражения $2^n - 1$ и $n(n+1)/2$ представлены в замкнутой форме, поскольку они включают в себя только сложение, умножение, деление и возведение в степень в явном виде.

Если сомневаетесь — обратимся к словам. Почему „замкнутое" в противоположность „открытому"? Чему это должно соответствовать в наших умах? Ответ: выражение „замкнуто", если оно не выражается само через себя, раскручиваясь по спирали. Говорят „вопрос закрыт" — он не возникнет вновь. Метафоры — ключ к пониманию.

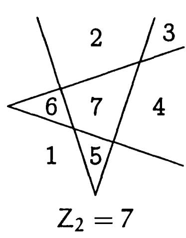
Общее число простых замкнутых форм ограничено, так что существуют рекуррентности, которые не представимы в простых замкнутых формах. Но если такие рекуррентности возникают постоянно, демонстрируя свою важность,— мы пополняем свой репертуар новыми операциями; это может существенно расширить диапазон задач, решаемых в „простой" замкнутой форме. К примеру, произведение первых n целых чисел, n факториал, оказалось настолько важным, что теперь все мы рассматриваем его как основную операцию. Поэтому формула '$n!$' записана в замкнутой форме, хотя эквивалентное ей выражение '$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$' — нет.

А теперь небольшая вариация на тему прямых на плоскости: предположим, что вместо прямых линий мы используем ломаные линии, каждая из которых представлена одним „зигом". Каково максимальное число Z_n областей, на которые плоскость делится n такими ломанными линиями? Можно ожидать, что Z_n будет примерно вдвое или, быть может, втрое больше, чем L_n. Но давайте посмотрим:

А „зиг" — это научный термин?



$Z_1 = 2$

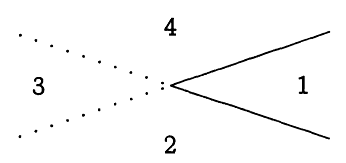


$Z_2 = 7$

Из этих частных случаев, немного подумав, мы заключаем, что ломаная линия подобна двум прямым с тем лишь отличием,

... а затем передумав...

что области сливаются, если „две“ прямые не продолжать после их пересечения:



Области 2, 3 и 4, которые были бы раздельны при наличии двух прямых, превращаются в единую область в случае одной ломаной линии, т. е. мы теряем две области. Однако если привести все в надлежащий порядок — точка излома должна лежать „по ту сторону“ пересечений с другими линиями,— то окажется, что это все, что мы теряем; т. е. мы теряем только две области на одну линию. Таким образом,

Подробности — в упр. 18.

$$Z_n = L_{2n} - 2n = 2n(2n+1)/2 + 1 - 2n$$
$$= 2n^2 - n + 1 \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Сравнивая решения в замкнутой форме (1.6) и (1.7), мы приходим к выводу, что при большом n,

$$L_n \sim \tfrac{1}{2}n^2\,,$$
$$Z_n \sim 2n^2\,,$$

так что ломаные линии дают примерно в четыре раза больше областей, чем прямые. (В последующих главах мы обсудим, как анализировать приближенное поведение целочисленных функций при большом n. Символ '$\sim$' определен в разд. 9.1.)

1.3 ЗАДАЧА ИОСИФА ФЛАВИЯ

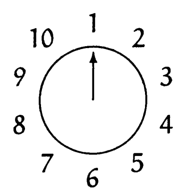
Последний из наших предварительных примеров представляет собой один из вариантов античной задачи, носящей имя Иосифа Флавия — известного историка первого века. Существует легенда, что Иосиф выжил и стал известным благодаря математической одаренности. В ходе иудейской войны он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых до тех пор, пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф, наряду с одним из своих единомышленников, счел подобный конец бессмысленным — он быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища.

(Увлекательную историю этой задачи обсуждают Аренс [9, т. 2] и Герштейн с Каплански [70]. Самого Иосифа [122] несколько труднее понять.)

... и лишь поэтому мы знаем его историю.

В нашем варианте мы начнем с того, что выстроим в круг n человек, пронумерованных числами от 1 до n, и будем исключать каждого *второго* из оставшихся до тех пор, пока не уцеле-

ет только один человек. Вот, к примеру, исходное расположение при $n = 10$:



Порядок исключения — 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Задача: определить номер уцелевшего, $J(n)$.

Вот случай, когда $n = 0$ не имеет смысла.

Мы только что выяснили, что $J(10) = 5$. Можно было бы предположить, что $J(n) = n/2$ при четном n, тем более, что случай $n = 2$ подтверждает наше предположение: $J(2) = 1$. Однако некоторые другие частные случаи разочаровывают нас — предположение нарушается при $n = 4$ и $n = 6$.

n	1	2	3	4	5	6
$J(n)$	1	1	3	1	3	5

Придется вернуться к табличке и попробовать сделать лучшее предположение. Гм-м … Кажется, $J(n)$ всегда будет нечетно. И в самом деле, для этого имеется веское основание: первый обход по кругу исключает все четные номера. К тому же, если само n четно, мы приходим к ситуации, подобной той, с которой начали, за исключением того, что остается вдвое меньше людей и их номера меняются.

Даже неудачная догадка — не пустая трата времени, поскольку она помогает вникнуть в задачу.

Итак, допустим, что первоначально имеется $2n$ людей. После первого прохода по кругу мы остаемся с номерами

1
3
5
7
…
$2n-3$
$2n-1$

и следующий проход будет начинаться с номера 3. Это все равно, как если бы мы начинали с n людей, за исключением того, что номер каждого уцелевшего удваивается и уменьшается на 1. Тем самым

$$J(2n) = 2J(n) - 1 \qquad \text{при } n \geqslant 1.$$

Вот в чем хитрость: $J(2n) = newNo(J(n))$, где $newNo(k) = 2k - 1$.

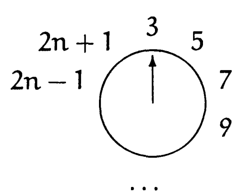
Теперь можно быстро продвигаться к большим n. Например, нам известно, что $J(10) = 5$, поэтому

$$J(20) = 2J(10) - 1 = 2\cdot5 - 1 = 9\,.$$

Аналогично, $J(40) = 17$, и вообще можно вывести, что $J(5\cdot2^m) = 2^{m+1} + 1$.

чет, нечет, почет, учет ...

Ну, а как насчет нечетного случая? Оказывается, что в случае $2n+1$ людей жертва с номером 1 уничтожается сразу после жертвы с номером $2n$, и мы остаемся с номерами



Опять получили почти первоначальную ситуацию с n людьми, но на этот раз номера уцелевших удваиваются и *увеличиваются* на 1. Таким образом,

$$J(2n+1) = 2J(n)+1 \qquad \text{при } n \geqslant 1.$$

Объединение этих уравнений с $J(1)=1$ дает рекуррентное соотношение, которое определяет J во всех случаях:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1\,, \\ J(2n) &= 2J(n)-1 \qquad \text{при } n \geqslant 1, \\ J(2n+1) &= 2J(n)+1 \qquad \text{при } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Вместо получения $J(n)$ из $J(n-1)$ это рекуррентное соотношение действует значительно более „эффективно“, поскольку оно каждый раз уменьшает величину n вдвое и более. Скажем, можно вычислить $J(1000000)$, применяя (1.8) только 19 раз. Но мы по-прежнему хотим найти выражение для $J(n)$ в замкнутой форме, поскольку оно будет более информативным и позволит вычислять решение еще быстрее. В конце концов, это ведь вопрос жизни или смерти.

Наше рекуррентное соотношение дает возможность очень быстро составить таблицу первых значений $J(n)$. Быть может, оно поможет нам так же быстро заметить закономерность и угадать ответ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Вот оно! Оказывается, если сгруппировать значения n по степеням 2 (в таблице эти группы отделены вертикальными линиями), то в каждой группе $J(n)$ всегда будет начинаться с 1, а затем увеличиваться на 2. Итак, если записать n в виде $n = 2^m + l$, где 2^m — наибольшая степень 2, не превосходящая n, а l — то, что остается, то решение нашего рекуррентного соотношения, по-видимому, должно быть таким:

$$J(2^m + l) = 2l + 1 \qquad \text{при } m \geqslant 0 \text{ и } 0 \leqslant l < 2^m. \tag{1.9}$$

(Заметим, что если $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, то остаток $l = n - 2^m$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant l < 2^{m+1} - 2^m = 2^m$.)

Теперь надо доказать (1.9). Как и прежде, мы будем использовать индукцию, но на этот раз — индукцию по m. При $m = 0$ имеем $l = 0$; таким образом, база для (1.9) сводится к равенству $J(1) = 1$, которое не вызывает сомнений. Индуктивный шаг состоит из двух частей в зависимости от того, четно или нечетно l. Если $m > 0$ и $2^m + l = 2n$, то l четно и

$$J(2^m + l) = 2J(2^{m-1} + l/2) - 1 = 2(2l/2 + 1) - 1 = 2l + 1$$

на основании (1.8) и индуктивного предположения; это как раз то, что нам надо. Аналогичное доказательство проходит и в нечетном случае, когда $2^m + l = 2n + 1$. Можно было бы также заметить, что из (1.8) следует соотношение

$$J(2n + 1) - J(2n) = 2.$$

В любом случае индукция выполнена и справедливость (1.9) установлена.

С целью иллюстрации решения (1.9), вычислим $J(100)$. В этом случае $100 = 2^6 + 36$, так что $J(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$.

Теперь, когда самое трудное позади (решена задача), осмотримся немного: решение всякой задачи может быть обобщено так, что его можно применить к более широкому кругу задач. Раз уж нами освоена некая техника, поучительно присмотреться к ней повнимательнее и выяснить, что еще можно получить с ее помощью. Поэтому в оставшейся части данного раздела мы изучим решение (1.9) и исследуем некоторые обобщения рекуррентного соотношения (1.8). Эти исследования выявят определенную структуру, которая лежит в основе всех таких задач.

Степени 2 играли важную роль в нашем поиске решения, так что естественно обратиться к двоичным представлениям величин n и $J(n)$. Допустим, что двоичные разложения величин n имеют вид

$$n = (b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0)_2\,;$$

т. е.

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2 + b_0\,,$$

где каждое b_i равно 0 или 1, причем старший бит b_m равен 1. Вспоминая, что $n = 2^m + l$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} n &= (1\, b_{m-1}\, b_{m-2} \ldots b_1\, b_0)_2\,, \\ l &= (0\, b_{m-1}\, b_{m-2} \ldots b_1\, b_0)_2\,, \\ 2l &= (b_{m-1}\, b_{m-2} \ldots b_1\, b_0\, 0)_2\,, \\ 2l + 1 &= (b_{m-1}\, b_{m-2} \ldots b_1\, b_0\, 1)_2\,, \\ J(n) &= (b_{m-1}\, b_{m-2} \ldots b_1\, b_0\, b_m)_2\,. \end{aligned}$$

(Последнее следует из того, что $J(n) = 2l + 1$ и $b_m = 1$.) Мы доказали, что

$$J\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0)_2\big) = (b_{m-1} \ldots b_1\, b_0\, b_m)_2\,, \qquad (1.10)$$

Но существует более простой путь! Ключевой момент состоит в том, что $J(2^m) = 1$ при всех m, а это немедленно вытекает из нашего первого уравнения

$$J(2n) = 2J(n) - 1.$$

Следовательно, мы знаем, что первый человек уцелеет, когда n является степенью 2. А в общем случае, когда $n = 2^m + l$, число людей сокращается до степени 2 после l исключений. Первый из оставшихся в этот момент — тот, кто останется в живых,— имеет номер $2l + 1$.

т. е., на программистском жаргоне, $J(n)$ получается путем циклического сдвига двоичного представления n влево на один бит! Мистика. Например, если $n = 100 = (1100100)_2$, то $J(n) = J\big((1100100)_2\big) = (1001001)_2$, что равно $64+8+1 = 73$. Если бы мы имели дело с двоичной записью с самого начала, то, вероятно, сразу же бы наткнулись на эту закономерность.

(„Итерация" означает применение функции к самой себе.)

Если мы начинаем с n и итерируем J-функцию $m+1$ раз, то тем самым осуществляем циклический сдвиг на $m+1$ битов; а поскольку n является $(m+1)$-битовым числом, мы могли бы рассчитывать в итоге снова получить n. Но это не совсем так. К примеру, если $n = 13$, то $J\big((1101)_2\big) = (1011)_2$, но затем $J\big((1011)_2\big) = (111)_2$ и процесс обрывается: когда 0 становится старшим битом — он пропадает. В действительности $J(n)$ всегда должно быть $\leqslant n$ по определению, ибо $J(n)$ есть номер уцелевшего; следовательно, если $J(n) < n$, мы никогда не сможем получить снова n в последующих итерациях.

Многократное применение J порождает последовательность убывающих значений, достигающих в конце концов „неподвижной точки" n, такой, что $J(n) = n$. Свойство циклического сдвига позволяет легко выяснить, что это будет за точка: итерирование функции m и более раз всегда будет порождать набор из одних единиц со значением $2^{\nu(n)} - 1$, где $\nu(n)$ — число равных 1 битов в двоичном представлении n. Так, поскольку $\nu(13) = 3$, имеем

$$\overbrace{J(J(\ldots J}^{\text{2 и более}}(13)\ldots)) = 2^3 - 1 = 7;$$

Более чем странно: если M — компактное n-мерное многообразие C^∞ $(n > 1)$, то существует дифференцируемое погружение M в $\mathbf{R}^{2n-\nu(n)}$, но необязательно в $\mathbf{R}^{2n-\nu(n)-1}$. Интересно, не занимался ли Иосиф топологией втайне от всех?

аналогично,

$$\overbrace{J(J(\ldots J}^{\text{8 и более}}((101101101101011)_2)\ldots)) = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Странно, но факт.

Давайте ненадолго вернемся к нашему первоначальному предположению, что $J(n) = n/2$ при четном n. Вообще-то это неверно, но теперь мы как раз в состоянии выяснить, когда это *верно*:

$$\begin{aligned} J(n) &= n/2\,,\\ 2l+1 &= (2^m+l)/2\,,\\ l &= \tfrac{1}{3}(2^m-2)\,. \end{aligned}$$

Если число $l = \frac{1}{3}(2^m - 2)$ целое, то $n = 2^m + l$ будет решением, поскольку l меньше, чем 2^m. Нетрудно убедиться, что $2^m - 2$ кратно 3, когда m нечетно, но не когда m четно. (Мы будем изучать подобные вещи в гл. 4.) Поэтому имеется бесконечно много

решений уравнения $J(n) = n/2$, и первые — такие:

m	l	$n = 2^m + l$	$J(n) = 2l + 1 = n/2$	n (двоичное)
1	0	2	1	10
3	2	10	5	1010
5	10	42	21	101010
7	42	170	85	10101010

Обратите внимание на крайний правый столбец. Это двоичные числа, циклический сдвиг которых на одну позицию влево дает тот же самый результат, что и обычный сдвиг на одну позицию вправо (деление пополам).

Отлично, мы достаточно основательно разобрались с функцией J; следующий этап — ее обобщение. Что бы случилось, если бы в нашей задаче возникла рекуррентность, схожая с (1.8), но с другими константами? Тогда мы вряд ли могли бы рассчитывать угадать решение, поскольку оно было бы воистину таинственным. Исследуем этот случай, введя константы α, β и γ, и попытаемся найти решение в замкнутой форме для более общего рекуррентного соотношения

Какая-то греческая грамота.

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha, \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta \qquad \text{при } n \geqslant 1, \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma \qquad \text{при } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

(В нашем первоначальном рекуррентном соотношении было $\alpha = 1$, $\beta = -1$ и $\gamma = 1$.) Начиная с $f(1) = \alpha$ и прибегая к ранее опробованному способу, можно составить следующую сводную таблицу для малых значений n:

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 3\beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$
7	$4\alpha + 3\gamma$
8	$8\alpha + 7\beta$
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$

(1.12)

Похоже, что коэффициенты при α равны наибольшим степеням 2, не превосходящим n. Кроме того, между последовательными степенями 2 коэффициенты при β уменьшаются на 1 вплоть до 0, а при γ увеличиваются на 1, начиная с 0. Поэтому, если выразить $f(n)$ в виде

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{1.13}$$

разделяя зависимость от α, β и γ, то, по-видимому,

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m\,, \\ B(n) &= 2^m - 1 - l\,, \\ C(n) &= l\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь, как обычно, $n = 2^m + l$ и $0 \leqslant l < 2^m$ при $n \geqslant 1$.

Подождите, впереди вас ждет новое угощение.

Нельзя сказать, что так уж трудно доказать (1.13) и (1.14) по индукции, но подобные действия бестолковы и малоценны. К счастью, существует лучший способ действия, если выбрать отдельные значения и затем скомбинировать их. Продемонстрируем этот способ на примере частного случая $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, когда функция $f(n)$ предполагается равной $A(n)$. Тогда (1.11) сводится к рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} A(1) &= 1\,, \\ A(2n) &= 2A(n) \qquad \text{при } n \geqslant 1, \\ A(2n+1) &= 2A(n) \qquad \text{при } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Достаточно ясно (доказывается индукцией по m), что $A(2^m + l) = 2^m$.

Тонкая мысль!

Затем воспользуемся рекуррентным соотношением (1.11) и решением (1.13) *в обратном порядке*, начав с простой функции $f(n)$ и выяснив, нет ли каких-нибудь определяющих ее констант (α, β, γ). Подстановка постоянной функции $f(n) = 1$ в (1.11) показывает, что

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 2\cdot 1 + \beta, \\ 1 &= 2\cdot 1 + \gamma, \end{aligned}$$

следовательно, значения $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$, удовлетворяющие этим уравнениям, дадут $A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1$. Подобным же образом можно подставить $f(n) = n$:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 2n &= 2\cdot n + \beta, \\ 2n+1 &= 2\cdot n + \gamma. \end{aligned}$$

Эти уравнения справедливы при всех n, когда $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\gamma = 1$, так что нет нужды доказывать по индукции, что при этих параметрах $f(n) = n$. Нам уже *известно*, что в таком случае $f(n) = n$ будет решением, поскольку рекуррентное соотношение (1.11) однозначно определяет $f(n)$ при каждом n.

И теперь, в сущности, блюдо готово! Мы показали, что функции $A(n)$, $B(n)$ и $C(n)$ из (1.13), которые определяют решение (1.11) в общем случае, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m\,, \qquad \text{где } n = 2^m + l \text{ и } 0 \leqslant l < 2^m, \\ A(n) - B(n) - C(n) &= 1\,, \\ A(n) + C(n) &= n\,. \end{aligned}$$

Наши предположения, сделанные в (1.14), подтверждаются немедленно, поскольку мы можем решить эти уравнения, получая $C(n) = n - A(n) = l$ и $B(n) = A(n) - 1 - C(n) = 2^m - 1 - l$.

Изложенный подход иллюстрирует исключительно полезный *репертуарный метод* решения рекуррентных уравнений. Сначала мы подбираем величины общих параметров, для которых мы знаем решение,— это обеспечивает нас репертуаром разрешимых частных решений. Затем, комбинируя частные решения, мы получаем общее решение. При этом необходимо столько независимых частных решений, сколько имеется независимых параметров (в нашем случае их было три — для α, β и γ). Другие примеры репертуарного подхода содержатся в упр. 16 и 20.

Внимание! Авторы рассчитывают на то, что читатель осознает идею метода из этого подробного примера, и не излагают его последовательно, „сверху вниз". Этот метод лучше всего работает с рекуррентными соотношениями, „линейными" в том смысле, что их решения могут быть выражены в виде суммы произвольных параметров, помноженных на некоторые функции от n, как в (1.13). В этом смысле уравнение (1.13) типично.

Мы знаем, что первоначальная J-рекуррентность имеет мистическое решение в двоичной записи:

$$J\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0)_2\big) = (b_{m-1} \ldots b_1\, b_0\, b_m)_2\,, \quad \text{где } b_m = 1.$$

А допускает ли обобщенная J-рекуррентность подобную мистику?

Конечно, почему же нет? Обобщенную рекуррентность (1.11) можно переписать как

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha\,, \\ f(2n+j) &= 2f(n) + \beta_j \qquad \text{при } j = 0,1 \quad \text{и} \quad n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{1.15}$$

если положить $\beta_0 = \beta$ и $\beta_1 = \gamma$. А эта рекуррентность развертывается, бит за битом:

$$\begin{aligned} f\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0)_2\big) &= 2f\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_1)_2\big) + \beta_{b_0} \\ &= 4f\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_2)_2\big) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &\;\;\vdots \\ &= 2^m f\big((b_m)_2\big) + 2^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= 2^m \alpha + 2^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0}\,. \end{aligned}$$

Предположим, что теперь мы расширили систему счисления с основанием 2, так что в ней допустимы произвольные цифры, а не только 0 и 1. Предыдущий вывод означает, что

$$f\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0)_2\big) = (\alpha\, \beta_{b_{m-1}}\, \beta_{b_{m-2}} \ldots \beta_{b_1}\, \beta_{b_0})_2\,. \tag{1.16}$$

Чудесно. Мы смогли бы заметить это обстоятельство гораздо раньше, если бы составили табл. (1.12) в ином виде:

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 2\beta + \beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + 2\gamma + \beta$
7	$4\alpha + 2\gamma + \gamma$

Мне кажется, до меня доходит: в двоичных представлениях $A(n)$, $B(n)$ и $C(n)$ единицы стоят на разных местах.

Например, при $n = 100 = (1100100)_2$ значения $\alpha = 1$, $\beta = -1$ и $\gamma = 1$ для исходной J-рекуррентности дают

$$\begin{array}{rccccccccc} n = & (1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\,)_2 & = & 100 \\ \hline f(n) = & (1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\,)_2 & & \\ = & +64 & +32 & -16 & -8 & +4 & -2 & -1 & = & 73, \end{array}$$

как и прежде. Свойство циклического сдвига сохраняется, поскольку каждый набор двоичных цифр $(1\,0\,\ldots\,0\,0)_2$ в данном представлении n преобразуется в

$$(1\,{-1}\,\ldots\,{-1}\,{-1})_2 = (0\,0\,\ldots\,0\,1)_2\,.$$

„Существуют два рода обобщений: один дешевый, другой ценный. Легче обобщить, разбавив маленькую идею большой болтовней. Приготовить очищенный и сгущенный экстракт из нескольких хороших составных частей значительно труднее.“ —Д. Пойа [242]

Итак, изменение системы счисления привело нас к компактному решению (1.16) обобщенной рекуррентности (1.15). Если нам, право, неймется — можно обобщить ее еще больше. Рекуррентность

$$\begin{aligned} f(j) &= \alpha_j && \text{при } 1 \leqslant j < d, \\ f(dn+j) &= cf(n) + \beta_j && \text{при } 0 \leqslant j < d \quad \text{и} \quad n \geqslant 1, \end{aligned} \qquad (1.17)$$

совпадает с предыдущей за одним исключением: мы начинаем с чисел по основанию d, а получаем значения по основанию c. То есть эта рекуррентность имеет решение с переменным основанием

$$f\big((b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0)_d\big) = (\alpha_{b_m}\, \beta_{b_{m-1}}\, \beta_{b_{m-2}} \ldots \beta_{b_1}\, \beta_{b_0})_c\,. \qquad (1.18)$$

Предположим, к примеру, что вследствие некоторого благоприятного стечения обстоятельств нами получено рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} f(1) &= 34\,, \\ f(2) &= 5\,, \\ f(3n) &= 10f(n) + 76 && \text{при } n \geqslant 1, \\ f(3n+1) &= 10f(n) - 2 && \text{при } n \geqslant 1, \\ f(3n+2) &= 10f(n) + 8 && \text{при } n \geqslant 1, \end{aligned}$$

Возможно, это было стечением неблагоприятных обстоятельств.

и, допустим, мы хотим вычислить $f(19)$. Здесь $d = 3$ и $c = 10$. Тогда $19 = (201)_3$, и решение по переменному основанию позволяет осуществить переход от основания 3 к основанию 10 цифра за цифрой. Так, старшая цифра 2 становится цифрой 5, а 0 и 1 становятся цифрами 76 и -2, образуя наш ответ:

$$f(19) = f\big((201)_3\big) = (5\;76\;{-2})_{10} = 1258\,,$$

Но, вообще-то, я против возврата войн.

Итак, Иосиф и иудейская война привели нас к довольно интересным обобщенным возвратным соотношениям.

Упражнения

Разминочные упражнения

Разминка во всех главах обязательна!
— Адм-ция

1 То, что все лошади одной масти, можно доказать индукцией по числу лошадей в определенном табуне. Вот так:

„Если существует только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции тривиальна. Для индуктивного перехода предположим, что существует n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n-1$ одинаковой масти, и, аналогично, лошади с номерами от 2 до n имеют одинаковую масть. Но лошади посредине с номерами от 2 до $n-1$ не могут изменять масть в зависимости от того, как они сгруппированы,— это лошади, а не хамелеоны. Поэтому в силу транзитивности лошади с номерами от 1 до n также должны быть одинаковой масти. Таким образом, все n лошадей одинаковой масти. ЧТД"

Есть ли ошибка в приведенном рассуждении и какая именно?

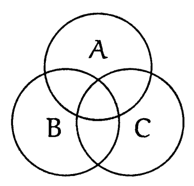
„Прежде чем решать задачу, подумай, что делать с ее решением."
— Д. Пойа [239, с. 208].*

2 Найдите кратчайшую последовательность перекладываний, перемещающих башню из n дисков с левого колышка A на правый колышек B, если прямой обмен дисками между A и B запрещен. (Каждое перекладывание должно производиться через средний колышек. Как обычно, больший диск нельзя класть на меньший.)

3 Покажите, что в процессе перемещения башни при ограничениях из предыдущего упражнения нам встретятся все допустимые варианты размещения n дисков на трех колышках.

4 Имеются ли какие-нибудь начальная и конечная конфигурации из n дисков на трех колышках, которые требуют более чем $2^n - 1$ перекладываний, чтобы получить одну из другой по исходным правилам Люка?

5 Так называемая „диаграмма Венна" с тремя пересекающимися окружностями часто приводится для иллюстрации восьми возможных подмножеств, связанных с тремя заданными множествами:



Можно ли проиллюстрировать четырьмя пересекающимися окружностями шестнадцать возможностей, которые возникают в связи с четырьмя заданными множествами?

6 Некоторые из областей, очерчиваемых n прямыми на плоскости, бесконечны, в то время как другие конечны. Каково максимально возможное число конечных областей?

7 Пусть $H(n) = J(n+1) - J(n)$. В силу уравнения (1.8) $H(2n) = 2$, а $H(2n+1) = J(2n+2) - J(2n+1) = \bigl(2J(n+1)-1\bigr) - \bigl(2J(n)+1\bigr) = 2H(n) - 2$ при всех $n \geqslant 1$. Поэтому представляется возможным доказать индукцией по n, что $H(n) = 2$ при всех n. Что здесь неверно?

Домашние задания

8 Решите рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} Q_0 &= \alpha, \qquad Q_1 = \beta, \\ Q_n &= (1 + Q_{n-1})/Q_{n-2} \qquad \text{при } n > 1. \end{aligned}$$

Примите, что $Q_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 0$. *Указание:* $Q_4 = (1+\alpha)/\beta$.

... то есть лошадь уже иной масти.

9 Иногда возможно использование „обратной индукции", т. е. доказательства от n к $n-1$, а не наоборот! К примеру, рассмотрим утверждение

$$P(n): \quad x_1 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \quad \text{если } x_1, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

Оно справедливо для $n = 2$, так как $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$.

a Полагая $x_n = (x_1 + \cdots + x_{n-1})/(n-1)$, докажите, что $P(n)$ влечет $P(n-1)$ при всяком $n > 1$.
b Покажите, что $P(n)$ и $P(2)$ влекут $P(2n)$.
c Объясните, почему отсюда следует справедливость $P(n)$ при всех n.

10 Пусть Q_n — минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения башни из n дисков с колышка A на колышек B, если все перекладывания осуществляются *по часовой стрелке* — т. е. с A на B, или с B на другой колышек, или с другого колышка на A. Кроме того, пусть R_n — минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения башни с B обратно на A при том же ограничении. Докажите, что

$$Q_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 2R_{n-1} + 1, & \text{если } n > 0; \end{cases}$$
$$R_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ Q_n + Q_{n-1} + 1, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

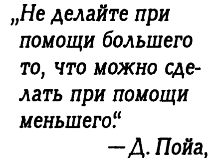
(Нет необходимости решать эти рекуррентные соотношения — как это делается, мы увидим в гл. 7.)

11 Двойная ханойская башня состоит из $2n$ дисков n различных размеров — по два диска каждого размера. Как и в случае обычной башни, за один раз разрешается перекладывать только один диск и нельзя класть больший диск на меньший.

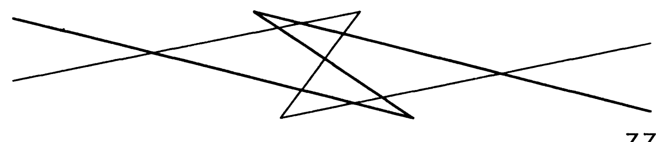
a Сколько перекладываний необходимо для перемещения двойной башни с одного колышка на другой, если диски одинаковых размеров неотличимы друг от друга?

b Что если в окончательном расположении дисков требуется воспроизвести исходный порядок всех одинаковых дисков сверху донизу? [*Указание:* это трудно — на самом деле это „конкурсная задача".]

12 Давайте еще обобщим упр. 11a, предполагая, что имеется n различных размеров дисков и ровно m_k дисков размера k. Определите наименьшее число $A(m_1, \ldots, m_n)$ перекладываний дисков, необходимых для перемещения такой башни, если считать диски одинаковых размеров неразличимыми.


„Не делайте при помощи большего то, что можно сделать при помощи меньшего."
— Д. Пойа, [240, с. 277].*

13 На какое максимально возможное число областей плоскость делится n зигзагообразными линиями,



$ZZ_2 = 12$

каждая из которых состоит из двух параллельных полубесконечных прямых, соединенных прямолинейным отрезком?

14 На сколько частей можно разделить головку сыра с помощью пяти плоских разрезов? (Головка сыра должна оставаться в исходном положении, пока вы ее режете, и каждому разрезу должна соответствовать некоторая плоскость в трехмерном пространстве.) Найдите рекуррентное соотношение для P_n — максимального числа трехмерных областей, на которое может быть разбито пространство n произвольно расположенными плоскостями.

Ну-ну... Желаем успеха в этом деле!

15 У Иосифа был друг, которого он спас, поставив на предпоследнее спасительное место. Чему равен $I(n)$ — номер предпоследнего выжившего, если экзекуции подлежит каждый второй?

16 Примените репертуарный метод для решения обобщенного рекуррентного соотношения с четырьмя параметрами

$$g(1) = \alpha\,,$$
$$g(2n+j) = 3g(n) + \gamma n + \beta_j \qquad \text{при } j = 0, 1 \quad \text{и} \quad n \geqslant 1.$$

Указание: попробуйте функцию $g(n) = n$.

Контрольные работы

17 Обозначим через W_n наименьшее число перекладываний, необходимых для перемещения башни из n дисков с одного колышка на другой, когда имеется не три, а четыре колышка. Покажите, что

$$W_{n(n+1)/2} \leqslant 2W_{n(n-1)/2} + T_n \qquad \text{при } n > 0.$$

(Здесь $T_n = 2^n - 1$ — число перекладываний в обычном случае трех колышков.) Воспользуйтесь этим для нахождения выражения $f(n)$, такого, что $W_{n(n+1)/2} \leqslant f(n)$ при всех $n \geqslant 0$.

18 Покажите, что следующая совокупность n ломаных линий делит плоскость на Z_n областей, где Z_n определено в (1.7): каждая j-я ломаная при $1 \leqslant j \leqslant n$ имеет излом в точке $(n^{2j}, 0)$ и проходит через точки $(n^{2j} - n^j, 1)$ и $(n^{2j} - n^j - n^{-n}, 1)$.

19 Могут ли n ломаных линий разделить плоскость на Z_n областей, когда угол каждого излома составляет $30°$?

20 Примените репертуарный метод решения обобщенной рекуррентности с пятью параметрами

Это что-то вроде пятизвездного метода?

$$h(1) = \alpha,$$
$$h(2n + j) = 4h(n) + \gamma_j n + \beta_j \qquad \text{при } j = 0, 1 \quad \text{и} \quad n \geqslant 1.$$

Указание: попробуйте функции $h(n) = n$ и $h(n) = n^2$.

21 Допустим, что в круг поставлено $2n$ человек, первые n из которых — „славные ребята“, а n последних — „гадкие парни“. Покажите, что всегда найдется целое m (зависящее от n), такое, что если, двигаясь по кругу, мы наказываем каждого m-го, то первыми будут наказаны все гадкие парни. (К примеру, при $n = 3$ можно взять $m = 5$, а при $n = 4$ взять $m = 30$.)

Конкурсные задачи

22 Покажите, что используя n выпуклых многоугольников, которые конгруэнтны друг другу и повернуты относительно общего центра, можно построить диаграмму Венна для 2^n всевозможных подмножеств n заданных множеств.

23 Допустим, что Иосиф занимает конкретное j-е место, но при этом имеет возможность назвать роковой параметр q, после чего уничтожается каждый q-й человек. Всегда ли он сможет спастись?

Исследовательские проблемы

24 Найдите все рекуррентные соотношения вида

$$X_n = \frac{a_0 + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_k X_{n-k}}{b_1 X_{n-1} + \cdots + b_k X_{n-k}},$$

решения которых периодичны.

25 Решите задачу о ханойской башне с четырьмя колышками и в бесконечном числе случаев, доказав, что в соотношении из упр. 17 имеет место равенство.

26 Обобщая упр. 23, будем называть *иосифовым подмножеством* множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое множество из k номеров, что при некотором q первыми будут уничтожены люди с остальными $n - k$ номерами. (На этих k местах находятся „славные ребята", которых хочет спасти Иосиф.) Оказывается, что при $n = 9$, три из 2^9 возможных подмножеств являются неиосифовыми, а именно, подмножества $\{1, 2, 5, 8, 9\}$, $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ и $\{2, 5, 6, 7, 8\}$. Когда $n = 12$, то 13 подмножеств являются неиосифовыми, а при любом другом $n \leqslant 12$ нет ни одного неиосифова. Редки ли неиосифовы подмножества при больших n?

Да, поздравляем, если вы их найдете.

2

Исчисление сумм

СУММЫ ВЕЗДЕСУЩИ в математике, поэтому нам потребуются основные приемы обращения с ними. Эта глава знакомит с теми обозначениями и методами, которые помогут освоиться с суммированием.

2.1 ОБОЗНАЧЕНИЯ СУММ

В гл. 1 мы уже сталкивались с суммой первых n натуральных чисел, которую старательно выписывали как $1+2+3+\cdots+(n-1)+n$. Многоточие '$\cdots$' в таких формулах указывает на то, что пропущенное нужно восполнить по аналогии с соседними членами суммы. Разумеется, мы должны остерегаться сумм типа $1+7+\cdots+41.7$, которые не что иное, как вопиющая бессмыслица. С другой стороны, включение членов 3 и $(n-1)$ было излишней роскошью — достаточно было бы написать $1+2+\cdots+n$. Крайне самоуверенные ограничились бы даже записью $1+\cdots+n$.

Мы будем иметь дело с суммами общего вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \tag{2.1}$$

где каждое a_k — определенное каким-то образом число. Такое обозначение имеет то преимущество, что при наличии достаточно богатого воображения можно „представить" себе всю сумму целиком, почти так, как если бы она была выписана полностью.

Членом почетным и по нечетным тоже.

Каждый элемент a_k такой суммы называется ее *членом*. Зачастую эти члены определяются косвенно, в виде формул, следуя некоторому легко просматривающемуся правилу, а в ряде случаев приходится записывать суммы в развернутом виде с тем, чтобы стал понятен их смысл. Например, если предполагается, что формула

$$1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$$

должна обозначать сумму из n, а не из 2^{n-1} членов, то ее следует записать более аккуратно как

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Хотя обозначение с использованием '$\cdots$' широко распространено, оно излишне громоздко и может вызывать разночтения. Используются и другие способы записи суммы, особенно форма записи с явными пределами

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \,, \qquad (2.2)$$

„Le signe $\sum_{i=1}^{i=\infty}$ indique que l'on doit donner au nombre entier i toutes ses valeurs 1, 2, 3, ..., et prendre la somme des termes."
— *Ж. Фурье [324]*

которая называется сигма-обозначением, поскольку здесь фигурирует греческая буква $\sum$ (прописная сигма). Это обозначение говорит, что включать в сумму надо именно те члены a_k, номер k которых является целым числом, лежащим между нижней и верхней границами 1 и n включительно. Это произносится как „сумма по k от 1 до n". Это $\sum$-обозначение ввел Жозеф Фурье в 1820 г., и оно вскоре покорило математический мир.

Граффити на иностранных языках способствуют воспитанию полиглотов.
— *Ред.*

Кстати, величина после знака $\sum$ (в данном случае a_k) называется *общим членом.*

Говорят, что переменный индекс k *связан* знаком $\sum$ в (2.2), поскольку k в a_k не имеет отношения к тем k, которые появляются за рамками сигма-обозначения. В частности, любая другая буква могла бы заменить k без изменения смысла (2.2). Часто используется буква i (возможно потому, что с нее начинается слово „index"), но мы будем, как правило, суммировать по k, поскольку разумно сохранить i за $\sqrt{-1}$.

Ну, я бы не хотел заменять переменный индекс k на a или n — эти буквы являются „свободными переменными", имеющими самостоятельное значение за рамками этой $\sum$.

Оказывается, что еще более полезным, чем форма записи с явными пределами, является обобщенное сигма-обозначение: мы просто записываем одно или несколько условий под знаком $\sum$, задавая тем самым множество значений индекса, по которым следует проводить суммирование. Например, суммы (2.1) и (2.2) можно записать иначе как

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \,. \qquad (2.3)$$

Хотя в этом отвлеченном примере и не видно существенного различия между новым обозначением и обозначением (2.2), обобщенное обозначение позволяет „брать" суммы по множествам значений индекса, не ограниченным последовательными целыми числами. К примеру, сумму квадратов всех нечетных положительных чисел, меньших 100, можно выразить таким образом:

$$\sum_{\substack{1\leqslant k<100\\ k\ \text{нечетно}}} k^2 \,.$$

Аналог этой суммы с явными пределами

$$\sum_{k=0}^{49} (2k+1)^2$$

более громоздок и менее нагляден. Аналогично, сумма обратных всем простым числам между 1 и N есть

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\ \text{простое}}} \frac{1}{p};$$

в случае формы записи с явными пределами потребовалось бы написать

$$\sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k},$$

где p_k означает k-е простое число, а $\pi(N)$ — количество простых чисел, не превосходящих N. (Между прочим, эта сумма дает приблизительно среднее число простых делителей „случайного" целого числа, близкого к N, поскольку около $1/p$ этих целых чисел делятся на p. При большом N она примерно равна $\ln\ln N + M$, где $M \approx 0.2614972128476427837554268386086958590515666$ — константа Мертенса [220], $\ln x$ означает натуральный логарифм x, а $\ln\ln x$ означает $\ln(\ln x)$.)

Знак суммы похож на сгорбившегося грузчика.

Но самым большим преимуществом обобщенного сигма-обозначения является то, что с ним обращаться гораздо легче, чем с формой записи с явными пределами. Предположим, например, что нам захотелось заменить переменный индекс k на $k+1$. В случае обобщенной формы записи мы имеем

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n} a_{k+1};$$

легко сообразить, что происходит, и мы производим подстановку почти без всяких раздумий. А в случае обозначения с явными пределами получаем

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1};$$

в этом случае труднее понять, что стряслось, и больше шансов совершить оплошность.

Кругленькая сумма...

Тем не менее, форма записи с явными пределами не является совершенно бесполéзной. Она имеет округлые, привлекательные формы и быстро пишется, ибо сумма (2.2) состоит из семи символов, в сравнении с восемью, требуемыми для суммы (2.3). Поэтому мы будем зачастую использовать $\sum$ с пределами при формулировке задачи или представлении результата, но предпочтем иметь дело с соотношениями-под-$\sum$ при действиях с суммой, которые требуют преобразования переменной суммирования.

Это еще что... А вы бы подсчитали, сколько Σ в „Илиаде".

Знак $\sum$ встречается в этой книге более 1000 раз, поэтому надо бы убедиться в том, что мы наверняка знаем, что он означает.

Формально

$$\sum_{P(k)} a_k \qquad (2.4)$$

представляет собой сокращенную запись суммы всех членов a_k, таких, что целое k удовлетворяет заданному условию $P(k)$. („Условие $P(k)$“ — это некоторое утверждение относительно k, которое может быть либо истинным, либо ложным.) Пока допустим, что $a_k \neq 0$ лишь для конечного числа k, удовлетворяющих условию $P(k)$; в противном случае будет складываться бесконечное число ненулевых членов, и тогда придется несколько исхитриться. Другая крайность: когда $P(k)$ ложно для всех целых k, мы получаем „пустую“ сумму — пустая сумма по определению равна нулю.

Если знак суммы появляется в тексте, а не в выделенной формуле, то используется слегка измененная форма записи (2.4): мы пишем '$\sum_{P(k)} a_k$', придавая условию $P(k)$ вид нижнего индекса при $\sum$, для того чтобы формула не слишком выходила за пределы строки. Аналогично, '$\sum_{k=1}^{n} a_k$' представляет собой удобный вариант записи (2.2), если мы хотим уместить данное обозначение в одну строку.

Зачастую соблазнительна запись

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k) \qquad \text{вместо} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k),$$

поскольку при $k = 0$, 1 и n соответствующие члены этой суммы равны нулю — разве не разумнее сложить $n-2$ члена вместо $n+1$ членов? Но не надо поддаваться таким соблазнам: разумность в смысле вычисления и разумность в смысле понимания — это не одно и то же! В дальнейшем мы обнаружим, что как можно более простые верхние и нижние границы индекса суммирования имеют то преимущество, что при простых границах гораздо проще обращаться с суммами. Более того, обозначение типа $\sum_{k=2}^{n-1}$ может даже приводить к опасной двусмысленности, поскольку не совсем ясен его смысл при $n = 0$ или $n = 1$ (см. упр. 1). Нулевые члены безопасны и часто избавляют от ненужных хлопот.

Обозначения, которые мы обсуждали до сих пор, являются общепринятыми, но сейчас мы собираемся решительно отступить от сложившейся традиции. Кеннет Айверсон в своем языке программирования АПЛ [4, с. 11, см. также 152], внес замечательную идею, которая, как будет видно, существенно упрощает многое из того, что мы собираемся проделать в этой книге. Его идея состоит в том, чтобы просто заключать истинное-или-ложное утверждение в квадратные скобки и считать при этом, что результат равен 1, если данное утверждение истинно, и 0, если данное утверждение ложно. Например,

$$[p \text{ простое}] = \begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ — простое число,} \\ 0, & \text{если } p \text{ — не простое число.} \end{cases}$$

Вот это да! „Дельта Кронекера“, которая встречалась мне в других книгах (я имею в виду δ_{kn}, равную 1, если $k = n$, и 0 — в противном случае), всего лишь частный случай нотации Айверсона — вместо нее можно писать $[k = n]$.

Нотация Айверсона позволяет выражать суммы без каких бы то ни было ограничений на индекс суммирования, поскольку сумму (2.4) можно переписать в виде

$$\sum_k a_k\big[P(k)\big]\,. \qquad (2.5)$$

Если $P(k)$ ложно, то член $a_k\big[P(k)\big]$ равен нулю, так что можно спокойно включать его в состав суммируемых членов. Это упрощает манипулирование с индексом суммирования, ибо нет нужды беспокоиться о граничных условиях.

„Я часто удивляюсь новым, важным приложениям [этого обозначения]“. — Б. де Финетти [313]

Необходимо только отметить одну техническую деталь: иногда a_k бывает определено не для всех целых k. Это затруднение можно обойти, допуская, что $\big[P(k)\big]$ является „очень сильно нулевым“, когда $P(k)$ ложно,— оно настолько нулевое, что делает $a_k\big[P(k)\big]$ равным нулю, даже когда a_k не определено. Например, если воспользоваться нотацией Айверсона для записи суммы чисел, обратных простым $\leqslant N$, в виде

$$\sum_p [p \text{ простое}][p \leqslant N]/p\,,$$

то при p, равном нулю, проблем с делением на нуль не возникает, потому что наше допущение позволяет считать, что $[0 \text{ простое}][0 \leqslant N]/0 = 0$.

Давайте теперь подытожим то, что обсуждалось до сих пор в отношении сумм. Имеются два заслуживающих внимания способа записи суммы членов: в одном случае используется '$\cdots$', в другом — '$\sum$'. Запись с многоточием часто подсказывает полезные преобразования (в частности, группировку смежных членов), поскольку, когда вся сумма маячит у нас перед глазами, мы можем уловить упрощающую ее закономерность. Однако обилие добра сродни пороку. Сигма-обозначение компактно, впечатляет родных и близких и зачастую подсказывает преобразования, которые не столь очевидны в случае записи с многоточием. При работе с сигма-обозначением нулевые члены совсем не мешают — напротив, они часто облегчают $\sum$-операцию.

... и уменьшает шансы получить плохую отметку на экзамене за „недостаточную строгость“.

2.2 СУММЫ И РЕКУРРЕНТНОСТИ

Итак, мы разобрались, как выражать суммы с помощью того или иного причудливого обозначения. Но как надо действовать для нахождения значения той или иной суммы? Один из способов — заметить, что существует тесная связь между суммами и рекуррентностями. Сумма

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

эквивалентна рекуррентности

$$S_0 = a_0;$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n \qquad \text{при } n > 0. \tag{2.6}$$

(Считайте, что S_n — не просто отдельное число, а их последовательность, определенная для всех $n \geqslant 0$.)

Следовательно, можно вычислять суммы в замкнутой форме, используя для этого методы решения рекуррентных соотношений в замкнутой форме, которые изучались в гл. 1.

К примеру, если a_n есть некая постоянная плюс некое кратное n, то сигма-рекуррентность (2.6) приобретает следующий общий вид:

$$R_0 = \alpha;$$
$$R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n \qquad \text{при } n > 0. \tag{2.7}$$

Действуя так же, как в гл. 1, мы находим, что $R_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $R_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$ и т. д., а вообще искомое решение может быть записано в виде

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{2.8}$$

где $A(n)$, $B(n)$ и $C(n)$ — коэффициенты при основных параметрах α, β, и γ.

Репертуарный метод подсказывает попробовать подставить вместо R_n простые функции от n в надежде найти такие постоянные параметры α, β и γ, при которых решение особенно просто. Подстановка $R_n = 1$ дает $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, откуда

$$A(n) = 1.$$

Подстановка $R_n = n$ дает $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, откуда

$$B(n) = n.$$

А подстановка $R_n = n^2$ дает $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$, откуда

$$2C(n) - B(n) = n^2,$$

и мы получаем $C(n) = (n^2 + n)/2$. Просто как дважды два.

Еще проще: $2 \times 2 = \dfrac{\pi}{\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}}$

Итак, если мы хотим вычислить сумму

$$\sum_{k=0}^{n} (a + bk),$$

то сигма-рекуррентность (2.6) сводится к (2.7) с $\alpha = \beta = a$, $\gamma = b$, и ответом будет $aA(n) + aB(n) + bC(n) = a(n+1) + b(n+1)n/2$.

И обратно, многие рекуррентности могут быть сведены к суммам; в силу этого специальные методы вычисления сумм, которые мы изучим позже в этой главе, будут полезны и при решении рекуррентных соотношений, справиться с которыми иначе было бы трудно. Подходящий пример — рекуррентность, связанная с задачей о ханойской башне:

$$T_0 = 0;$$
$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \qquad \text{при } n > 0.$$

Ее можно привести к частному случаю (2.6), если поделить обе части на 2^n:

$$T_0/2^0 = 0;$$
$$T_n/2^n = T_{n-1}/2^{n-1} + 1/2^n \qquad \text{при } n > 0.$$

Теперь можно положить $S_n = T_n/2^n$, получая

$$S_0 = 0;$$
$$S_n = S_{n-1} + 2^{-n} \qquad \text{при } n > 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$$

(Обратите внимание, что член с $k = 0$ не включен в эту сумму.) Сумма геометрической прогрессии $2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} = (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^n$ будет выведена в этой главе позднее — она окажется равной $1 - (\frac{1}{2})^n$. Следовательно, $T_n = 2^n S_n = 2^n - 1$.

В этом выводе мы перешли от T_n к S_n, заметив, что исходное рекуррентное соотношение можно было поделить на 2^n. Эта уловка — частный случай общего метода, с помощью которого фактически любую рекуррентность вида

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n \tag{2.9}$$

можно свести к сумме. Суть данного метода состоит в том, чтобы домножить обе части на *суммирующий множитель* s_n:

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n\,.$$

При этом множитель s_n подбирается столь искусно, чтобы сделать $s_n b_n$ равным $s_{n-1} a_{n-1}$. А теперь, если положить $S_n = s_n a_n T_n$, то получим сигма-рекуррентность

$$S_n = S_{n-1} + s_n c_n\,.$$

Следовательно,

$$S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k = s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\,,$$

и решением исходной рекуррентности (2.9) является

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\Bigl(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\Bigr)\,. \tag{2.10}$$

(Величина s_1 сокращается, так что она может быть чем угодно, кроме нуля.)

Например, при $n = 1$ мы получаем $T_1 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1)/s_1 a_1 = (b_1 T_0 + c_1)/a_1$.

Но хватит ли нам сообразительности, чтобы найти требуемое s_n? Нет проблем: достаточно развернуть соотношение $s_n =$

$s_{n-1}a_{n-1}/b_n$, чтобы выяснить, что искомым суммирующим множителем является дробь

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_n b_{n-1}\ldots b_2} \qquad (2.11)$$

или любое подходящее кратное этой величины. В частности, для рекуррентности, связанной с задачей о ханойской башне, $a_n = 1$ и $b_n = 2$; общий метод, который мы только что вывели, утверждает, что $s_n = 2^{-n}$ является подходящим кандидатом на роль множителя, если мы хотим свести рекуррентность к сумме. Для того чтобы обнаружить сей множитель, не нужно искры вдохновения.

Как всегда, надо соблюдать осторожность, чтобы не поделить на нуль. Метод суммирующего множителя срабатывает всегда, когда все a и все b не равны нулю.

Применим эти соотношения к рекуррентности, которая возникает в связи с анализом „быстрой сортировки" — одного из наиболее популярных методов внутренней сортировки данных в компьютере. Среднее число выполняемых „быстрой сортировкой" шагов сравнения, когда она применяется к n элементам данных, расположенным в случайном порядке, удовлетворяет рекуррентному соотношению

(„Быстрая сортировка" была придумана Хоаром в 1962 г. [339].)

$$\begin{aligned} C_0 &= 0; \\ C_n &= n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \qquad \text{при } n > 0. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

М-да... Это выглядит гораздо страшнее, чем встречавшиеся до сих пор рекуррентности: сюда входит сумма всех предыдущих величин, да еще деление на n. Попытка вычислить несколько первых значений даст нам кое-какую информацию ($C_1 = 2$, $C_2 = 5$, $C_3 = \frac{26}{3}$), но не избавит от чувства страха.

Однако сложность соотношения (2.12) можно снижать постепенно, сперва избавившись от деления, а затем — от знака $\sum$. Реализуя эту идею, домножим обе части рекуррентности на n, получив соотношение

$$nC_n = n^2 + n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k \qquad \text{при } n > 0;$$

а если заменим n на $n-1$, то

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \qquad \text{при } n - 1 > 0.$$

Теперь можно вычесть второе равенство из первого, и знак $\sum$ пропадает:

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1} \qquad \text{при } n > 1.$$

Между прочим, это соотношение справедливо и при $n = 1$, поскольку $C_1 = 2$. Итак, исходное рекуррентное соотношение для C_n сводится к гораздо более простому:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0\,; \\ nC_n &= (n+1)C_{n-1} + 2n \qquad \text{при } n > 0\,. \end{aligned}$$

Явный прогресс. Теперь мы в состоянии подключить к делу суммирующий множитель, поскольку полученное рекуррентное соотношение имеет вид (2.9) с $a_n = n$, $b_n = n+1$ и $c_n = 2n$. Общий метод, изложенный на предыдущей странице, подсказывает нам, что нужно домножить все рекуррентное соотношение на нечто, кратное величине

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_n b_{n-1}\ldots b_2} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot 3} = \frac{2}{(n+1)n}\,.$$

Мы начинали с $\sum$ в рекуррентности и основательно потрудились, чтобы избавиться от нее. Но затем после применения суммирующего множителя мы пришли к другой $\sum$. Так что же, суммы — это хорошо, или плохо, или как?

Тогда, согласно (2.10), решением является

$$C_n = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\,.$$

Оставшаяся сумма очень похожа на величину, которая часто возникает в приложениях. В действительности она возникает столь часто, что заслуживает специального названия и специального обозначения:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,. \tag{2.13}$$

Буква H происходит от слова „harmonic", так что H_n — это *гармоническое число.* Оно названо так потому, что k-я гармоника, извлекаемая из скрипичной струны,— это основной тон, производимый струной длиной $1/k$ от длины исходной струны.

Изучение „быстрой сортировки" — рекуррентности (2.12) — можно завершить приведением C_n к замкнутому виду, если мы сможем выразить C_n через H_n. Сумма в нашей формуле для C_n есть

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k+1}\,.$$

Ее можно без особого труда связать с суммой H_n, заменив k на $k-1$ и изменив граничные условия:

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k+1} &= \sum_{1\leqslant k-1\leqslant n}\frac{1}{k} = \sum_{2\leqslant k\leqslant n+1}\frac{1}{k} \\ &= \Bigl(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k}\Bigr) - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} = H_n - \frac{n}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Польный порядок! Найдена сумма, необходимая для завершения решения (2.12): среднее число выполняемых „быстрой сортировкой“ сравнений, когда она применяется к n случайно расположенным элементам данных, есть

А с правописанием польный беспорядок.

$$C_n = 2(n+1)H_n - 2n. \qquad (2.14)$$

И, как водится, убедимся в правильности первых значений: $C_0 = 0$, $C_1 = 2$, $C_2 = 5$.

2.3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММ

В какую валюту?

Ключ к успеху при суммировании лежит в нашей способности преобразовывать одну сумму в другую — либо упрощающую исходную, либо приближающую нас к цели. А выучив несколько основных правил преобразования и поупражнявшись в их применении, можно легко овладеть такой способностью.

Пусть K — некоторое конечное множество целых чисел. Суммы по элементам из K можно преобразовывать, исходя из трех простых правил:

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k \quad \text{(распределительный закон)}, \qquad (2.15)$$

$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k \quad \text{(сочетательный закон)}, \qquad (2.16)$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)} \quad \text{(переместительный закон)}. \qquad (2.17)$$

Распределительный закон разрешает вводить и выводить постоянные под знак и за знак $\sum$. Сочетательный закон позволяет разбивать одну сумму на две или объединять две суммы в одну. Переместительный закон гласит, что члены суммы можно переставлять в любом требуемом порядке; здесь $p(k)$ — некоторая перестановка множества всех целых чисел. Например, если $K = \{-1, 0, +1\}$ и если $p(k) = -k$, то три этих закона утверждают соответственно, что

Почему бы тогда не назвать его перестановочным вместо переместительного?

$$ca_{-1} + ca_0 + ca_1 = c(a_{-1} + a_0 + a_1) \quad \text{(распределительный закон)},$$

$$(a_{-1}+b_{-1}) + (a_0+b_0) + (a_1+b_1) = (a_{-1}+a_0+a_1) + (b_{-1}+b_0+b_1) \quad \text{(сочетательный закон)},$$

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_0 + a_{-1} \quad \text{(переместительный закон)}.$$

Уловку Гаусса из гл. 1 можно рассматривать как одно из применений этих трех основных законов. Предположим, мы хотим

вычислить сумму *арифметической прогрессии* общего вида

$$S = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (a+bk)\,.$$

Это нечто вроде замены переменных в интеграле, но попроще.

Согласно переместительному закону, заменив k на $n-k$, получим

$$S = \sum_{0\leqslant n-k\leqslant n} \bigl(a+b(n-k)\bigr) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (a+bn-bk)\,.$$

Два этих уравнения можно сложить, используя сочетательный закон:

$$2S = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \bigl((a+bk)+(a+bn-bk)\bigr) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (2a+bn)\,.$$

А теперь применим распределительный закон и вычислим тривиальную сумму:

„Сколько будет один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один?“ „Не знаю“, ответила Алиса. „Я сбилась со счета.“ „Она не умеет складывать.“ — Льюис Кэррол [174]

$$2S = (2a+bn)\sum_{0\leqslant k\leqslant n} 1 = (2a+bn)(n+1)\,.$$

Разделив на 2, выясняем, что

$$\sum_{k=0}^{n}(a+bk) = (a+\tfrac{1}{2}bn)(n+1)\,. \qquad (2.18)$$

Правую часть можно запомнить как среднее первого и последнего членов, а именно как $\frac{1}{2}\bigl(a+(a+bn)\bigr)$, помноженное на число членов, т. е. на $(n+1)$.

Важно иметь в виду, что функция $p(k)$ в общей форме переместительного закона (2.17) считается перестановкой всех целых чисел. Другими словами, для каждого целого n должно существовать в точности одно целое k, такое, что $p(k)=n$. В противном случае переместительный закон может и не выполняться — упр. 3 тому наглядный пример. Преобразования типа $p(k)=k+c$ или $p(k)=c-k$, где c — целая константа, всегда представляют собой перестановки, поэтому с ними все в порядке.

Впрочем, можно слегка ослабить ограничение на перестановку: достаточно всего лишь, чтобы существовало в точности одно целое k, такое, что $p(k)=n$, когда n — элемент индексного множества K. Если $n\notin K$ (т. е. если n не принадлежит K), то не существенно, как часто имеет место равенство $p(k)=n$, поскольку подобное k не участвует в сумме. Так, к примеру, можно утверждать, что

$$\sum_{\substack{k\in K\\ k\ \text{четное}}} a_k = \sum_{\substack{n\in K\\ n\ \text{четное}}} a_n = \sum_{\substack{2k\in K\\ 2k\ \text{четное}}} a_{2k} = \sum_{2k\in K} a_{2k}\,, \qquad (2.19)$$

ибо имеется в точности одно k, такое, что $2k=n$, когда $n\in K$ и n — четное.

Нотация Айверсона, позволяющая получать 0 или 1 в качестве значений логических выражений внутри некоторой формулы, может быть использована вкупе с распределительным, сочетательным и переместительным законами для выявления дополнительных свойств сумм. Вот, к примеру, важное правило объединения различных множеств индексов: если K и K′ — некоторые множества целых чисел, то

В купе?

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k + \sum_{k\in K\cup K'} a_k . \qquad (2.20)$$

Это вытекает из общих формул

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k} a_k\,[k\in K] \qquad (2.21)$$

и

$$[k\in K]+[k\in K'] = [k\in K\cap K']+[k\in K\cup K'] . \qquad (2.22)$$

Обычно используется правило (2.20) либо для объединения двух почти непересекающихся индексных множеств, как в случае

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{при } 1\leqslant m\leqslant n ,$$

либо для выделения отдельного члена суммы, как в случае

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k = a_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \qquad \text{при } n\geqslant 0. \qquad (2.23)$$

(Здесь правая и левая части равенства (2.20) поменялись местами.)

Подобная операция выделения члена составляет основу *метода приведения*, зачастую позволяющего вычислить ту или иную сумму в замкнутой форме. Суть этого метода заключается в том, чтобы начать с подлежащей вычислению суммы и обозначить ее S_n:

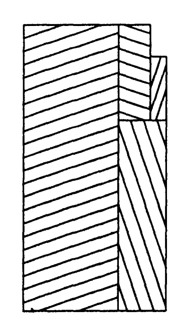
$$S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k .$$

(Обозначай и властвуй.) Затем мы переписываем S_{n+1} двумя способами, выделяя как последний, так и первый члены:

$$\begin{aligned} S_n + a_{n+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} a_k &= a_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} a_k \\ &= a_0 + \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n+1} a_{k+1} \\ &= a_0 + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_{k+1} . \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Теперь можно заняться последней суммой и попытаться выразить ее через S_n. Если попытка окажется удачной, мы получим уравнение, решением которого и будет искомая сумма.

Если она геометрическая, то и доказательство должно быть геометрическим:



Воспользуемся, к примеру, этим подходом для нахождения суммы *геометрической прогрессии* общего вида

$$S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} ax^k .$$

В соответствии с общей схемой приведения (2.24) сумма S_{n+1} переписывается в виде

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} ax^{k+1} ,$$

а сумма в правой части равняется $x \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} ax^k = xS_n$ по распределительному закону. Таким образом, $S_n + ax^{n+1} = a + xS_n$, и, разрешая это уравнение относительно S_n, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = \frac{a - ax^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{при } x \neq 1. \tag{2.25}$$

Ах, да — эту формулу вдолбили в меня еще в старших классах.

(При $x = 1$ данная сумма, разумеется, равна просто $(n+1)a$.) Правую часть этой формулы можно запомнить как разность первого входящего и первого не входящего в сумму членов, деленную на разность 1 и знаменателя прогрессии.

Все это было довольно простым делом, поэтому давайте-ка испытаем метод приведения на несколько более трудной сумме,

$$S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k2^k .$$

В данном случае мы имеем $S_0 = 0$, $S_1 = 2$, $S_2 = 10$, $S_3 = 34$, $S_4 = 98$, но какова же общая формула? В соответствии с (2.24) получаем

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (k+1)2^{k+1} ;$$

так что желательно выразить сумму в правой части через S_n. Ну, а ее можно разбить на две суммы с помощью сочетательного закона

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k2^{k+1} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} 2^{k+1} ,$$

и первая из полученных сумм равна $2S_n$. Вторая сумма — это сумма геометрической прогрессии, равная $(2-2^{n+2})/(1-2) = 2^{n+2}-2$ по формуле (2.25). Следовательно, $S_n+(n+1)2^{n+1} = 2S_n+2^{n+2}-2$, и после алгебраических преобразований получаем

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2 .$$

Теперь понятно, почему $S_3 = 34$ — это $32 + 2$, а не $2 \cdot 17$.

Аналогичный вывод с x вместо 2 привел бы нас к уравнению $S_n+(n+1)x^{n+1} = xS_n+(x-x^{n+2})/(1-x)$, откуда можно заключить, что

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \qquad \text{при } x \neq 1. \tag{2.26}$$

Интересно отметить, что эту замкнутую форму можно было бы вывести совсем другим способом, используя элементарные приемы дифференциального исчисления. Если начать с равенства

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

и взять производную по x от обеих частей, то получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} &= \frac{(1-x)\bigl(-(n+1)x^n\bigr)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

поскольку производная суммы равна сумме производных ее слагаемых. В последующих главах мы обнаружим гораздо больше связей между непрерывной и дискретной математикой.

2.4 КРАТНЫЕ СУММЫ

Члены суммы могут быть снабжены не только одним, а двумя и более индексами. Вот пример двойной суммы из девяти членов, управляемой двумя индексами j и k:

Обычно правление бывает из девяти членов.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j,k\leqslant 3} a_j b_k = a_1b_1 &+ a_1b_2 + a_1b_3\\ &+ a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3\\ &+ a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3\,.\end{aligned}$$

Заметим, что это вовсе не означает суммирование по всем $j \geqslant 1$ *и всем* $k \leqslant 3$.

Для таких сумм используются те же обозначения и методы, что и для сумм с единственным индексом. Так, если j и k связаны некоторым условием $P(j,k)$, то сумма всех членов $a_{j,k}$, таких, что $P(j,k)$ истинно, может быть записана двумя способами, в одном из которых используется нотация Айверсона, а суммирование осуществляется по *всем* парам целых j и k:

$$\sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_{j,k} a_{j,k}\,[P(j,k)]\,.$$

Несмотря на то, что здесь имеется более одного индекса суммирования, достаточно только одного знака $\sum$, который означает сумму по всем допустимым комбинациям индексов.

Впрочем, случается использовать и две сигмы, когда речь идет о сумме сумм. Например,

$$\sum_j \sum_k a_{j,k} [P(j,k)]$$

— это сокращенная запись суммы

$$\sum_j \Bigl(\sum_k a_{j,k} [P(j,k)] \Bigr),$$

Кратные суммы вычисляются справа налево (изнутри-наружу).

которая представляет собой сумму по всем целым j членов $\sum_k a_{j,k} [P(j,k)]$, в свою очередь являющихся суммами по всем целым k всех таких членов $a_{j,k}$, которые удовлетворяют условию $P(j,k)$. В таких случаях говорят, что двойная сумма „суммируется сначала по k". Сумму, которая зависит более чем от одного индекса, можно начинать суммировать с любого из этих индексов.

Это обстоятельство представляет собой важное правило, называемое *изменением порядка суммирования* и обобщающее сочетательный закон (2.16), с которым мы уже знакомы:

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}[P(j,k)] = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k}[P(j,k)]. \qquad (2.27)$$

В этом правиле средний член представляет собой сумму по двум переменным. В левой части $\sum_j \sum_k$ означает суммирование сперва по k, а потом по j. В правой части $\sum_k \sum_j$ означает суммирование сначала по j, а затем по k. На практике, когда нам надо вычислить двойную сумму в замкнутой форме, обычно проще сначала просуммировать по какому-то одному из двух индексов, а не по другому — мы свободны в выборе более удобного из них.

А кто, собственно, паникует? Это правило представляется само собой разумеющимся по сравнению с некоторыми вольностями из гл. 1.

Суммы сумм — не повод для паники, но они могут сбить с толку начинающего — поэтому давайте-ка решим еще несколько примеров. Девятичленная сумма, с которой мы начинали, служит хорошей иллюстрацией преобразования двойных сумм, поскольку эта сумма действительно может быть упрощена, а сам процесс упрощения типичен для того, что можно делать с двойными суммами:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant j,k\leqslant 3} a_j b_k &= \sum_{j,k} a_j b_k [1 \leqslant j,k \leqslant 3] \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k [1 \leqslant j \leqslant 3][1 \leqslant k \leqslant 3] \\
&= \sum_j \sum_k a_j b_k [1 \leqslant j \leqslant 3][1 \leqslant k \leqslant 3] \\
&= \sum_j a_j [1 \leqslant j \leqslant 3] \sum_k b_k [1 \leqslant k \leqslant 3]
\end{aligned}$$

$$= \sum_j a_j[1 \leqslant j \leqslant 3]\Bigl(\sum_k b_k[1 \leqslant k \leqslant 3]\Bigr)$$
$$= \Bigl(\sum_j a_j[1 \leqslant j \leqslant 3]\Bigr)\Bigl(\sum_k b_k[1 \leqslant k \leqslant 3]\Bigr)$$
$$= \Bigl(\sum_{j=1}^{3} a_j\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{3} b_k\Bigr).$$

Здесь в первой строке записана сумма из девяти членов безотносительно их порядка. Во второй строке эти члены сгруппированы по три, $(a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3)+(a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3)+(a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3)$. В третьей строке используется распределительный закон для вынесения за скобки всех a-членов, поскольку a_j и $[1 \leqslant j \leqslant 3]$ не зависят от k; это дает $a_1(b_1+b_2+b_3)+a_2(b_1+b_2+b_3)+a_3(b_1+b_2+b_3)$. Четвертая строка аналогична третьей, но с дополнительной парой скобок, введенных с тем, чтобы следующая строка не выглядела слишком загадочной. В пятой строке выносится множитель $(b_1+b_2+b_3)$, который встречается при каждом j: $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$. Последняя строка — всего-навсего другая форма записи предыдущей. Подобный вывод можно использовать для доказательства общего *распределительного закона*

$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_j b_k = \Bigl(\sum_{j\in J} a_j\Bigr)\Bigl(\sum_{k\in K} b_k\Bigr), \qquad (2.28)$$

справедливого для всех множеств индексов J и K.

Основное правило (2.27) изменения порядка суммирования допускает разного рода вариации, возникающие, когда мы хотим ограничить области изменения индексов вместо суммирования по всем целым j и k. Эти вариации вызывают два ощущения: ванили и булыжной мостовой. Сперва — „ванильная“ версия:

Как-будто ешь пирожное на Красной площади!

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} a_{j,k}. \qquad (2.29)$$

Это всего лишь другой способ записи (2.27), поскольку скобки Айверсона $[j \in J, k \in K]$ распадаются в произведение скобок $[j \in J][k \in K]$. Правило с привкусом ванили применимо во всех случаях, когда области изменения j и k не зависят друг от друга.

„Булыжная“ формула изменения порядка суммирования несколько более мудреная. Она применима, когда область изменения индекса внутренней суммы зависит от переменного индекса внешней суммы:

$$\sum_{j\in J}\ \sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\ \sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}. \qquad (2.30)$$

В этом случае множества J, $K(j)$, K' и $J'(k)$ должны быть связаны так, чтобы

$$[j \in J][k \in K(j)] = [k \in K'][j \in J'(k)] .$$

В принципе, разложение такого рода всегда возможно, поскольку можно считать $J = K'$ множеством всех целых чисел, а $K(j) = J'(k)$ — основным условием $P(j,k)$, которое управляет двойной суммой. Вместе с тем существуют важные частные случаи, когда множества J, $K(j)$, K' и $J'(k)$ имеют довольно простую форму. С ними часто приходится сталкиваться в приложениях. Вот пример весьма полезного разложения:

$$\begin{aligned}[1 \leqslant j \leqslant n][j \leqslant k \leqslant n] &= [1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n] \\ &= [1 \leqslant k \leqslant n][1 \leqslant j \leqslant k] .\end{aligned} \qquad (2.31)$$

Это равенство по Айверсону делает справедливой следующую запись:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{j,k} . \qquad (2.32)$$

(Теперь самое время разогреться упр. 4 и 6.) И скушать Твикс.

Одну из этих двух двойных сумм обычно легче вычислить, чем другую,— мы можем воспользоваться равенством (2.32) для переключения с трудной суммы на легкую.

Используем эти соображения с пользой для дела. Рассмотрим матрицу

$$\begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \ldots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 & \ldots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \ldots & a_na_n \end{bmatrix}$$

из n^2 произведений a_ja_k. Наша цель — найти простую формулу для

$$S_{\triangledown} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} a_ja_k ,$$

суммы всех элементов на и над главной диагональю этой матрицы. Поскольку $a_ja_k = a_ka_j$, матрица симметрична относительно главной диагонали; следовательно, $S_{\triangledown}$ будет приближенно равно полусумме *всех* элементов (за исключением лишнего члена, отвечающего главной диагонали).

Разве на мостовой могут быть лишние булыжники?

Подобные наводящие соображения служат поводом для следующих манипуляций:

$$S_{\triangledown} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} a_ja_k = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n} a_ka_j = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n} a_ja_k = S_{\triangle} ,$$

поскольку (j,k) можно переобозначить как (k,j). Кроме того, поскольку

$$[1\leqslant j\leqslant k\leqslant n]+[1\leqslant k\leqslant j\leqslant n] = [1\leqslant j,k\leqslant n]+[1\leqslant j=k\leqslant n],$$

мы получаем

$$2S_{\triangledown} = S_{\triangledown}+S_{\triangle} = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j a_k + \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} a_j a_k .$$

Первая сумма по общему распределительному закону (2.28) есть $\bigl(\sum_{j=1}^{n} a_j\bigr)\bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\bigr) = \bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\bigr)^2$, а вторая — $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Поэтому

$$S_{\triangledown} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right), \qquad (2.33)$$

— выражение для суммы элементов верхней треугольной матрицы, записанное через более простые однократные суммы.

Воодушевленные таким успехом, рассмотрим еще одну двойную сумму:

$$S = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) .$$

Здесь мы снова имеем симметрию относительно перестановки j и k:

$$S = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) .$$

Поэтому сумму S можно сложить саму с собой, используя соотношение

$$[1\leqslant j<k\leqslant n]+[1\leqslant k<j\leqslant n] = [1\leqslant j,k\leqslant n]-[1\leqslant j=k\leqslant n],$$

с тем, чтобы заключить, что

$$2S = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) .$$

Вторая сумма здесь обращается в нуль, а как насчет первой? А она распадается на четыре отдельные суммы, каждая из которых отдает ванилью:

Просто кондитерский магазин...

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j b_j - \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j b_k - \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_j + \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_k \\
&\quad = 2\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_k - 2\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j b_k \\
&\quad = 2n\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) .
\end{aligned}$$

На последнем шаге обе суммы подверглись упрощению в соответствии с общим распределительным законом (2.28). Если же

преобразование первой суммы остается загадкой — воспроизведем его не спеша снова:

$$2\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_k = 2\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_k b_k$$
$$= 2\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k \sum_{1\leqslant j\leqslant n} 1$$
$$= 2\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k n = 2n\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k\,.$$

Переменный индекс (в данном случае j), от которого не зависит общий член суммы, можно просто исключить, если домножить то, что остается, на размерность множества значений этого индекса (т. е. на n).

Возвращаясь к тому месту, где мы остановились, теперь можно поделить все пополам, произвести перестановку и получить интересную формулу:

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)\,. \qquad (2.34)$$

В качестве частных случаев это соотношение дает *неравенства Чебышёва* для сумм:

(В действительности, Чебышёвым [346] доказан аналогичный результат для интегралов, а не для сумм: $(\int_a^b f(x)\,dx) \times (\int_a^b g(x)\,dx) \leqslant (b-a) \times (\int_a^b f(x)g(x)\,dx)$, если $f(x)$ и $g(x)$ — монотонные неубывающие функции.)

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr) \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,,\quad \text{если } a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n \text{ и } b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n;$$
$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr) \geqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,,\quad \text{если } a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n \text{ и } b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n.$$

(В общем случае, если $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ и если p — некоторая перестановка множества $\{1,\ldots,n\}$, то нетрудно доказать, что наибольшее значение $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{p(k)}$ достигается при $b_{p(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{p(n)}$, а наименьшее значение — при $b_{p(1)} \geqslant \cdots \geqslant b_{p(n)}$.)

Многократное суммирование имеет интересную связь с общей операцией замены переменной суммирования в *однократных* суммах. В силу переместительного закона мы знаем, что

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}\,,$$

если $p(k)$ является некоторой перестановкой целых чисел. Но что будет, если заменить k на $f(j)$, где f — произвольная функция

$$f\colon J \to K,$$

которая переводит целое $j \in J$ в целое $f(j) \in K$? Общая формула замены переменной выглядит так:

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k \,\#f^-(k)\,, \qquad (2.35)$$

где $\#f^-(k)$ обозначает число элементов множества

$$f^-(k) = \{\, j \mid f(j) = k \,\}\,,$$

т. е. число элементов $j \in J$, таких, что $f(j)$ равно k.

Формулу (2.35) легко доказать, изменив порядок суммирования:

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_k \,\bigl[f(j)=k\bigr] = \sum_{k\in K} a_k \sum_{j\in J} \bigl[f(j)=k\bigr]\,,$$

поскольку $\sum_{j\in J}\bigl[f(j)=k\bigr] = \#f^-(k)$. В частном случае, когда f — взаимно однозначное соответствие между J и K, имеем $\#f^-(k) = 1$ при всех k, и общая формула (2.35) сводится к формуле

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j)\in K} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k\,.$$

Это переместительный закон (2.17), с которым мы уже имели дело — в слегка замаскированном виде.

Другой преподаватель математики называет это „биекцией“; быть может, мне когда-нибудь понравится это слово.

А потом опять . . .

До сих пор все наши примеры кратных сумм включали в себя произвольные члены типа a_k или b_k. Но поскольку эта книга претендует на конкретность, давайте рассмотрим кратную сумму, включающую реальные числа:

Глядите-ка, авторы, по-видимому, думают, что j, k и n „реальные числа“.

$$S_n = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j}\,.$$

В частности, $S_1 = 0$; $S_2 = 1$; $S_3 = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2}$.

Обычный способ вычисления двойной суммы состоит в суммировании сначала по j или же сначала по k — поэтому давайте испробуем обе возможности.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j<k} \frac{1}{k-j} && \text{суммируя сперва по } j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant k-j<k} \frac{1}{j} && \text{заменяя } j \text{ на } k-j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{0<j\leqslant k-1} \frac{1}{j} && \text{упрощая границы для } j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} H_{k-1} && \text{по определению } H_{k-1}\text{, формула (2.13)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leqslant k+1 \leqslant n} H_k \qquad \text{заменяя } k \text{ на } k+1$$

$$= \sum_{0 \leqslant k < n} H_k \, . \qquad \text{упрощая границы для } k.$$

Возьмите хлыст.

Увы! Мы не знаем, как загнать сумму гармонических чисел в замкнутую форму.

Если же попробовать начать суммировать по-другому, то получим

$$S_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} \qquad \text{суммируя сперва по } k$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{j < k+j \leqslant n} \frac{1}{k} \qquad \text{заменяя } k \text{ на } k+j$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{0 < k \leqslant n-j} \frac{1}{k} \qquad \text{упрощая границы } k$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} H_{n-j} \qquad \text{по определению } H_{n-j}, \text{ формула (2.13)}$$

$$= \sum_{1 \leqslant n-j \leqslant n} H_j \qquad \text{заменяя } j \text{ на } n-j$$

$$= \sum_{0 \leqslant j < n} H_j \, . \qquad \text{упрощая границы для } j.$$

И вновь оказываемся в том же самом тупике.

Но имеется *еще один* путь, по которому можно добраться до цели, если заменить k на $k+j$, *прежде чем* решиться на сведение S_n к сумме сумм:

$$S_n = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} \qquad \text{переписывая исходную сумму}$$

$$= \sum_{1 \leqslant j < k+j \leqslant n} \frac{1}{k} \qquad \text{заменяя } k \text{ на } k+j$$

$$= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-k} \frac{1}{k} \qquad \text{суммируя сперва по } j$$

$$= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{n-k}{k} \qquad \text{ибо сумма по } j \text{ тривиальна}$$

$$= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{n}{k} - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} 1 \qquad \text{в силу сочетательного закона}$$

$$= n\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k}\Big) - n \qquad \text{черт возьми!}$$

$$= nH_n - n. \qquad \text{по определению } H_n, \text{ формула (2.13).}$$

Считать в этом выводе $k \leqslant n$ вместо $k \leqslant n-1$ — это было остроумно. Простые границы экономят силы.

Ура! Мы нашли S_n. Сопоставляя результаты этого „забега“ с допущенными фальстартами, мы получаем в качестве приза следующее соотношение:

$$\sum_{0\leqslant k<n} H_k = nH_n - n. \tag{2.36}$$

Использованную здесь уловку можно осмыслить двояко: во-первых, алгебраически, а во-вторых, геометрически. (1) Алгебраически: если дана двойная сумма, члены которой включают в себя $k + f(j)$, где f — произвольная функция, то этот пример показывает, что неплохо попробовать заменить k на $k - f(j)$ и просуммировать по j. (2) Геометрически: можно представить сумму S_n, например сумму при $n = 4$, в следующем виде:

$$\begin{array}{lcccc} & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \\ j=1 & & \frac{1}{1} \;+ & \frac{1}{2} \;+ & \frac{1}{3} \\ j=2 & & & \frac{1}{1} \;+ & \frac{1}{2} \\ j=3 & & & & \frac{1}{1} \\ j=4 & & & & \end{array}$$

Наши первые попытки просуммировать сначала по j (по столбцам) или по k (по строкам), давали $H_1 + H_2 + H_3 = H_3 + H_2 + H_1$. Но выигрышный ход, по существу, заключался в суммировании по диагоналям, и он давал $\frac{3}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$.

2.5 ОБЩИЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Теперь закрепим то, что уже изучили, рассмотрев один и тот же пример с разных сторон. На следующих страницах будет предпринята попытка найти замкнутое выражение для суммы первых n квадратов, которую будем обозначать через $\square_n$:

$$\square_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^2 \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{2.37}$$

Мы увидим, что имеется по меньшей мере семь различных способов решения этой задачи, а в процессе их тактического разбора мы научимся и стратегии успешного наступления на произвольные суммы.

Но вначале, как обычно, понаблюдаем некоторые крайние случаи:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\square_n$	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650

Никакого замкнутого выражения для $\square_n$ на первый взгляд не наблюдается, но когда мы его обнаружим, эти величины могут быть полезны для проверки точности попадания.

Метод 0: с помощью справочника

Проблема типа суммы первых n квадратов, несомненно, уже кем-нибудь решена, так что весьма вероятно, что ее решение можно найти в любом имеющемся под рукой справочнике. И в самом деле, на 36-й странице *Стандартных математических таблиц CRC* [16] содержится такой ответ:

$$\square_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{2.38}$$

Исключительно с целью проверки правильности прочтения убедимся в том, что эта формула верна: $\square_5 = 5\cdot 6\cdot 11/6 = 55$. Между прочим, на той же 36-й странице *таблиц CRC* содержится дальнейшая информация, о суммах третьих, ..., десятых степеней.

Авторитетным собранием математических формул служит *Справочник по специальными функциям* [2] под редакцией Абрамовица и Стиган. На сс. 616–617 этой книги приведены значения $\square_n$ для всех $n \leqslant 100$, а на сс. 608 и 612 представлены формулы, эквивалентные (2.38), вместе с аналогичными формулами для сумм третьих, ..., пятнадцатых степеней (с переменой или без перемены знаков).

(Более сложные суммы можно найти в объемистых таблицах Хансена [332].)

Но наилучшим источником ответов на вопросы о последовательностях остается изумительная небольшая книжка Слоана под названием *Справочник по целочисленным последовательностям* [276], в которой перечислены тысячи последовательностей в соответствии с их числовыми значениями. Если вы сталкиваетесь с некоторой рекуррентностью, которую есть основание считать уже изученной, все, что нужно сделать,— это вычислить достаточное число членов для того, чтобы распознать вашу рекуррентность среди других известных; тогда у вас появятся шансы найти указание на соответствующую литературу в *справочнике Слоана*. Так, выясняется, что 1, 5, 14, 30, ... у Слоана имеет номер 1574 и называется последовательностью „квадратных пирамидальных чисел“ (ибо в пирамиде с квадратным основанием из n^2 шаров умещается $\square_n$ шаров). Слоан отсылает нас к трем источникам, одним из которых служит уже упоминавшийся справочник Абрамовица и Стиган.

Еще один способ почерпнуть из кладезя мировой математической мудрости — использование компьютерных программ (таких, как MACSYMA, Axiom, Maple или Mathematica), дающих средства для символьных преобразований. Такие программы особенно ценны, когда приходится иметь дело с громоздкими формулами.

Знакомство со стандартными источниками информации небесполезно, ибо они могут оказаться исключительно полезными. Тем не менее, метод 0 не вполне согласуется с духом этой книги, поскольку нам хотелось бы знать, как угадать ответ самостоятельно. „Справочный" метод ограничивает нас задачами, которые кто-то счел заслуживающими внимания — интересующую нас задачу среди них можно и не найти.

Или, по крайней мере, задачами, имеющими те же ответы, что и задачи, которые кто-то решил рассмотреть.

Метод 1: угадывание ответа с подтверждением по индукции

Возможно, ответ к задаче принесла на хвосте сорока, а может быть, мы пришли к нему каким-то другим таинственным способом — тогда от нас требуется всего лишь подтвердить его правильность.

Мы могли бы, например, заметить, что значения $\square_n$ раскладываются на маленькие простые множители, так что мы могли найти (2.38) как формулу, работающую для всех малых n. Можно было бы также предположить эквивалентную (2.38) формулу

$$\square_n = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \qquad \text{при } n \geqslant 0, \tag{2.39}$$

которая приятнее в том смысле, что ее легче запомнить. Все говорит в пользу (2.39), но мы обязаны доказать наши предположения способом, не оставляющим ни малейшего сомнения. Для этой цели и была придумана математическая индукция.

„Итак, Ваша честь, нам известно, что $\square_0 = 0 = 0(0+\frac{1}{2})(0+1)/3$, так что с базой индукции просто. Для индуктивного перехода предположим, что $n > 0$, и допустим, что (2.39) остается в силе, когда n заменяется на $n-1$. Поскольку

$$\square_n = \square_{n-1} + n^2,$$

то

$$\begin{aligned} 3\square_n &= (n-1)(n-\tfrac{1}{2})(n) \ + \ 3n^2 \\ &= (n^3 - \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n) \ + \ 3n^2 \\ &= (n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n) \\ &= n(n+\tfrac{1}{2})(n+1). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (2.39) действительно справедлива при всех $n \geqslant 0$ вне всякого сомнения". Господа присяжные, нет возражений?

Индукция здесь уместна и отчасти более оправдана, чем поиск ответа в справочнике. Но все равно это не совсем то, что нам нужно. Со всеми другими суммами, которые до сих пор вычислялись в этой главе, мы справлялись без всякой индукции; того же правила нам следует придерживаться и при установлении суммы $\Box_n$. Не стоит каждый раз надеяться на счастливые прозрения — мы должны уметь обращаться с подобными суммами и в повседневности.

„В старину внезапную удачную мысль считали прозрением, даром богов. Этот дар, однако, надо заслужить своим трудом или, по крайней мере, страстным желанием."
— Д. Пойа, [239, с. 140].*

Метод 2: метод приведения

Итак, давайте вернемся к методу приведения, который так хорошо проявил себя в случае геометрической прогрессии (2.25). Выделим первый и последний члены $\Box_{n+1}$, для того чтобы получить уравнение относительно $\Box_n$:

$$\begin{aligned}\Box_n + (n+1)^2 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^2 = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k^2+2k+1)\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k^2 + 2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k + \sum_{0\leqslant k\leqslant n}1\\ &= \Box_n \ + \ 2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k \ + \ (n+1)\,.\end{aligned}$$

Оп-па! Величины $\Box_n$ взаимно уничтожаются. Случается, что, несмотря на все наши старания, метод приведения приводит к чему-то вроде $\Box_n = \Box_n$, и мы остаемся в проигрыше.

Больше похоже на ничью.

Тем не менее, этот вывод не совсем бесполезен: он выявляет способ вычисления суммы первых n целых чисел в замкнутой форме

$$2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k = (n+1)^2 - (n+1)\,,$$

хотя мы и рассчитывали вычислить сумму их квадратов. А не может случиться так, что, начав с суммы кубов целых чисел, которую можно обозначить через $⧉_n$, мы получим выражение для суммы их квадратов? Давайте попробуем:

$$\begin{aligned}⧉_n + (n+1)^3 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^3 = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k^3+3k^2+3k+1)\\ &= ⧉_n + 3\Box_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + (n+1)\,.\end{aligned}$$

Метод 2′: метод приведения в смятение.

Как мы и ожидали, величины $⧉_n$ уничтожаются, и мы можем определить $\Box_n$, не полагаясь на индукцию:

$$\begin{aligned}3\Box_n &= (n+1)^3 - 3(n+1)n/2 - (n+1)\\ &= (n+1)(n^2+2n+1-\tfrac{3}{2}n-1) = (n+1)(n+\tfrac{1}{2})n\,.\end{aligned}$$

Метод 3: подбор репертуара

Для суммирования квадратов достаточно также немного обобщить рекуррентное соотношение (2.7). Решение рекуррентности

$$R_0 = \alpha,$$
$$R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2 \qquad \text{при } n > 0, \tag{2.40}$$

вообще будет иметь вид

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta, \tag{2.41}$$

и мы уже определили $A(n)$, $B(n)$ и $C(n)$, поскольку (2.40) — то же самое, что и (2.7), когда $\delta = 0$. Если теперь подставить $R_n = n^3$, то выясняется, что n^3 будет решением при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$ и $\delta = 3$. Итак,

$$3D(n) - 3C(n) + B(n) = n^3;$$

откуда определяется $D(n)$.

Но нас интересует сумма $\Box_n$, которая равна $\Box_{n-1} + n^2$: если мы положим $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и $\delta = 1$ в (2.41), то получим $\Box_n = R_n$. Следовательно, $\Box_n = D(n)$. Нам ни к чему прибегать к алгебре для вычисления $D(n)$ по $B(n)$ и $C(n)$, поскольку мы уже не сомневаемся в том, каким будет ответ. Но если среди нас есть сомневающиеся, то их следует заверить в том, что

Прибегать лучше к финишу.

$$3D(n) = n^3 + 3C(n) - B(n) = n^3 + 3\frac{(n+1)n}{2} - n$$
$$= n(n+\tfrac{1}{2})(n+1).$$

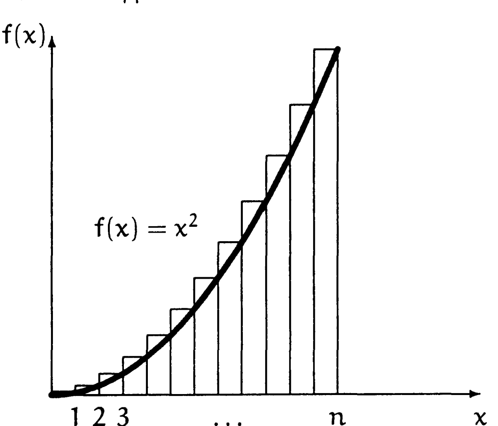
Метод 4: замена сумм интегралами

Те, кто взращен на ниве непрерывной, а не дискретной математики, больше симпатизируют интегралам, нежели суммам, и потому находят естественным попытаться заменить $\sum$ на $\int$. Одна из целей нашей книги заключается в том, чтобы сделать $\sum$ настолько простой в обращении, что уже $\int$ будет казаться более сложным чем $\sum$ (по крайней мере, при точных вычислениях). Но все же имеет смысл проследить связь между $\sum$ и $\int$, поскольку и суммирование, и интегрирование основаны на очень схожих идеях.

В математическом анализе интеграл может рассматриваться как площадь под некоторой кривой, и мы можем вычислить эту площадь приближенно, складывая площади вытянутых узких прямоугольников, которые соприкасаются с данной кривой. Если же совокупность вытянутых узких прямоугольников задана, то можно пойти обратным путем: поскольку величина $\Box_n$ есть сумма площадей прямоугольников размером 1×1, 1×4, $\ldots$, $1\times n^2$, то она приближенно равна площади под кривой $f(x) = x^2$ в ин-

тервале от 0 до n.

Здесь масштаб по горизонтали в десять раз больше масштаба по вертикали.



А так как площадь под этой кривой есть $\int_0^n x^2\,dx = n^3/3$, мы выясняем, что величина $\square_n$ приближенно равна $\frac{1}{3}n^3$.

Один из способов извлечь пользу из этого факта — оценить погрешность полученной аппроксимации, $E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3$. Поскольку $\square_n$ удовлетворяет рекуррентности $\square_n = \square_{n-1} + n^2$, мы обнаруживаем, что E_n удовлетворяет еще более простой рекуррентности

$$\begin{aligned} E_n &= \square_n - \frac{1}{3}n^3 = \square_{n-1} + n^2 - \frac{1}{3}n^3 \\ &= E_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)^3 + n^2 - \frac{1}{3}n^3 = E_{n-1} + n - \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Другой способ проведения в жизнь интегрального подхода — нахождение формулы для E_n путем суммирования площадей клиновидных фигур, составляющих погрешность. Получаем

Это для питающих склонность к математическому анализу.

$$\begin{aligned} \square_n - \int_0^n x^2\,dx &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - \int_{k-1}^{k} x^2\,dx\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - \frac{k^3-(k-1)^3}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(k - \tfrac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

В любом случае можно было бы найти E_n, а затем $\square_n$.

Метод 5: усложнение и упрощение

Еще один способ нахождения $\square_n$ в замкнутой форме — замена исходной суммы более сложной на первый взгляд двойной суммой, которая в действительности может быть упрощена, если преобразовать ее как надо:

$$\begin{aligned} \square_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} k \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\ \sum_{j\leqslant k\leqslant n} k = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{j+n}{2}\right)(n-j+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(n(n+1) + j - j^2 \right)$$
$$= \tfrac{1}{2} n^2 (n+1) + \tfrac{1}{4} n(n+1) - \tfrac{1}{2} \Box_n$$
$$= \tfrac{1}{2} n(n + \tfrac{1}{2})(n+1) - \tfrac{1}{2} \Box_n .$$

(В данном выводе последний шаг отчасти напоминает последний шаг метода приведения, так как мы получаем уравнение с неизвестной величиной в обеих частях.)

Переход от однократной суммы к двукратной может сначала показаться шагом назад, но на самом деле — это шаг вперед, ибо он дает нам суммы, с которыми легче работать. Нельзя рассчитывать решить каждую задачу, непрерывно упрощая, упрощая и упрощая, как нельзя овладеть горными вершинами, только поднимаясь, поднимаясь и поднимаясь!

Метод 6: исчисление конечных разностей

Метод 7: использование производящих функций

Настраивайтесь на еще более захватывающие методы вычисления $\Box_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$, которые мы будем изучать в следующем разделе и в последующих главах.

2.6 ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО И БЕСКОНЕЧНОГО

Мы изучили целый ряд способов непосредственного обращения с суммами. Теперь настала пора расширить наш кругозор, рассмотрев проблему суммирования на более высоком уровне. По аналогии с более традиционным исчислением бесконечно малых математиками разработано исчисление „конечных разностей“, с помощью которого можно аккуратно и методично подойти к суммированию.

Исчисление бесконечно малых основано на свойствах *дифференциального* оператора D, определяемого как

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Исчисление конечных разностей основано на свойствах *разностного* оператора Δ, определяемого как

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) . \qquad (2.42)$$

Это конечно-разностный аналог производной, в котором мы ограничились целыми положительными значениями h. Таким образом, $h = 1$ — ближайшее к нулю значение, которое можно получить „в пределе“ при $h \to 0$, а $\Delta f(x)$ — это $\big(f(x+h) - f(x)\big)/h$ при $h = 1$.

Символы D и Δ называются *операторами*, поскольку они „оперируют“ с функциями, образуя новые функции: они являются функциями функций, результатом которых являются функции. Если f — достаточно гладкая функция, отображающая

вещественные числа в вещественные числа, то $\mathrm{D}f$ также является функцией из вещественных чисел в вещественные числа. А если f представляет собой *любую* функцию из вещественных чисел в вещественные числа, то таковой является и Δf. Значения функций $\mathrm{D}f$ и Δf в точке x вычисляются в соответствии с данными выше определениями.

Приступая к изучению дифференциального исчисления, мы прежде всего выясняем, как D действует на степенные функции $f(x) = x^m$. Для таких функций $\mathrm{D}f(x) = mx^{m-1}$. Неформально это можно записать, опуская f, как

$$\mathrm{D}(x^m) = mx^{m-1} .$$

Было бы здорово, если бы оператор Δ давал столь же элегантный результат; к сожалению, этого не происходит. Так,

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 .$$

Тем не менее, имеется некая разновидность „m-й степени“, которая действительно здорово преобразуется под действием Δ, и именно это обстоятельство делает исчисление конечных разностей содержательным. Такие модифицированные степени x определяются по правилу

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m\ \text{сомножителей}}, \qquad \text{целое } m \geqslant 0. \qquad (2.43)$$

Обратите внимание на маленькую черточку под m — она указывает на то, что m сомножителей должны постепенно становиться все меньше и меньше. Существует, соответственно, определение, по которому сомножители становятся все больше и больше:

$$x^{\overline{m}} = \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{m\ \text{сомножителей}}, \qquad \text{целое } m \geqslant 0. \qquad (2.44)$$

А если отсутствуют и сомножители, и слагаемые?

При $m = 0$ имеем $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$, так как по соглашению произведение отсутствующих сомножителей принимается равным 1 (точно так же, как сумма отсутствующих слагаемых считается равной 0).

Величина $x^{\underline{m}}$ называется „x в убывающей степени m“, если нужно произнести это вслух; созвучно $x^{\overline{m}}$ — это „x в возрастающей степени m“. Эти функции называют также *убывающими факториальными степенями* и *возрастающими факториальными степенями*, поскольку они тесно связаны с факториальной функцией $n! = n(n-1)\ldots(1)$. В самом деле, $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

В математической литературе встречается ряд других обозначений для факториальных степеней, среди них — „символ Пох-

гаммера" $(x)_m$ для $x^{\overline{m}}$ или для $x^{\underline{m}}$; встречаются также обозначения типа $x^{(m)}$ или $x_{(m)}$. Тем не менее в моду входит подчеркнуто-надчеркнутое обозначение, ибо оно просто пишется, легко запоминается и избавлено от лишних скобок.

Убывающие степени $x^{\underline{m}}$ особенно хороши по отношению к Δ:

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}}\\ &= (x+1)x\ldots(x-m+2) - x\ldots(x-m+2)(x-m+1)\\ &= m\,x(x-1)\ldots(x-m+2)\,,\end{aligned}$$

так что исчисление конечных разностей располагает удобным в обращении правилом, под стать правилу $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}. \qquad (2.45)$$

Это основной факториальный факт.

Оператор D в исчислении бесконечно малых имеет обратный — антидифференциальный (или интегральный) оператор $\int$. Основная теорема дифференциального и интегрального исчисления связывает D с $\int$ следующим образом:

$$g(x) = Df(x)$$

$$\text{тогда и только тогда, когда} \quad \int g(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

Здесь $\int g(x)\,dx$ — неопределенный интеграл $g(x)$ — является классом функций, производная которых есть $g(x)$. Точно так же, оператор Δ имеет обратный — антиразностный (или суммирующий) оператор $\sum$, и в этом случае справедлива такая Основная теорема:

$$g(x) = \Delta f(x)$$

$$\text{тогда и только тогда, когда} \quad \sum g(x)\,\delta x = f(x) + C\,. \qquad (2.46)$$

Здесь $\sum g(x)\,\delta x$ — *неопределенная сумма* $g(x)$ — является классом функций, *разность* которых есть $g(x)$. (Заметим, что строчная δ соотносится с прописной Δ так же, как d соотносится с D.) Буква „C" в случае неопределенных интегралов обозначает произвольную постоянную; в случае же неопределенных сумм роль „C" играет любая функция $p(x)$, такая, что $p(x+1) = p(x)$. В частности, C могла бы быть периодической функцией $a + b\sin 2\pi x$ — такие функции аннулируются, если мы берем от них разности (точно так же как аннулируются константы, когда мы берем от них производные). При целочисленных x функция C является константой.

Теперь мы почти подошли к кульминационному моменту. Исчисление бесконечно малых включает в себя и *определенные* интегралы: если $g(x) = Df(x)$, то

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)\,.$$

С математической символикой порой случаются накладки: на самом деле Похгаммер [245] использовал обозначение $(x)_m$ для биномиального коэффициента $\binom{x}{m}$, а не для факториальных степеней.

Впрочем, в Справочнике по специальными функциям [2] символ Похгаммера определяется именно как $(x)_0 = 1$, $(x)_m = x(x+1)\ldots(x+m-1)$. — Перев.

„Quemadmodum ad differentiam denotandam usi sumus signo Δ, ita summam indicabimus signo Σ. ... ex quo æquatio $z = \Delta y$, si invertatur, dabit quoque $y = \Sigma z + C$."
— Л. Эйлер [374]

Соответственно, исчисление конечных разностей — во всем имитирующее своего более знаменитого собрата — располагает определенными *суммами*: если $g(x) = \Delta f(x)$, то

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)\,. \qquad (2.47)$$

Эта формула раскрывает смысл обозначения $\sum_a^b g(x)\,\delta x$, точно так же, как предыдущая формула — смысл $\int_a^b g(x)\,dx$.

Но что же представляет собой сумма $\sum_a^b g(x)\,\delta x$ в действительности? Мы установили ее смысл по аналогии, но не по существу. Такая аналогия хороша для того, чтобы облегчить запоминание правила исчисления конечных разностей; однако подобное обозначение будет бесполезным, если мы не поймем его истинного смысла. Попробуем выяснить смысл этой суммы, рассмотрев сначала некоторые специальные случаи, исходя из того, что $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Если $b = a$, то

$$\sum\nolimits_a^a g(x)\,\delta x = f(a) - f(a) = 0\,.$$

Далее, если $b = a + 1$, то результат такой:

$$\sum\nolimits_a^{a+1} g(x)\,\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a)\,.$$

И еще, если к b добавить 1, то

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^{b+1} g(x)\,\delta x - \sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x &\\ &= \big(f(b+1) - f(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\\ &= f(b+1) - f(b) = g(b)\,.\end{aligned}$$

Подобные наблюдения, а также математическая индукция, позволяют выяснить точный смысл $\sum_a^b g(x)\,\delta x$ в общем случае, когда a и b — целые числа и $b \geqslant a$:

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leqslant k < b} g(k) \quad \text{при целых } b \geqslant a. \qquad (2.48)$$

И вот ради этого весь сыр-бор?

Другими словами, определенная сумма — это то же самое, что и обычная сумма с пределами суммирования, но с исключенным значением верхнего предела.

Попробуем повторить этот вывод несколько иначе. Предположим, что нам дана неизвестная сумма, которая, предположительно, вычисляется в замкнутой форме, и еще предположим, что ее можно записать в виде $\sum_{a \leqslant k < b} g(k) = \sum_a^b g(x)\,\delta x$. Теория исчисления конечных разностей говорит, что ответ можно выразить в виде $f(b) - f(a)$, если только мы сможем найти неопределенную сумму или антиразностную функцию f, такую, что

$g(x) = f(x+1) - f(x)$. Один из способов понять сей принцип — выписать $\sum_{a\leqslant k<b} g(k)$ в развернутом виде, используя '$\cdots$':

$$\sum_{a\leqslant k<b}\bigl(f(k+1)-f(k)\bigr) = \bigl(f(a+1)-f(a)\bigr) + \bigl(f(a+2)-f(a+1)\bigr) + \cdots + \bigl(f(b-1)-f(b-2)\bigr) + \bigl(f(b)-f(b-1)\bigr).$$

Все члены в правой части, за исключением $f(b) - f(a)$, сокращаются, так что значением суммы является $f(b)-f(a)$. (Суммы вида $\sum_{a\leqslant k<b}\bigl(f(k+1)-f(k)\bigr)$ часто называют *телескопическими*, по аналогии со складным телескопом, так как толщина стенок сложенного телескопа определяется исключительно радиусом самой большой и радиусом самой малой из труб.)

И все то время, пока я думал, она телескопировалась, поскольку складывалась из довольно длинного выражения в весьма короткое.

Но правило (2.48) применимо только при $b \geqslant a$; а что случится при $b < a$? Ну, согласно (2.47),

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = f(b) - f(a) = -\bigl(f(a) - f(b)\bigr) = -\sum\nolimits_b^a g(x)\,\delta x,$$

что аналогично соответствующему соотношению для определенного интеграла. Подобным же образом доказывается, что $\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$ — аналог соотношения $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$ для сумм. Вот это соотношение при полном параде:

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x + \sum\nolimits_b^c g(x)\,\delta x = \sum\nolimits_a^c g(x)\,\delta x \qquad (2.49)$$

для любых целых a, b, и c.

Скорее всего, на данном этапе некоторые начинают интересоваться: а что нам дают все эти параллели и аналогии? Ну, для начала, исчисление определенных сумм дает простой способ вычисления сумм убывающих степеней: из основных правил (2.45), (2.47) и (2.48) вытекает общее правило

Других этот вопрос занимает уже давно.

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \quad \text{при целых } m, n \geqslant 0. \qquad (2.50)$$

Эта формула легко запоминается, поскольку она очень похожа на знакомую нам формулу $\int_0^n x^m\,dx = n^{m+1}/(m+1)$.

В частности, при $m = 1$ имеем $k^{\underline{1}} = k$, поэтому данное правило исчисления конечных разностей предоставляет простой способ запоминания того факта, что

$$\sum_{0\leqslant k<n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = n(n-1)/2.$$

Исчисление определенных сумм облегчается также тем обстоятельством, что суммы в промежутке $0 \leqslant k < n$ зачастую оказываются проще сумм в промежутке $1 \leqslant k \leqslant n$: первые из них

попросту равны $f(n) - f(0)$, в то время как последние требуют вычисления $f(n+1) - f(1)$.

Обычные степени также можно суммировать этим новым способом, если сперва выразить их через убывающие степени. Так,

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}},$$

откуда

$$\sum_{0 \leqslant k < n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2+\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{3}n(n-\tfrac{1}{2})(n-1).$$

Замена n на $n+1$ дает еще один способ вычисления в замкнутой форме нашего старого знакомого — суммы $\square_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k^2$.

Вот здорово — так просто! Это действительно проще, чем любой из той уймы способов, которыми мы замучили до смерти данную сумму в предыдущем разделе. Поэтому попробуем подняться выше — от квадратов к *кубам*. Несложное вычисление показывает, что

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$$

(Обычные степени всегда можно обратить в факториальные и наоборот, используя числа Стирлинга, которые мы будем изучать в гл. 6.) Таким образом:

$$\sum_{a \leqslant k < b} k^3 = \frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2} \bigg|_a^b.$$

Как много знакомых...

Итак, убывающие степени весьма подходят для вычисления сумм. Но обладают ли они еще какими-нибудь качествами, оправдывающими их существование? Должны ли мы обращать давно нам знакомые обычные степени в убывающие до суммирования, а затем обращать их обратно, вместо того чтобы действовать как-нибудь по-другому? Вовсе нет: зачастую можно работать непосредственно с факториальными степенями, поскольку они обладают рядом дополнительных свойств. Например, точно так же, как справедливо, что $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, справедливо и то, что $(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{1}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$, и та же самая аналогия существует между $(x+y)^m$ и $(x+y)^{\underline{m}}$. (Эта „факториальная биномиальная теорема“ доказывается в упр. 5.37.)

До сих пор мы рассматривали только убывающие степени без отрицательных показателей. Чтобы провести аналогии с обычными отрицательными степенями, нам потребуется подходящее определение $x^{\underline{m}}$ при $m < 0$. Глядя на последовательные степени

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2), \\ x^{\underline{2}} &= x(x-1), \\ x^{\underline{1}} &= x, \\ x^{\underline{0}} &= 1, \end{aligned}$$

можно заметить, что для перехода от $x^{\underline{3}}$ к $x^{\underline{2}}$, к $x^{\underline{1}}$ и к $x^{\underline{0}}$ мы делим на $x-2$, потом — на $x-1$, и потом — на x. Представляется желательным (если не обязательным) затем разделить на $x+1$, чтобы перейти от $x^{\underline{0}}$ к $x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$. Продолжая деление, мы получаем несколько первых убывающих степеней с отрицательными показателями,

$$\begin{aligned} x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1}\,, \\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,, \\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,, \end{aligned}$$

так что в общем случае определение отрицательных убывающих степеней таково:

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} \qquad \text{при } m > 0. \tag{2.51}$$

(Убывающие степени можно также определить и для вещественных и даже комплексных m, но мы отложим это до гл. 5.)

Все в комплексе...

Благодаря такому определению убывающие степени обретают дополнительные замечательные свойства. Возможно, наиболее важным из них является общее правило показателей, аналогичное правилу

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

для обычных степеней. Его вариант для убывающих степеней:

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}\,(x-m)^{\underline{n}}\,, \qquad \text{целые } m \text{ и } n. \tag{2.52}$$

Так, $x^{\underline{2+3}} = x^{\underline{2}}\,(x-2)^{\underline{3}}$, а при отрицательном n

$$\begin{aligned} x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}}\,(x-2)^{\underline{-3}} &= x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} \\ &= \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}. \end{aligned}$$

Если бы мы определили $x^{\underline{-1}}$ как $1/x$, а не как $1/(x+1)$, то правило показателей (2.52) оказалось бы несправедливым в случаях типа $m=-1$ и $n=1$. В действительности, можно было бы воспользоваться правилом (2.52), которое как раз и указывает, как следует определять убывающие степени с отрицательными показателями, если положить $m=-n$. Когда какое-то существующее обозначение распространяется на большее число случаев, всегда лучше формулировать определения таким образом, чтобы общие правила оставались справедливыми.

Правила показывают как положительные, так и отрицательные свои стороны.

Убедимся теперь в том, что решающее разностное свойство справедливо для установленных нами по-новому убывающих степеней. Действительно ли $\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$ при $m < 0$? Если, например, $m = -2$, то соответствующая разность

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\\ &= -2x^{\underline{-3}}.\end{aligned}$$

Да, все верно! Подобная проверка проходит при любом $m < 0$.

Следовательно, правило суммирования (2.50) остается справедливым как для отрицательных, так и для положительных убывающих степеней, до тех пор, пока не произойдет деление на нуль:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_a^b \qquad \text{при } m \neq -1.$$

Ну, а как же быть с $m = -1$? Вспомним, что при интегрировании при $m = -1$ мы получаем

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln x\,\Big|_a^b.$$

Нам хотелось бы иметь конечно-разностный аналог $\ln x$; другими словами, мы хотим найти функцию $f(x)$, такую, что

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Не очень трудно видеть, что такой функцией является

$$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x},$$

когда x — целое число, а эта величина — попросту гармоническое число H_x из (2.13). Таким образом, дискретным аналогом непрерывной функции $\ln x$ служит H_x. (Мы определим H_x для нецелых x только в гл. 6, а для ближайших целей будет вполне достаточно целых x. Мы также увидим в гл. 9, что при больших x величина $H_x - \ln x$ приближенно равна $0.577 + 1/(2x)$. Следовательно, H_x и $\ln x$ — не просто аналоги: обычно их значения отличаются менее чем на 1.)

В точности 0.577? Может, имеется в виду $1/\sqrt{3}$.

А может, и нет.

Теперь можно дать полное описание сумм убывающих степеней:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_a^b & \text{при } m \neq -1;\\ H_x\Big|_a^b & \text{при } m = -1. \end{cases} \tag{2.53}$$

Эта формула показывает, почему пресловутые „гармонические" числа очень гармонично возникают при решении дискретных задач, типа анализа задач „быстрой сортировки", тогда как так называемые „натуральные" логарифмы весьма натуральны при решении непрерывных задач.

Теперь, когда найден аналог для $\ln x$, посмотрим, имеется ли таковой для e^x. Какая функция $f(x)$ обладает свойством $\Delta f(x) = f(x)$, соответствующим тождеству $De^x = e^x$? Ответ прост:

$$f(x+1) - f(x) = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x+1) = 2f(x),$$

так что мы имеем дело с простой рекуррентностью и можем принять $f(x) = 2^x$ в качестве дискретной экспоненты.

В случае произвольного c разность функции c^x также достаточно проста, а именно,

$$\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x.$$

Следовательно, антиразностью функции c^x является $c^x/(c-1)$, если $c \neq 1$. Этот факт, вместе с основными правилами (2.47) и (2.48), дают нам компактный способ выведения общей формулы суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{a\leqslant k<b} c^k = \sum\nolimits_a^b c^x\,\delta x = \frac{c^x}{c-1}\bigg|_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1} \qquad \text{при } c \neq 1.$$

Всякий раз, когда мы сталкиваемся с функцией f, которая могла бы оказаться полезной в качестве замкнутого выражения суммы, можно вычислить ее разность $\Delta f = g$ — тем самым мы получаем функцию g, неопределенная сумма $\sum g(x)\,\delta x$ которой нам известна. Таблица 75 представляет собой начало перечня пар разность/антиразность, полезных при вычислении сумм.

'Таблица 75' — которая на странице 75. Доходит?

Несмотря на все эти параллели между непрерывной и дискретной математикой, некоторые непрерывные понятия не имеют дискретных аналогов. К примеру, „правило цепочки" в исчислении бесконечно малых — удобное правило вычисления производной „функции от функции"; однако в исчислении конечных разностей правила, соответствующего „правилу цепочки", нет, поскольку нет подходящего выражения для $\Delta f\big(g(x)\big)$. В дискретном случае затруднена также замена переменных, за исключением определенных случаев, типа замены x на $c \pm x$.

Однако для $\Delta\big(f(x)\,g(x)\big)$ *есть* весьма подходящее выражение, и оно обеспечивает нас правилом *суммирования по частям* — конечно-разностным аналогом того, что в исчислении бесконечно малых именуется „интегрированием по частям". Вспомним, что в исчислении бесконечно малых формула

$$D(uv) = u\,Dv + v\,Du$$

приводит к правилу интегрирования по частям,

$$\int u\,Dv = uv - \int v\,Du,$$

Таблица 75 Суммы и разности

$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$	$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	$c^x/(c-1)$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$

после интегрирования и перестановки членов; то же самое можно проделать и в исчислении конечных разностей.

Начнем с применения разностного оператора к произведению двух функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta\bigl(u(x)\,v(x)\bigr) &= u(x+1)\,v(x+1) - u(x)\,v(x)\\ &= u(x+1)\,v(x+1) - u(x)\,v(x+1)\\ &\qquad\qquad + u(x)\,v(x+1) - u(x)\,v(x)\\ &= u(x)\,\Delta v(x) + v(x+1)\,\Delta u(x)\,. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Эта формула может быть приведена к более удобному виду, если использовать *оператор сдвига* E, определяемый как

$$Ef(x) = f(x+1)\,.$$

Подставляя его вместо $v(x+1)$, получаем компактное правило для разности произведения:

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + Ev\,\Delta u\,. \tag{2.55}$$

(Здесь E доставляет некоторое неудобство, но зато делает это уравнение правильным.) Взяв неопределенную сумму от обеих частей этого равенства и переставив члены, мы получаем обещанное правило суммирования по частям:

В исчислении бесконечно малых мы полагаем $1 \to 0$, так что E пропадает.

$$\sum u\,\Delta v = uv - \sum Ev\,\Delta u\,. \tag{2.56}$$

Как и в исчислении бесконечно малых можно пристроить пределы суммирования ко всем трем членам, делая неопределенные суммы определенными.

Данное правило полезно, когда сумму слева вычислить труднее, чем сумму справа. Вот пример. Интеграл $\int xe^x\,dx$ обычно вычисляют по частям; его дискретным аналогом является сумма $\sum x2^x\,\delta x$, с которой мы уже сталкивались в этой главе, правда, записанной в виде $\sum_{k=0}^{n} k2^k$. Для суммирования по частям полагаем $u(x) = x$ и $\Delta v(x) = 2^x$; откуда $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ и $Ev(x) = 2^{x+1}$. Подстановка в (2.56) дает

А, я понял, $e^x = 2^x$ при достаточно малой 1.

$$\sum x2^x\,\delta x = x2^x - \sum 2^{x+1}\,\delta x = x2^x - 2^{x+1} + C\,.$$

А теперь можно воспользоваться этим для вычисления суммы, с которой мы имели дело раньше, расставив пределы суммирования:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum\nolimits_0^{n+1} x2^x\,\delta x\\ &= x2^x - 2^{x+1}\Big|_0^{n+1}\\ &= \big((n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}\big) - (0\cdot 2^0 - 2^1)\\ &= (n-1)2^{n+1} + 2\,.\end{aligned}$$

Вместо того чтобы использовать метод приведения, легче вычислить данную сумму таким методом, поскольку при этом не надо думать ни о чем.

Конечная цель математики — вообще избавиться от необходимости о чем-либо думать.

Где-то посреди этой главы мы наткнулись на формулу для $\sum_{0\leqslant k<n} H_k$ и сочли себя счастливыми. Но мы могли бы обнаружить нашу формулу (2.36) закономерно, если бы знали о суммировании по частям. Продемонстрируем это, взявшись вычислить даже более трудную на вид сумму $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$. На самом деле решение будет нетрудным, если исходить из аналогии с интегралом $\int x\ln x\,dx$: мы полагаем $u(x) = H_x$ и $\Delta v(x) = x = x^{\underline{1}}$, так что $\Delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = x^{\underline{2}}/2$, $Ev(x) = (x+1)^{\underline{2}}/2$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sum xH_x\,\delta x &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2}\,x^{\underline{-1}}\,\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{\underline{1}}\,\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{x^{\underline{2}}}{4} + C\,.\end{aligned}$$

(Переходя от первой строки ко второй, мы объединили две убывающие степени $(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}$, используя правило показателей (2.52) с $m=-1$ и $n=2$.) Теперь можно подключить пределы и заключить, что

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k = \sum\nolimits_0^n xH_x\,\delta x = \frac{n^{\underline{2}}}{2}\Big(H_n - \frac{1}{2}\Big)\,. \qquad (2.57)$$

2.7 БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

Вводя в начале главы $\sum$-обозначение, мы ловко уклонились от вопроса о бесконечных суммах, в сущности, заявив: „Отложим это на потом. А пока можно считать, что все встречающиеся суммы имеют только конечное число ненулевых членов". Но пришло, наконец, время расплаты — мы обязаны признать тот факт, что

Это называется ловко?

суммы могут быть и бесконечными. И, по правде говоря, бесконечные суммы сопровождаются как приятными, так и неприятными обстоятельствами.

„Искусный ораторский прием состоит в том, чтобы постепенно действовать на воображение слушателей последовательным изложением деталей, а затем уже сделать общий вывод. То же самое мы имеем при последовательном складывании членов суммы."
— А. Н. Уайтхед, [297, с. 181].*

Сперва о неприятном: оказывается, что те методы, которые мы применяли при обращении с суммами, *не* всегда справедливы для бесконечных сумм. А теперь о приятном: существует обширный просто устроенный класс бесконечных сумм, для которых вполне законны все те операции, что мы выполняли. Причины, кроющиеся за обоими обстоятельствами, станут ясны после того, как мы выясним подлинный смысл суммирования.

Все знают, что такое конечная сумма: мы добавляем к общему итогу все слагаемые, одно за другим, покуда все они не окажутся сложенными. Но бесконечную сумму следует определить более деликатно, чтобы не попасть впросак.

Например, представляется естественным считать, что бесконечная сумма

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \cdots$$

равна 2, поскольку при ее удвоении получаем

$$2S = 2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots = 2 + S\,.$$

Но тогда, следуя той же логике, надо бы считать сумму

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

Правильно: $1+2+4+8+\cdots$ — „бесконечно точное" представление числа -1 в двоичном компьютере с неограниченной длиной слова.

равной -1, ибо при ее удвоении получаем

$$2T = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots = T - 1\,.$$

Происходит нечто странное: как можно получить отрицательное число, суммируя положительные величины? По-видимому, лучше оставить сумму T неопределенной, а, возможно, нам следует считать, что $T = \infty$, поскольку слагаемые в T становятся больше любого фиксированного конечного числа. (Заметим, что величина ∞ является другим „решением" уравнения $2T = T - 1$; она также „решает" и уравнение $2S = 2 + S$.)

Попробуем дать надлежащее определение величины произвольной суммы $\sum_{k\in K} a_k$, где множество K может быть бесконечным. Для начала предположим, что все члены a_k *неотрицательны*. В этом случае подходящее определение найти нетрудно: если для любого *конечного* подмножества $F \subset K$ существует ограничивающая постоянная A, такая, что

$$\sum_{k\in F} a_k \leqslant A,$$

то мы полагаем сумму $\sum_{k\in K} a_k$ равной *наименьшей* из всех таких A. (Как следует из хорошо известных свойств вещественных чисел, множество всех таких A всегда содержит наименьший элемент.) Но если такой ограничивающей постоянной A не существует, мы считаем, что $\sum_{k\in K} a_k = \infty$; это означает, что если A —

некоторое вещественное число, то найдется некоторое конечное число членов a_k, сумма которых превосходит A.

Определение в предыдущем абзаце сформулировано столь деликатно, что оно не зависит ни от какого порядка, который может существовать в индексном множестве K. Поэтому те доводы, которые мы собираемся привести, будут справедливы не только для сумм по множеству целых чисел, но и для кратных сумм со многими индексами $k_1, k_2, \ldots$.

Множество K может даже быть несчетным. Но если существует ограничивающая постоянная A, то лишь счетное число его членов может быть отлично от нуля, поскольку самое большее nA членов $\geqslant 1/n$.

В частности, когда K — множество неотрицательных целых чисел, наше определение для неотрицательных членов a_k означает, что

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\,.$$

И вот почему: любая неубывающая последовательность вещественных чисел имеет предел (возможно, равный ∞). Если этот предел равен A, а F — некоторое конечное множество неотрицательных целых чисел, все из которых $\leqslant n$, то $\sum_{k\in F} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant A$; следовательно, либо $A = \infty$, либо A — ограничивающая постоянная. Но если A' — некоторое число, меньшее установленной границы A, то найдется такое n, что $\sum_{k=0}^{n} a_k > A'$; следовательно, конечное множество $F = \{0, 1, \ldots, n\}$ свидетельствует о том факте, что A' не является ограничивающей постоянной.

А теперь можно легко вычислить величины конкретных бесконечных сумм в соответствии с только что данным определением. Например, если $a_k = x^k$, то

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} 1/(1-x), & \text{если } 0 \leqslant x < 1,\\ \infty, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

В частности, бесконечные суммы S и T, которые обсуждались минуту назад, равны, соответственно, 2 и ∞ — как мы и предполагали. Другой заслуживающий внимания пример:

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k\geqslant 0} k^{\underline{-2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^{\underline{-1}}}{-1}\bigg|_0^n = 1\,.$$

Теперь рассмотрим тот случай, когда наряду с неотрицательными сумма может содержать отрицательные члены. Какой, к примеру, должна быть величина суммы

$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k = 1-1+1-1+1-1+\cdots?$$

Если сгруппировать члены попарно, то получаем:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots\,,$$

„Aggregatum quantitatum $a-a+a-a+a-a$ etc. nunc est $= a$, nunc $= 0$, adeoque continuata in infinitum serie ponendus $= a/2$, fateor acumen et veritatem animadversionis tuæ.“
— Г. Гранди [80]

так что сумма оказывается равной нулю; но если начать группировку по парам шагом позже, то получаем

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-0-\cdots,$$

т. е. сумма равна единице.

Можно было бы также попробовать положить $x=-1$ в формуле $\sum_{k\geqslant 0} x^k = 1/(1-x)$, поскольку мы знаем, что эта формула справедлива при $0\leqslant x<1$; но тогда мы будем вынуждены признать, что данная бесконечная сумма равна $\frac{1}{2}$ — а ведь это сумма целых чисел!

Другим любопытным примером служит бесконечная в обе стороны сумма $\sum_k a_k$, в которой $a_k = 1/(k+1)$ при $k\geqslant 0$ и $a_k = 1/(k-1)$ при $k<0$. Ее можно записать как

$$\cdots+(-\tfrac{1}{4})+(-\tfrac{1}{3})+(-\tfrac{1}{2})+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots. \tag{2.58}$$

Если мы вычисляем эту сумму, отталкиваясь от „центрального“ элемента и двигаясь наружу,

$$\cdots+\Bigl(-\tfrac{1}{4}+\bigl(-\tfrac{1}{3}+(-\tfrac{1}{2}+(1)+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{3}\bigr)+\tfrac{1}{4}\Bigr)+\cdots,$$

то получаем 1; и мы получим ту же 1, если сдвинем все скобки на один элемент влево,

$$\cdots+\Bigl(-\tfrac{1}{5}+\bigl(-\tfrac{1}{4}+(-\tfrac{1}{3}+(-\tfrac{1}{2})+1)+\tfrac{1}{2}\bigr)+\tfrac{1}{3}\Bigr)+\cdots,$$

поскольку сумма всех чисел, заключенных в n внутренних скобках, есть

$$-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}-\cdots-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} = 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что величина суммы остается равной 1, если эти скобки передвинуть на любое фиксированное число элементов влево или вправо — это укрепляет нас во мнении, что сумма действительно равна 1. Но, с другой стороны, если сгруппировать члены следующим образом:

$$\cdots+\Bigl(-\tfrac{1}{4}+\bigl(-\tfrac{1}{3}+(-\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\bigr)+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\Bigr)+\cdots,$$

то n-я пара внутренних скобок будет содержать числа

$$-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}-\cdots-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$= 1+H_{2n}-H_{n+1}.$$

Это что, первая страница без граффити?

В гл. 9 будет показано, что $\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-H_{n+1}) = \ln 2$,— следовательно, данный метод группировки приводит к мысли, что бесконечная в обе стороны сумма на самом деле должна равняться $1+\ln 2$.

Есть нечто бессмысленное в сумме, которая дает разные значения при сложении ее членов разными способами. В современных руководствах по анализу имеется целый ряд определений, с помощью которых подобным патологическим суммам приписываются осмысленные значения; но если мы позаимствуем эти определения, то не сможем оперировать с $\sum$-обозначением так же свободно, как делали это до сих пор. Цели этой книги таковы, что нам не нужны рафинированные уточнения понятия „условной сходимости" — мы будем придерживаться такого определения бесконечных сумм, которое оставляет в силе все использованные нами в настоящей главе операции.

В сущности, наше определение бесконечных сумм достаточно просто. Пусть K — некоторое множество, а a_k — вещественнозначный член суммы, определенный при каждом $k \in K$. (На самом деле, 'k' может означать несколько индексов $k_1, k_2, \ldots$, так что само множество K может быть многомерным.) Всякое вещественное число x можно представить в виде разности его положительной и отрицательной частей,

$$x = x^+ - x^-, \qquad \text{где } x^+ = x\cdot[x>0] \text{ и } x^- = -x\cdot[x<0].$$

(Либо $x^+ = 0$, либо $x^- = 0$.) Мы уже объясняли, как определять величины бесконечных сумм $\sum_{k\in K} a_k^+$ и $\sum_{k\in K} a_k^-$, поскольку a_k^+ и a_k^- неотрицательны. Поэтому наше общее определение таково:

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k^+ - \sum_{k\in K} a_k^-, \qquad (2.59)$$

если только обе суммы в правой части не равны ∞. В последнем случае сумма $\sum_{k\in K} a_k$ остается неопределенной.

Пусть $A^+ = \sum_{k\in K} a_k^+$ и $A^- = \sum_{k\in K} a_k^-$. Если обе суммы A^+ и A^- конечны, то говорят, что сумма $\sum_{k\in K} a_k$ *абсолютно сходится* к $A = A^+ - A^-$. Если $A^+ = \infty$, а A^- конечна, то говорят, что сумма $\sum_{k\in K} a_k$ *расходится* к $+\infty$. Аналогично, если $A^- = \infty$, а A^+ конечна, то говорят, что $\sum_{k\in K} a_k$ расходится к $-\infty$. Если же $A^+ = A^- = \infty$, то не говорят ничего.

Другими словами, абсолютная сходимость означает, что сходится сумма абсолютных величин.

Мы начинали с определения, которое „работало" при неотрицательных членах суммы, а затем распространили его на любые вещественнозначные члены. Если же члены суммы a_k — комплексные числа, то очевидным образом наше определение можно распространить и на этот случай: сумма $\sum_{k\in K} a_k$ определяется как $\sum_{k\in K} \Re a_k + i\sum_{k\in K} \Im a_k$, где $\Re a_k$ и $\Im a_k$ — вещественная и мнимая части a_k при условии, что обе эти суммы существуют. В противном случае сумма $\sum_{k\in K} a_k$ не определена. (См. упр. 18.)

Неприятное, как уже говорилось, заключается в том, что некоторые бесконечные суммы приходится оставлять неопределенными, поскольку операции, которые мы выполняем с ними, могут приводить к несуразностям. (См. упр. 34.) Приятное же заключается в том, что все операции из настоящей главы абсолютно справедливы всякий раз, когда мы имеем дело с суммами, которые абсолютно сходятся в только что установленном смысле.

Мы можем подтвердить это приятное обстоятельство, продемонстрировав, что каждое из наших правил преобразования сумм оставляет величину любой абсолютно сходящейся суммы неизменной. Более определенно, это означает, что следует проверить выполнение распределительного, сочетательного и переместительного законов, плюс правило, согласно которому можно начинать суммировать по любой переменной; все остальное, что мы выполняли в настоящей главе, может быть выведено из этих четырех основных операций с суммами.

Распределительный закон (2.15) можно сформулировать более строго следующим образом: если сумма $\sum_{k \in K} a_k$ абсолютно сходится к A и если c — некоторое комплексное число, то $\sum_{k \in K} ca_k$ абсолютно сходится к cA. Это можно доказать, разбивая сумму сначала на вещественную и мнимую, затем на положительную и отрицательную части, как разбивали прежде, и доказывая частный случай, когда $c > 0$ и каждый член суммы a_k неотрицателен. Доказательство в этом частном случае проходит в силу того, что $\sum_{k \in F} ca_k = c \sum_{k \in F} a_k$ для любого конечного множества F; последний же факт доказывается индукцией по размеру множества F.

Сочетательный закон (2.16) может быть сформулирован следующим образом: если суммы $\sum_{k \in K} a_k$ и $\sum_{k \in K} b_k$ абсолютно сходятся соответственно к A и B, то сумма $\sum_{k \in K}(a_k + b_k)$ абсолютно сходится к $A+B$. Оказывается, что это является частным случаем более общей теоремы, которую мы вскоре докажем.

Переместительный же закон (2.17) в действительности нет нужды доказывать, поскольку при обсуждении формулы (2.35) мы показали, как выводить его в качестве частного случая общего правила изменения порядка суммирования.

Главным для нас остается доказательство основного принципа для кратных сумм: *абсолютно сходящиеся суммы с двумя и более индексами всегда можно начинать суммировать по любому из этих индексов*. Фактически, мы должны доказать, что если J и элементы $\{K_j \mid j \in J\}$ — некоторые множества индексов, такие, что

Когда вы доберетесь досюда, на первый раз лучше всего перевернуть эту страницу.
— Сочувствующий ассистент

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K_j}} a_{j,k} \quad \text{абсолютно сходится к } A\,,$$

то для каждого $j \in J$ найдутся комплексные числа A_j, такие, что

$$\sum_{k \in K_j} a_{j,k} \quad \text{абсолютно сходится к } A_j \quad \text{и}$$
$$\sum_{j \in J} A_j \quad \text{абсолютно сходится к } A\,.$$

Это утверждение достаточно доказать для случая, когда все члены суммы неотрицательны, ибо в общем случае все можно разбить на вещественную и мнимую, положительную и отрицательную части, как это делалось прежде. Поэтому предположим, что $a_{j,k} \geqslant 0$ для всех пар $(j,k) \in M$, где M — основное индексное множество $\{(j,k) \mid j \in J, k \in K_j\}$.

Дано, что сумма $\sum_{(j,k)\in M} a_{j,k}$ конечна, а именно, что

$$\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A$$

для всех конечных подмножеств $F \subseteq M$ и что A является наименьшей из таких верхних границ. Если j — некоторый элемент множества J, то каждая сумма вида $\sum_{k\in F_j} a_{j,k}$, где F_j — конечное подмножество K_j, ограничена сверху числом A. Следовательно, эти конечные суммы имеют наименьшую верхнюю границу $A_j \geqslant 0$, и, по определению, $\sum_{k\in K_j} a_{j,k} = A_j$.

Еще нам нужно доказать, что A является наименьшей верхней границей множества $\sum_{j\in G} A_j$ для всех конечных подмножеств $G \subseteq J$. Предположим, что G — конечное подмножество множества J, такое, что $\sum_{j\in G} A_j = A' > A$. Мы можем найти конечные подмножества $F_j \subseteq K_j$, такие, что $\sum_{k\in F_j} a_{j,k} > (A/A')A_j$, при каждом $j \in G$, для которого $A_j > 0$. По крайней мере одно такое j найдется. Но тогда $\sum_{j\in G, k\in F_j} a_{j,k} > (A/A') \sum_{j\in G} A_j = A$, что противоречит тому факту, что $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A$ для всех конечных подмножеств $F \subseteq M$. Следовательно, $\sum_{j\in G} A_j \leqslant A$ для любого конечного подмножества $G \subseteq J$.

Наконец, пусть A' — некоторое вещественное число, меньшее A. Доказательство будет завершено, если мы сможем найти конечное множество $G \subseteq J$, такое, что $\sum_{j\in G} A_j > A'$. Известно, что существует конечное множество $F \subseteq M$, такое, что $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$; пусть G будет множеством индексов j в этом F, и пусть $F_j = \{k \mid (j,k) \in F\}$. Тогда $\sum_{j\in G} A_j \geqslant \sum_{j\in G} \sum_{k\in F_j} a_{j,k} = \sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$. ЧТД.

Итак, теперь все законно! Все, что мы делали с бесконечными суммами, оправданно постольку, поскольку для любой конечной суммы абсолютных величин ее членов существует конечная граница. Так как бесконечная в обе стороны сумма (2.58) давала нам два разных ответа при вычислении ее двумя разными способами, ее положительные члены $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ должны расходиться к ∞ — в противном случае нами был бы получен один и тот же ответ, независимо от способа группировки ее членов.

Так почему же в последнее время я только и слышу о „гармонической сходимости"?

„Для развития мышления действительно полезным является только его упражнение. Самостоятельное решение трудных и интересных задач больше даст читателю, чем приводимые нами афоризмы, однако для начала и они будут небесполезны!"
— Д. Пойа и Д. Сегё, [244, с. 10]. (Добавл. перев.)

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Что означает обозначение

$$\sum_{k=4}^{0} q_k?$$

2 Упростите выражение $x \cdot \big([x>0]-[x<0]\big)$.

3 Продемонстрируйте ваше понимание $\sum$-обозначения, выписав суммы

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant 5} a_k \qquad \text{и} \qquad \sum_{0\leqslant k^2\leqslant 5} a_{k^2}$$

в развернутом виде. (Осторожно — вторая сумма с подвохом.)

4 Выразите тройную сумму

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} a_{ijk}$$

в виде троекратной суммы (с тремя сигмами):

a суммируя вначале по k, потом по j, а затем по i;

b суммируя вначале по i, потом по j, а затем по k.

Выпишите также ваши троекратные суммы в развернутом виде без $\sum$-обозначения, используя (круглые) скобки, чтобы показать, чтó складывается вначале.

5 Что неверно в следующей выкладке:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_j}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} n = n^2\,?$$

6 Выразите $\sum_k [1\leqslant j\leqslant k\leqslant n]$ в виде функции j и n.

Дает возрастающие степени.

7 Пусть $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Что такое $\nabla(x^{\overline{m}})$?

8 Чему равно $0^{\underline{m}}$, когда m — некоторое целое число?

9 Что представляет собой правило показателей для возрастающих факториальных степеней — аналог правила (2.52)? Воспользуйтесь им для определения $x^{\overline{-n}}$.

10 В тексте выведена следующая формула для разности произведения:

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + \mathrm{E}v\,\Delta u\,.$$

Как может быть эта формула правильной: ведь ее левая часть симметрична относительно u и v, а правая — нет?

Обязательные упражнения

11 Общее правило (2.56) суммирования по частям эквивалентно следующему:

$$\sum_{0\leqslant k<n}(a_{k+1}-a_k)b_k$$
$$= a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\leqslant k<n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) \quad \text{при } n \geqslant 0.$$

Докажите эту формулу непосредственно, используя распределительный, сочетательный и переместительный законы.

12 Покажите, что функция $p(k) = k + (-1)^k c$ является перестановкой множества всех целых чисел, когда c — целое число.

13 Примените репертуарный метод для нахождения суммы $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$ в замкнутой форме.

14 Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{n} k2^k$, переписав ее в виде двукратной суммы $\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 2^k$.

15 Вычислите $⧉_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ методом 5 из текста вот как: сперва запишите $⧉_n + \Box_n = 2\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} jk$, а затем примените формулу (2.33).

16 Докажите, что $x^{\underline{m}}/(x-n)^{\underline{m}} = x^{\underline{n}}/(x-m)^{\underline{n}}$, если только ни один из знаменателей не равен нулю.

17 Покажите, что следующие формулы могут быть использованы для взаимного обращения возрастающих и убывающих факториальных степеней при всех целых m:

$$x^{\overline{m}} = (-1)^m(-x)^{\underline{m}} = (x+m-1)^{\underline{m}} = 1/(x-1)^{\underline{-m}},$$
$$x^{\underline{m}} = (-1)^m(-x)^{\overline{m}} = (x-m+1)^{\overline{m}} = 1/(x+1)^{\overline{-m}}.$$

(Степень $x^{\overline{-m}}$ определена в ответе к упр. 9.)

18 Пусть $\Re z$ и $\Im z$ — действительная и мнимая части комплексного числа z. Модуль $|z|$ равен $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$. Говорят, что сумма $\sum_{k\in K} a_k$ комплексных членов a_k сходится абсолютно, если сходятся абсолютно обе вещественные суммы $\sum_{k\in K} \Re a_k$ и $\sum_{k\in K} \Im a_k$. Докажите, что $\sum_{k\in K} a_k$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда существует ограничивающая постоянная B, такая, что $\sum_{k\in F} |a_k| \leqslant B$ для всех конечных подмножеств $F \subseteq K$.

Домашние задания

19 Подберите суммирующий множитель и решите рекуррентность

$$T_0 = 5,$$
$$2T_n = nT_{n-1} + 3\cdot n! \qquad \text{при } n > 0.$$

20 Попробуйте, вычисляя $\sum_{k=0}^{n} kH_k$ методом приведения, найти величину $\sum_{k=0}^{n} H_k$.

21 Вычислите суммы $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k$ и $U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^2$ методом приведения, считая, что $n \geqslant 0$.

Трудно отождествить того, кто умер почти 2 века тому назад.

22 Докажите *тождество Лагранжа* (не прибегая к индукции):

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k - a_kb_j)^2 = \Bigl(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Bigr) - \Bigl(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Bigr)^2 .$$

Докажите далее более общее тождество для суммы:

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k - a_kb_j)(A_jB_k - A_kB_j) .$$

23 Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)/\bigl(k(k+1)\bigr)$ двумя способами:

a заменяя дробь $1/k(k+1)$ „элементарными дробями“ $1/k - 1/(k+1)$;

b суммируя по частям.

24 Чему равна сумма $\sum_{0\leqslant k<n} H_k/(k+1)(k+2)$? *Указание:* обобщите вывод (2.57).

Это обозначение было введено Якоби [400] в 1829 г.

25 Обозначение $\prod_{k\in K} a_k$ означает произведение чисел a_k при всех $k \in K$. Предположим для простоты, что $a_k \neq 1$ лишь для конечного числа k, так что нет необходимости определять бесконечные произведения. Каким законам, аналогичным распределительному, сочетательному и переместительному законам для $\sum$-операции, удовлетворяет подобная $\prod$-операция?

26 Выразите двойное произведение $\prod_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_ja_k$ через одинарное произведение $\prod_{k=1}^{n} a_k$, манипулируя с $\prod$-обозначением. (Это упражнение дает нам произведение элементов верхней треугольной матрицы по аналогии с их суммой (2.33).)

27 Вычислите величину $\Delta(c^{\underline{x}})$ и используйте ее для установления величины суммы $\sum_{k=1}^{n}(-2)^{\underline{k}}/k$.

28 В каком месте следующий вывод сбивается с пути истинного?

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k\geqslant 1}\Bigl(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\Bigr)\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1}\Bigl(\frac{k}{j}[j=k+1] - \frac{j}{k}[j=k-1]\Bigr)\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\Bigl(\frac{k}{j}[j=k+1] - \frac{j}{k}[j=k-1]\Bigr)\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\Bigl(\frac{k}{j}[k=j-1] - \frac{j}{k}[k=j+1]\Bigr)\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\Bigl(\frac{j-1}{j} - \frac{j}{j+1}\Bigr) = \sum_{j\geqslant 1}\frac{-1}{j(j+1)} = -1 .
\end{aligned}$$

Контрольные работы

29 Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k/(4k^2-1)$.

30 Игрокам в крибедж издавна известно, что $15 = 7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5$. Найдите количество способов представления числа 1050 в виде суммы последовательных положительных целых чисел. (Тривиальное представление '1050' в виде самого себя считается одним из таких способов; следовательно, имеются четыре, а не три способа представления числа 15 в виде суммы последовательных положительных целых чисел. Между прочим, в этой задаче не предполагается знания правил игры в крибедж.)

31 Дзета-функция Римана $\zeta(k)$ определяется в виде бесконечной суммы

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots=\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{j^k}.$$

Докажите, что $\sum_{k\geqslant 2}\bigl(\zeta(k)-1\bigr)=1$. А чему равна сумма $\sum_{k\geqslant 1}\bigl(\zeta(2k)-1\bigr)$?

32 Пусть $a \dot{-} b = \max(0, a-b)$. Докажите, что

$$\sum_{k\geqslant 0}\min(k, x \dot{-} k) = \sum_{k\geqslant 0}\bigl(x \dot{-} (2k+1)\bigr)$$

при любом вещественном $x \geqslant 0$, и вычислите эту сумму в замкнутой форме.

Конкурсные задачи

33 Пусть $\bigwedge_{k\in K} a_k$ обозначает минимальное из чисел a_k (или их наибольшую нижнюю грань, если K бесконечно), считая, что каждое a_k либо вещественное число, либо $\pm\infty$. Какие законы справедливы для $\bigwedge$-операции, аналогичные тем, которые имеют место для $\sum$ и $\prod$? (См. упр. 25.)

Законы джунглей.

34 Докажите, что если сумма $\sum_{k\in K} a_k$ не определена в соответствии с определением (2.59), то она расслаивается в следующем смысле: если A^- и A^+ — любые заданные вещественные числа, то можно найти последовательность конечных подмножеств $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ множества K, такую, что

$$\sum_{k\in F_n} a_k \leqslant A^-, \text{ если } n \text{ нечетно,}$$

$$\sum_{k\in F_n} a_k \geqslant A^+, \text{ если } n \text{ четно.}$$

35 Докажите теорему Гольдбаха

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\cdots=\sum_{k\in P}\frac{1}{k-1},$$

Совершенно искаженные совершенные степени.

где P — множество „совершенных степеней“, определяемое рекурсивно как:

$$P = \{\, m^n \mid m \geqslant 2,\, n \geqslant 2,\, m \notin P \,\}.$$

36 „Самоописательная последовательность“ Соломона Голомба $\langle f(1), f(2), f(3), \ldots \rangle$ — единственная неубывающая последовательность целых чисел, обладающая тем свойством, что она содержит ровно $f(k)$ вхождений каждого k. По кратком размышлении становится ясно, что эта последовательность должна начинаться так:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

Пусть $g(n)$ — наибольшее целое m, такое, что $f(m) = n$. Покажите, что

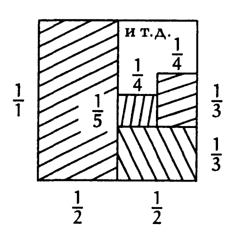
a $g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$;

b $g(g(n)) = \sum_{k=1}^{n} kf(k)$;

c $g(g(g(n))) = \frac{1}{2}ng(n)(g(n)+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} g(k)(g(k)+1)$.

Исследовательская проблема

37 Можно ли уложить все прямоугольники размера $1/k$ на $1/(k+1)$ при $k \geqslant 1$ в квадрате размера 1 на 1? (Вспомните, что сумма их площадей равна 1.)



3

Целочисленные функции

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА составляют костяк дискретной математики, и нам часто приходится округлять дробные или произвольные вещественные числа в целые. Наша цель в этой главе — получить представление и навыки в обращении с подобными округлениями и узнать кое-что об их замечательных свойствах.

3.1 ПОЛ/ПОТОЛОК: ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Начнем с настила пола и перекрытия потолка — определений для любого вещественного числа x функций наибольшего и наименьшего целого:

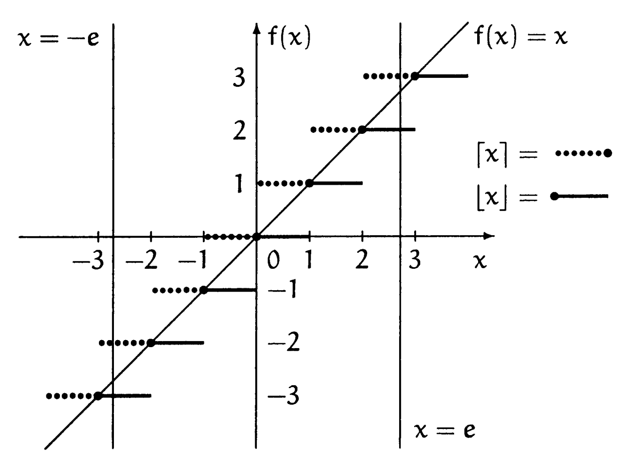
$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \text{наибольшее целое, меньшее или равное } x\,; \\ \lceil x \rceil &= \text{наименьшее целое, большее или равное } x\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти обозначения, как и названия „пол“ и „потолок“, были введены в обиход Кеннетом Э. Айверсоном в начале 60-х годов [4, с. 12]. Он обнаружил, что наборщики вполне могли бы обойтись имеющимися литерами '[' и ']', срезав их верхушки и основания. Предложенные им обозначения стали настолько популярными, что теперь скобки „пола“ и „потолка“ можно встретить в любой статье без какого-либо пояснения. До недавнего времени чаще всего использовалась запись '[x]' для наибольшего целого $\leqslant x$, а для функции наименьшего целого подходящий эквивалент отсутствовал. Впрочем, некоторые авторы пытались писать ']x[' — затея, обреченная на провал.

)У-ух!(

Помимо многозначности в обозначениях, существует неоднозначность в существе этих функций. Так, в некоторых калькуляторах имеется функция INT, определяемая как $\lfloor x \rfloor$ при положительном x и как $\lceil x \rceil$ при отрицательном x. Вероятно, создатели таких калькуляторов хотели, чтобы их функция INT удовлетворяла соотношению $\mathrm{INT}(-x) = -\mathrm{INT}(x)$. Но мы останемся приверженцами наших функций пол и потолок, поскольку они обладают гораздо более привлекательными, чем это, свойствами.

Один из подходящих способов получить представление о функциях пол и потолок — разобраться в их графиках, которые располагаются лесенкой выше и ниже линии „перил“ $f(x) = x$:



К примеру, из данного графика видно, что

$$\lfloor e \rfloor = 2, \qquad \lfloor -e \rfloor = -3,$$
$$\lceil e \rceil = 3, \qquad \lceil -e \rceil = -2,$$

поскольку $e = 2.71828\ldots$.

Глядя на эту графическую иллюстрацию, можно отметить ряд фактов относительно полов и потолков. Прежде всего, поскольку функция пол лежит на и под диагональной линией $f(x) = x$, то $\lfloor x \rfloor \leqslant x$; точно так же $\lceil x \rceil \geqslant x$. (Впрочем, это и так ясно из определения.) В целых точках обе эти функции совпадают:

$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \text{ — целое} \iff \lceil x \rceil = x.$$

(Мы пользуемся обозначением '$\iff$', подразумевая под этим „тогда и только тогда“.) А если они не совпадают, то потолок ровно на 1 выше пола:

Остроумно. В соответствии со скобочной нотацией Айверсона это законное равенство.

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = [x \text{ — не целое}]. \tag{3.2}$$

Если же сдвинуть диагональную линию вниз на единицу, то она целиком окажется под функцией пол, так что $x - 1 < \lfloor x \rfloor$; точно так же $x + 1 > \lceil x \rceil$. Объединяя эти наблюдения, получаем, что

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1. \tag{3.3}$$

И, наконец, данные функции являются отражениями друг друга относительно обеих осей:

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, \qquad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor. \tag{3.4}$$

Таким образом, каждая из них легко выражается через другую. Это обстоятельство позволяет объяснить, почему функция потолок прежде не имела собственного обозначения. Но потолки

встречаются столь часто, что заслуживают специальных знаков отличия, точно так же, как нами были присвоены специальные обозначения возрастающим, равно как и убывающим, степеням. У математиков издавна есть синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс, максимум и минимум — а теперь у нас есть как пол, так и потолок.

А на следующей неделе будут и стены.

Для того чтобы не просто довольствоваться графической иллюстрацией неких фактов, а действительно доказать свойства этих функций, особенно полезны следующие четыре правила:

$$\begin{aligned}
\lfloor x\rfloor = n &\iff n \leqslant x < n+1\,, && \text{(a)}\\
\lfloor x\rfloor = n &\iff x-1 < n \leqslant x\,, && \text{(b)}\\
\lceil x\rceil = n &\iff n-1 < x \leqslant n\,, && \text{(c)}\\
\lceil x\rceil = n &\iff x \leqslant n < x+1\,. && \text{(d)}
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

(Во всех четырех случаях считается, что n — целое, а x — вещественное число.) Правила (a) и (c) суть немедленные следствия определения (3.1); правила (b) и (d) суть те же самые с той лишь разницей, что данные неравенства переставлены так, что n оказывается в середине.

Целочисленное слагаемое можно вносить и выносить в/за скобки пола (или потолка):

$$\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n\,, \qquad n\text{ — целое.} \qquad (3.6)$$

(Действительно, правило (3.5(a)) утверждает, что это равенство эквивалентно неравенствам $\lfloor x\rfloor + n \leqslant x+n < \lfloor x\rfloor + n + 1$.) Но аналоги этой операции — типа вынесения за скобки постоянного множителя — в общем случае недопустимы. Так, $\lfloor nx\rfloor \neq n\lfloor x\rfloor$, когда $n = 2$ и $x = 1/2$. Это значит, что скобки пола и потолка недостаточно гибки,— мы счастливы уже тогда, когда удается вообще отделаться от их присутствия либо что-то сделать при их наличии.

Оказывается, что имеется много случаев, когда скобки пола и потолка излишни и их можно либо вставлять, либо удалять — как нам угодно. Так, любое неравенство между вещественными и целыми числами равносильно неравенству с полом или потолком между целыми числами:

$$\begin{aligned}
x < n &\iff \lfloor x\rfloor < n\,, && \text{(a)}\\
n < x &\iff n < \lceil x\rceil\,, && \text{(b)}\\
x \leqslant n &\iff \lceil x\rceil \leqslant n\,, && \text{(c)}\\
n \leqslant x &\iff n \leqslant \lfloor x\rfloor\,. && \text{(d)}
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

Эти правила легко доказываются. Например, если $x < n$, то наверняка $\lfloor x\rfloor < n$, так как $\lfloor x\rfloor \leqslant x$. И наоборот, если $\lfloor x\rfloor < n$, то непременно $x < n$, так как $x < \lfloor x\rfloor + 1$ и $\lfloor x\rfloor + 1 \leqslant n$.

Было бы здóрово, если бы все четыре правила в (3.7) так же легко запоминались, как и доказывались. Каждое неравенство без пола или потолка соответствует такому же неравенству с полом

или потолком, но нужно дважды подумать, прежде чем решить, которое из двух годится.

Разность между x и $\lfloor x \rfloor$ называется *дробной частью* x и в приложениях возникает столь часто, что заслуживает собственного обозначения:

М-да... Лучше не обозначать дробную часть через $\{x\}$, когда ее можно спутать с множеством, содержащим x в качестве своего единственного элемента.

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor . \tag{3.8}$$

Иногда $\lfloor x \rfloor$ называется *целой частью* x, поскольку $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Если вещественное число x может быть записано в виде $x = n + \theta$, где n — целое число, а $0 \leqslant \theta < 1$, то на основании (3.5(a)) можно заключить, что $n = \lfloor x \rfloor$ и $\theta = \{x\}$.

Равенство (3.6) не выполняется, если n — вещественное число. Но, вообще-то, для $\lfloor x+y \rfloor$ имеются всего лишь две возможности. Если x и y записать в виде $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ и $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, то получим $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$. А поскольку $0 \leqslant \{x\} + \{y\} < 2$, то оказывается, что в некоторых случаях $\lfloor x+y \rfloor$ — это $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, а в остальных — это $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Второе случается тогда и только тогда, когда происходит „перенос" за десятичную точку при сложении дробных частей $\{x\}$ и $\{y\}$.

3.2 ПОЛ/ПОТОЛОК: ПРИМЕНЕНИЯ

Итак, мы подобрали основные инструменты для работы с полами и потолками. Опробуем их на деле, начав с простой задачки: что такое $\lceil \lg 35 \rceil$? (Следуя предложению Эдварда М. Рейнгольда, мы используем 'lg' для обозначения логарифма по основанию 2.) Ну, поскольку $2^5 < 35 \leqslant 2^6$, можно взять логарифмы, получая $5 < \lg 35 \leqslant 6$,— таким образом, правило (3.5(c)) утверждает, что $\lceil \lg 35 \rceil = 6$.

Заметим, что будучи записанным в системе счисления с основанием 2, число 35 тоже состоит из шести битов: $35 = (100011)_2$. А верно ли, что $\lceil \lg n \rceil$ — это всегда длина n, записанного в двоичной форме? Не всегда. Для записи $32 = (100000)_2$ тоже необходимо шесть битов, так что $\lceil \lg n \rceil$ — неверный ответ на этот вопрос. (Он неверен только в случае, когда n является степенью 2, но это означает, что он неверен в бесконечном числе случаев.) Правильный же ответ можно получить, заметив, что для записи каждого числа n, такого, что $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$, требуется m битов. А поскольку $m - 1 = \lfloor \lg n \rfloor$ по правилу (3.5(a)), то $m = \lfloor \lg n \rfloor + 1$. То есть, для того чтобы выразить любое $n > 0$ в двоичной форме, необходимо $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ битов. Исходя из правила (3.5(c)), аналогичный вывод дает ответ $\lceil \lg(n+1) \rceil$ — эта формула справедлива даже при $n = 0$, если нам хочется считать, что для записи $n = 0$ в двоичной форме требуется нуль битов.

Обратимся далее к конструкциям с несколькими полами и потолками. Что такое $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$? Ответ прост: поскольку $\lfloor x \rfloor$ — целое число, то $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$ — это просто $\lfloor x \rfloor$. Этому же равно любое другое выражение, в котором самый внутренний $\lfloor x \rfloor$ окружен каким угодно числом полов и потолков.

А вот орешек покрепче: разгрызите-ка такую задачку — верно или неверно утверждение, что

$$\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor \qquad \text{при вещественном } x \geqslant 0. \qquad (3.9)$$

Очевидно, это равенство справедливо, когда x — целое число, ибо тогда $x = \lfloor x\rfloor$. Но это является равенством и для $\pi = 3.14159\ldots$, и для $e = 2.71828\ldots$, и для $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803\ldots$, ибо во всех этих частных случаях мы получаем $1 = 1$. Наша безуспешная попытка найти какой-либо опровергающий пример наводит на мысль, что равенство справедливо и в общем случае, так что давайте попробуем его доказать.

(Конечно же, π, e и ϕ — это первые вещественные числа, которые надо попробовать,— не так ли?)

Между прочим, когда мы сталкиваемся с выбором между „доказать или опровергнуть“, то обычно предпочитаем вначале опровергнуть с помощью какого-нибудь контрпримера по двум причинам: опровержение существенно проще (нужен всего лишь один опровергающий пример), а „придирки по мелочам“ вызывают прилив творческих сил. Даже если данное утверждение оказывается верным, поиск контрпримера зачастую приводит к его доказательству, как только скептик осознает, почему контрпример невозможен. Помимо всего прочего, скептицизм полезен для здоровья.

Скептицизм полезен для здоровья только до определенной степени. Скептическое отношение к намерениям и планам (особенно своим) вероятно избавит вас от волнений и обеспечит спокойную жизнь. Но проявление слишком скептического отношения наверняка заставит вас все время быть прикованным к работе, вместо того чтобы позволить себе выкроить время для физических упражнений и восстановления сил. Чрезмерный скептицизм — это прямая дорога к состоянию „конченого человека“, когда вы становитесь настолько озабоченным соблюдением строгости и законченности, что уже никогда не в состоянии ничего довести до конца.
— Один из скептиков

Если бы мы решили доказать, что $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ методами анализа, то могли бы начать с разбиения x на целую и дробную части $\lfloor x\rfloor + \{x\} = n + \theta$ с последующим разложением квадратного корня, используя биномиальную теорему: $(n+\theta)^{1/2} = n^{1/2} + n^{-1/2}\theta/2 - n^{-3/2}\theta^2/8 + \cdots$. Но подобный подход весьма непрактичен.

Гораздо практичнее воспользоваться уже подготовленными нами инструментами. Предлагается такой план: каким-либо образом разобрать наружный пол и квадратный корень $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$, после чего убрать внутренний пол, а затем вновь собрать разобранное, чтобы получить $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Годится. Положим $m = \lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$ и воспользуемся правилом (3.5(a)), получая $m \leqslant \sqrt{\lfloor x\rfloor} < m+1$. Тем самым мы избавляемся от скобок наружного пола, ничего не теряя при этом. Поскольку все три части этой конструкции неотрицательны, возводим их в квадрат, получая $m^2 \leqslant \lfloor x\rfloor < (m+1)^2$. Тем самым мы отделываемся от квадратного корня. Затем разбираем оставшийся пол, пользуясь правилом (3.7(d)) для левого неравенства и правилом (3.7(a)) для правого: $m^2 \leqslant x < (m+1)^2$. А теперь не составляет труда восстановить проделанное: извлечь квадратные корни, получая $m \leqslant \sqrt{x} < m+1$, и воспользоваться правилом (3.5(a)), получая $m = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Таким образом, $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor = m = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ — наше утверждение оказалось верным. Тем же способом можно доказать, что

$$\lceil\sqrt{\lceil x\rceil}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil \qquad \text{при вещественном } x \geqslant 0.$$

Предложенное доказательство не столь уж существенно опирается на свойства квадратных корней. Более внимательное рас-

смотрение показывает, что можно обобщить лежащие в его основе идеи и доказать много большее. Пусть $f(x)$ — некоторая непрерывная монотонно возрастающая функция, обладающая тем свойством, что

$$f(x) = \text{целое число} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \text{целое число}.$$

(Символ '$\Longrightarrow$' означает „влечет за собой".) Тогда

(Это наблюдение было сделано Робертом Д. Мак-Элисом, когда он заканчивал университет.)

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \qquad \text{и} \qquad \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil \tag{3.10}$$

всякий раз, когда определены функции $f(x)$, $f(\lfloor x \rfloor)$ и $f(\lceil x \rceil)$. Давайте докажем это общее свойство для потолков, поскольку до этого мы уже занимались полами, тем более, что доказательство для полов почти такое же. Если $x = \lceil x \rceil$, то доказывать нечего. В противном случае $x < \lceil x \rceil$, а $f(x) < f(\lceil x \rceil)$, поскольку f — возрастающая функция. Тогда $\lceil f(x) \rceil \leqslant \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, так как $\lceil\,\rceil$ — неубывающая функция. Если бы было $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, то должно найтись число y, такое, что $x \leqslant y < \lceil x \rceil$ и $f(y) = \lceil f(x) \rceil$, поскольку функция f непрерывна. Это y должно быть целым в силу специального свойства f. Но непосредственно между x и $\lceil x \rceil$ не может быть никакого целого числа. Это противоречие означает, что должно быть $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

Явного упоминания заслуживает важный частный случай этой теоремы:

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad \text{и} \quad \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil, \tag{3.11}$$

если m и n — целые числа, а знаменатель n положителен. К примеру, пусть $m = 0$; тогда $\lfloor \lfloor \lfloor x/10 \rfloor /10 \rfloor /10 \rfloor = \lfloor x/1000 \rfloor$. Троекратное деление на 10 с последовательным отбрасыванием цифр остатка — это то же самое, что и непосредственное деление на 1000 с последующим отбрасыванием всего остатка.

Попробуем теперь подтвердить или опровергнуть другое предположение:

$$\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil \stackrel{?}{=} \lceil \sqrt{x} \rceil \qquad \text{при вещественном } x \geqslant 0.$$

Оно проходит при $x = \pi$ и $x = e$, но не проходит при $x = \phi$ — тем самым выясняется, что в общем случае оно неверно.

„Сядем на минутку", — предложила Алиса.
„На минутку?" — воскликнул Король.
„А если бы на тебя сели?"
— Л. Кэррол [174, с. 244]. (Добавл. перев.)

Прежде чем двинуться дальше, сделаем минутное ОТСТУПЛЕНИЕ для того, чтобы обсудить различные „уровни" задач, которые могут рассматриваться в книгах по математике.

Уровень 1. Для определенного объекта x и определенного соотношения $P(x)$ *доказать*, что выполняется $P(x)$. Например, „доказать, что $\lfloor \pi \rfloor = 3$". Здесь суть дела заключается в нахождении доказательства некоторого предполагаемого факта.

Уровень 2. Для определенного множества X и определенного соотношения $P(x)$ доказать, что $P(x)$ выполняется *при любом* $x \in X$. Например, „доказать, что $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ при любом вещественном

x". Суть дела опять заключается в нахождении доказательства, но на этот раз — общего доказательства. Мы имеем дело уже не с арифметикой, а с алгеброй.

Уровень 3. Для определенного множества X и определенного соотношения $P(x)$ подтвердить *или опровергнуть*, что $P(x)$ выполняется при любом $x \in X$. Например, „подтвердить или опровергнуть, что $\lceil\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$ при любом вещественном $x \geqslant 0$". Здесь мы имеем дело с дополнительным уровнем неопределенности — результат может оказаться либо тем, либо другим. Это ближе к той реальной ситуации, с которой постоянно сталкивается математик: утверждения, попадающие на страницы книг, имеют обыкновение быть правильными, но к новому следует относиться предвзято. Если данное утверждение ошибочно — наше дело найти контрпример. Если данное утверждение правильно — мы обязаны найти доказательство (как на уровне 2).

В других моих сочинениях — но не в настоящей книге — „подтвердить или опровергнуть" примерно в 99.44% случаев, по-видимому, равносильно „подтвердить".

Уровень 4. Для определенного множества X и определенного соотношения $P(x)$ найти *необходимое и достаточное условие* $Q(x)$ того, что выполняется $P(x)$. Например, „найти необходимое и достаточное условие того, что $\lfloor x\rfloor \geqslant \lceil x\rceil$". Суть дела заключается в нахождении условия Q, такого, что $P(x) \iff Q(x)$. Безусловно, всегда наготове тривиальный ответ: просто взять $Q(x) = P(x)$. Нет, имеется в виду, что нужно найти условие, которое настолько просто, насколько это возможно. А для нахождения удовлетворяющего этому требованию простого условия нужна сообразительность. (Так, в нашем случае „$\lfloor x\rfloor \geqslant \lceil x\rceil \iff x$ — целое".) Этот самый элемент сообразительности, который необходим для нахождения $Q(x)$, существенно усложняет решение подобных задач, но как нельзя лучше характеризует то, с чем приходится сталкиваться математику в „реальной действительности". И, наконец, должно быть, естественно, доказано, что $P(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $Q(x)$.

Но не проще.
— А. Эйнштейн

Уровень 5. Для определенного множества X найти некоторое *интересное общее свойство* $P(x)$ его элементов. Тем самым мы вторгаемся в жуткие дебри чистой науки, где, как полагают студенты, царит всеобщий хаос. Но это уже настоящая математика. Авторы учебников редко осмеливаются задавать вопросы уровня 5. Конец отступления.

Но давайте переведем наш последний вопрос с уровня 3 на уровень 4: каково необходимое и достаточное условие того, что $\lceil\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$? Мы уже выяснили, что при $x = 3.142$ это равенство выполняется, а при $x = 1.618$ — не выполняется. Дальнейшие проверки показывают, что к тому же оно не выполняется при x между 9 и 10. Ого-го. Более того, случаи невыполнения возникают всякий раз, когда $m^2 < x < m^2 + 1$, так как в этих случаях в левой части получается m, а в правой — $m + 1$. Во всех других случаях, когда $\sqrt{x}$ определен, а именно при $x = 0$ или при $m^2 + 1 \leqslant x \leqslant (m+1)^2$, получается равенство. Поэтому для вы-

полнения равенства необходимо и достаточно следующее условие: либо x — целое число, либо $\sqrt{\lfloor x \rfloor}$ — не целое число.

Для формулировки нашей следующей задачи воспользуемся удобным обозначением для интервалов вещественной прямой, предложенным К. А. Р. Хоаром и Лайлом Рэмшоу. Интервал $[\alpha, \beta]$ обозначает множество вещественных чисел x, таких, что $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Это множество называется *замкнутым интервалом*, поскольку он включает как одну, так и другую концевую точку α и β. Интервал (α, β), не включающий ни одной, ни другой концевой точки, состоит из всех x, таких, что $\alpha < x < \beta$; он называется *открытым интервалом*. А интервалы $[\alpha, \beta)$ и $(\alpha, \beta]$, включающие либо одну, либо другую концевую точку, определяются аналогично и называются *полуоткрытыми*.

(А пессимистами — полузамкнутыми.)

Сколько целых чисел содержится в подобных интервалах? Нам удобнее начать с полуоткрытых интервалов. И вообще, почти всегда удобнее иметь дело с полуоткрытыми, чем с открытыми или замкнутыми интервалами. К примеру, они аддитивны — при объединении полуоткрытых интервалов $[\alpha, \beta)$ и $[\beta, \gamma)$ получается полуоткрытый интервал $[\alpha, \gamma)$. Для открытых интервалов этого не произошло бы, ибо точка β оказалась бы исключенной, а для замкнутых интервалов возникли бы проблемы, ибо точка β оказалась бы включенной дважды.

Но вернемся к нашей задаче. Если α и β — целые числа, то ответ простой: тогда интервал $[\alpha, \beta)$ содержит ровно $\beta - \alpha$ целых чисел $\alpha, \alpha+1, \ldots, \beta-1$ при условии, что $\alpha \leqslant \beta$. Точно так же интервал $(\alpha, \beta]$ содержит $\beta - \alpha$ целых чисел при том же условии. Но наша задача потруднее, ибо по условию α и β — произвольные вещественные числа. Тем не менее, ее можно свести к более легкой задаче, поскольку согласно (3.7)

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant n < \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \lceil \alpha \rceil \leqslant n < \lceil \beta \rceil, \\ \alpha < n \leqslant \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \lfloor \alpha \rfloor < n \leqslant \lfloor \beta \rfloor, \end{aligned}$$

когда n — целое число. Интервалы справа имеют целочисленные концевые точки и содержат такое же количество целых чисел, что и интервалы слева, имеющие вещественнозначные концевые точки. Поэтому интервал $[\alpha, \beta)$ содержит ровно $\lceil \beta \rceil - \lceil \alpha \rceil$ целых чисел, а интервал $(\alpha, \beta]$ ровно $\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$ целых чисел. Это один из тех случаев, когда нам действительно надо обзавестись скобками пола или потолка, вместо того чтобы избавляться от них.

Точно так же можно запомнить дату открытия Америки, напевая: „Один, четыре, девять, три — Колумб Америку открыл."

Кстати, существует мнемонический прием для запоминания того, в каком случае употребляются полы, а в каком — потолки: полуоткрытые интервалы, которые включают не правую, а левую концевую точку (такие, как $0 \leqslant \theta < 1$) несколько более употребительны, чем те, которые включают не левую, а правую концевую точку,— так же как полы несколько более употребительны, чем потолки. Но по закону Мерфи действительное прямо противоположно ожидаемому — потолки соответствуют интервалам $[\alpha, \beta)$, а полы соответствуют интервалам $(\alpha, \beta]$.

Аналогичный разбор показывает, что замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$ содержит $\lfloor\beta\rfloor - \lceil\alpha\rceil + 1$ целых чисел и что открытый интервал (α, β) содержит $\lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1$ целых чисел, хотя в последнем случае мы налагаем дополнительное ограничение $\alpha \neq \beta$ с тем, чтобы эта формула не приводила нас в замешательство откровением, что пустой интервал (α, α) содержит ровно -1 целых чисел. Подытожим установленные факты:

интервал	количество целых чисел	ограничение	
$[\alpha, \beta]$	$\lfloor\beta\rfloor - \lceil\alpha\rceil + 1$	$\alpha \leqslant \beta$,	
$[\alpha, \beta)$	$\lceil\beta\rceil - \lceil\alpha\rceil$	$\alpha \leqslant \beta$,	(3.12)
$(\alpha, \beta]$	$\lfloor\beta\rfloor - \lfloor\alpha\rfloor$	$\alpha \leqslant \beta$,	
(α, β)	$\lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1$	$\alpha < \beta$.	

А вот задача, которая не может нас не заинтриговать. В Клубе любителей конкретной математики находится казино (доступное только обладателям этой книги), в котором колесо рулетки имеет тысячу гнезд с номерами от 1 до 1000. Если выпадающий при вращении рулетки номер n делится на пол своего кубического корня, т. е. если

$$\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \backslash n,$$

то это выигрышный номер и казино выплачивает нам 5 долларов; в противном случае это проигрышный номер и уже мы обязаны уплатить 1 доллар. (Обозначение „$a\backslash b$“, которое читается как „a делит b“, означает, что b в точности кратно a,— это соотношение обстоятельно исследуется в гл. 4.) Можно ли рассчитывать „сделать деньги“ на такой игре?

(Опрос аудитории показал, что 28 студентов посчитали, что играть не стоит, 13 пожелали рискнуть, а остальные постеснялись ответить.)

Средний выигрыш — т. е. сумму, которую мы выиграем (или проиграем) за одну игру,— можно вычислить, подсчитав сперва число W выигрышных номеров и число $L = 1000 - W$ проигрышных номеров. Если каждый номер выпадает по одному разу в 1000 играх, то мы выигрываем $5W$ долларов и проигрываем L долларов, так что средняя сумма выигрыша составит

$$\frac{5W - L}{1000} = \frac{5W - (1000 - W)}{1000} = \frac{6W - 1000}{1000}$$

(Так что мы заинтриговали их Клубом любителей конкретной математики.)

долларов. Если выигрышных номеров 167 и более, то мы извлекаем прибыль; в противном случае выигрывает казино.

Но как подсчитать число выигрышных номеров среди тысячи? Не так уж и трудно уловить их закономерность. Все номера от 1 до $2^3 - 1 = 7$ — выигрышные, ибо для каждого из них $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor = 1$. Среди номеров от $2^3 = 8$ до $3^3 - 1 = 26$ выигрышными являются только четные номера. А среди номеров от $3^3 = 27$ до $4^3 - 1 = 63$ — только те, которые делятся на 3; и т. д.

Общее число благоприятных исходов игры можно выразить аналитически, если воспользоваться техникой суммирования из

предыдущей главы с привлечением нотации Айверсона для логических выражений, доставляющей 0 или 1:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{n=1}^{1000} [n \text{ — выигрышный номер}] \\
&= \sum_{1\leqslant n\leqslant 1000} \bigl[\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \backslash n\bigr] = \sum_{k,n} \bigl[k=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\bigr][k\backslash n][1\leqslant n\leqslant 1000] \\
&= \sum_{k,m,n} \bigl[k^3 \leqslant n < (k+1)^3\bigr][n=km][1\leqslant n\leqslant 1000] \\
&= 1 + \sum_{k,m} \bigl[k^3 \leqslant km < (k+1)^3\bigr][1\leqslant k<10] \\
&= 1 + \sum_{k,m} \bigl[m\in \bigl[k^2,\ (k+1)^3/k\bigr)\bigr][1\leqslant k<10] \\
&= 1 + \sum_{1\leqslant k<10} \bigl(\lceil k^2+3k+3+1/k\rceil - \lceil k^2\rceil\bigr) \\
&= 1 + \sum_{1\leqslant k<10} (3k+4) = 1 + \frac{7+31}{2}\cdot 9 = 172\,.
\end{aligned}
$$

Этот вывод заслуживает внимательного изучения. Обратите внимание, что в 6-й строке используется формула (3.12) для количества целых чисел в полуоткрытом интервале. Единственно „трудный“ момент — это решение при переходе от 3-й к 4-й строке выделить $n = 1000$ в качестве отдельного случая. (Неравенство $k^3 \leqslant n < (k+1)^3$ не так просто объединить с неравенством $1 \leqslant n \leqslant 1000$ при $k = 10$.) Вообще-то, граничные условия, похоже, самое скользкое место при $\sum$-манипуляциях.

Не „похоже“, а именно так.

В нижней строке сообщается, что $W = 172$; следовательно, наша формула для средней суммы выигрыша за одну игру сводится к $(6\cdot 172 - 1000)/1000$ долларам, что составляет 3.2 цента. Можно рассчитывать стать богаче примерно на 3.20 доллара, сделав 100 ставок по 1 доллару. (Если, конечно, владельцы казино не сделают так, что номера будут выпадать с равной вероятностью, но некоторые — равнее других.)

Так где, вы сказали, находится это казино?

Задача о казино, которую мы только что решили, представляет собой приукрашенную версию более прозаического вопроса: „Сколько целых чисел n при $1 \leqslant n \leqslant 1000$ удовлетворяют соотношению $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \backslash n$?“ С математической точки зрения эти два вопроса одинаковы. Но иногда неплохо приукрасить задачу: мы обогащаем свой словарь („выигрышными номерами“ и „проигрышными номерами“), что помогает нам разобраться в существе дела.

Попробуем обобщить задачу. Предположим, что 1000 заменяется на 1 000 000 или на еще большее число N. (Мы допускаем, что у владельцев казино есть связи и они могут достать колесо побольше.) Насколько тогда увеличится число выигрышных номеров?

Для ответа на этот вопрос достаточно тех же самых рассуждений, но необходимо осторожнее обращаться с самым большим значением k, которое для удобства обозначим через K:

$$K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor .$$

(Раньше K равнялось 10.) Для произвольного N общее число выигрышных номеров становится равным

$$\begin{aligned} W &= \sum_{1 \leqslant k < K} (3k+4) + \sum_m [K^3 \leqslant Km \leqslant N] \\ &= \tfrac{1}{2}(7 + 3K + 1)(K-1) + \sum_m \bigl[m \in [K^2, N/K]\bigr] \\ &= \tfrac{3}{2}K^2 + \tfrac{5}{2}K - 4 + \sum_m \bigl[m \in [K^2, N/K]\bigr] . \end{aligned}$$

Нам известно, что оставшаяся сумма есть $\lfloor N/K \rfloor - \lceil K^2 \rceil + 1 = \lfloor N/K \rfloor - K^2 + 1$; следовательно, формула

$$W = \lfloor N/K \rfloor + \tfrac{1}{2}K^2 + \tfrac{5}{2}K - 3 , \qquad K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor \tag{3.13}$$

дает общий ответ для колеса с N гнездами.

Первые два члена этой формулы приближенно равны $N^{2/3} + \frac{1}{2}N^{2/3} = \frac{3}{2}N^{2/3}$, а при большом N остальные члены по сравнению с ними много меньше. В гл. 9 мы узнаем, как получать выражения, подобные выражению

$$W = \tfrac{3}{2}N^{2/3} + O(N^{1/3}) ,$$

где $O(N^{1/3})$ означает величину, которая не превосходит константы, умноженной на $N^{1/3}$. Какой бы ни была константа — она не зависит от N, так что при большом N вклад O-члена в величину W будет весьма незначительным по сравнению с $\frac{3}{2}N^{2/3}$. Так, следующая таблица показывает, насколько близки значения $\frac{3}{2}N^{2/3}$ к величине W:

N	$\frac{3}{2}N^{2/3}$	W	% погрешности
1 000	150.0	172	12.791
10 000	696.2	746	6.670
100 000	3231.7	3343	3.331
1 000 000	15000.0	15247	1.620
10 000 000	69623.8	70158	0.761
100 000 000	323165.2	324322	0.357
1 000 000 000	1500000.0	1502496	0.166

Вполне приличное приближение.

Приближенные формулы полезны постольку, поскольку они проще, чем формулы с полами и потолками. Однако зачастую

важна „абсолютная точность", особенно при малых значениях N, с которыми обычно имеют дело на практике. Скажем, владелец казино может ошибочно предполагать, что при $N = 1000$ имеется лишь $\frac{3}{2}N^{2/3} = 150$ выигрышных номеров (в таком случае доход казино составил бы 10 центов).

И в завершение этого раздела обратимся к так называемым спектрам. *Спектр* некоторого вещественного числа α определяется как бесконечное мультимножество целых чисел:

$$\mathrm{Spec}(\alpha) = \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor 2\alpha\rfloor, \lfloor 3\alpha\rfloor, \ldots\}.$$

(Мультимножество — это то же самое, что и множество, но в нем могут содержаться повторяющиеся элементы.) К примеру, спектр числа $1/2$ начинается так: $\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\}$.

Легко показать, что нет двух одинаковых спектров — т. е. $\alpha \neq \beta$ влечет за собой $\mathrm{Spec}(\alpha) \neq \mathrm{Spec}(\beta)$. Действительно, если предположить, не умаляя общности, что $\alpha < \beta$, то найдется некоторое положительное целое число m, такое, что $m(\beta - \alpha) \geqslant 1$. (На самом деле, любое $m \geqslant \lceil 1/(\beta - \alpha)\rceil$ будет таковым, но мы не видим необходимости каждый раз бравировать своими познаниями в области полов и потолков.) Следовательно, $m\beta - m\alpha \geqslant 1$ и $\lfloor m\beta\rfloor > \lfloor m\alpha\rfloor$. Таким образом, $\mathrm{Spec}(\beta)$ содержит менее чем m элементов $\leqslant \lfloor m\alpha\rfloor$, тогда как $\mathrm{Spec}(\alpha)$ содержит по меньшей мере m.

... не добавляя общности...

Спектры обладают многими замечательными свойствами. Рассмотрим, например, два мультимножества

$$\mathrm{Spec}(\sqrt{2}) = \{1,2,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16,18,19,21,22,24,\ldots\},$$
$$\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}) = \{3,6,10,13,17,20,23,27,30,34,37,40,44,47,51,\ldots\}.$$

„Если x есть некоторое иррациональное число, меньшее единицы, то можно взять один из двух рядов величин m/x, $m/(1-x)$, где m — целое число; каждое число, принадлежащее к тому или иному ряду, и только оно одно, будет заключено между любыми двумя заданными последовательными целыми числами."
— Рэлей [287]

Элементы $\mathrm{Spec}(\sqrt{2})$ легко вычисляются на калькуляторе, а согласно (3.6) n-й элемент $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$ ровно на $2n$ больше n-го элемента $\mathrm{Spec}(\sqrt{2})$. Более внимательное рассмотрение показывает, что два этих спектра связаны друг с другом гораздо более удивительным образом: получается так, что любое число, отсутствующее в одном спектре, присутствует в другом, но никакое число не содержится одновременно в обоих! И это действительно так — все целые положительные числа представляют собой объединение непересекающихся множеств $\mathrm{Spec}(\sqrt{2})$ и $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$. Говорят, что эти спектры образуют *разбиение* всех целых положительных чисел.

Для доказательства этого факта подсчитаем, сколько в множестве $\mathrm{Spec}(\sqrt{2})$ элементов $\leqslant n$ и сколько элементов $\leqslant n$ в множестве $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$. Если при каждом n их общее число составит n, то эти два спектра действительно образуют разбиение всех целых чисел.

Правильно — при возрастании n на 1 должен возрастать только один из этих счетчиков.

Пусть α положительно. Число элементов в $\mathrm{Spec}(\alpha)$, которые $\leqslant n$, равно

$$\begin{aligned} N(\alpha,n) &= \sum_{k>0}\bigl[\lfloor k\alpha\rfloor \leqslant n\bigr] = \sum_{k>0}\bigl[\lfloor k\alpha\rfloor < n+1\bigr] \\ &= \sum_{k>0}[k\alpha < n+1] = \sum_{k}\bigl[0<k<(n+1)/\alpha\bigr] \\ &= \lceil (n+1)/\alpha\rceil - 1\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Этот вывод интересен двумя моментами. Во-первых, здесь используется правило

$$m \leqslant n \quad\iff\quad m < n+1\,, \qquad m \text{ и } n \text{ — целые}, \tag{3.15}$$

для замены '$\leqslant$' на '$<$' с тем, чтобы в соответствии с (3.7) можно было убрать скобки пола. Во-вторых — и это более тонкий момент — суммирование проводится по $k > 0$, а не по $k \geqslant 1$, так как величина $(n+1)/\alpha$ могла бы оказаться меньшей 1 при некоторых n и α. Если бы мы попытались применить (3.12) для определения количества целых чисел в интервале $[1, (n+1)/\alpha)$ в отличие от определения количества целых чисел в интервале $(0, (n+1)/\alpha)$, то получили бы правильный ответ, однако наш вывод был бы неправильным, поскольку не были бы соблюдены условия его применимости.

В любом случае у нас есть формула для $N(\alpha, n)$. Теперь можно проверить, образуют или нет множества $\mathrm{Spec}(\sqrt{2})$ и $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$ разбиение всех целых положительных чисел, проверив, выполняется или нет равенство $N(\sqrt{2}, n) + N(2+\sqrt{2}, n) = n$ при любом целом $n > 0$, используя для этого (3.14):

$$\begin{aligned} &\left\lceil\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\rceil - 1 + \left\lceil\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\rceil - 1 = n \\ \iff\quad &\left\lfloor\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\rfloor = n\,, &&\text{согласно (3.2)}, \\ \iff\quad &\frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left\{\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} - \left\{\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\} = n\,, \\ & &&\text{согласно (3.8).} \end{aligned}$$

Все упрощается благодаря изящному равенству

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1\,,$$

так что наше условие сводится к проверке, правильно или нет, что

$$\left\{\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\} + \left\{\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\} = 1$$

при любом $n > 0$. А это правильно, потому что это дробные части нецелых чисел, которые в сумме дают целое число $n+1$. Действительно, разбиение.

3.3 ПОЛ/ПОТОЛОК: РЕКУРРЕНТНОСТИ

Полы и потолки обеспечивают широкий простор для изучения рекуррентных соотношений. Для начала рассмотрим рекуррентность

$$\begin{aligned} K_0 &= 1\,, \\ K_{n+1} &= 1 + \min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor} 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}) \qquad \text{при } n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Так, например, K_1 есть $1 + \min(2K_0, 3K_0) = 3$, а сама последовательность начинается с чисел 1, 3, 3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 13, $\ldots$. Один из авторов этой книги с присущей ему скромностью решил назвать их числами Кнута.

В упр. 25 предлагается подтвердить или опровергнуть, что $K_n \geqslant n$ при любом $n \geqslant 0$. Несколько только что перечисленных первых K-чисел действительно удовлетворяют этому неравенству, так что имеется некоторое основание считать, что оно справедливо и в общем случае. Попробуем доказать его по индукции. База индукции при $n = 0$ вытекает непосредственно из определения рекуррентности. Для индуктивного перехода предположим, что данное неравенство выполняется вплоть до некоторого фиксированного неотрицательного n, и попробуем показать, что $K_{n+1} \geqslant n+1$. По определению рекуррентности нам известно, что $K_{n+1} = 1+\min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor})$, а по индуктивному предположению — что $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} \geqslant 2\lfloor n/2 \rfloor$ и $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} \geqslant 3\lfloor n/3 \rfloor$. Однако $2\lfloor n/2 \rfloor$ может быть равным самое меньшее $n-1$, а $3\lfloor n/3 \rfloor$ может быть равным самое меньшее $n-2$. Самое большее, что можно извлечь из нашего индуктивного предположения, это $K_{n+1} \geqslant 1 + (n-2)$, что явно не дотягивает до неравенства $K_{n+1} \geqslant n+1$.

Теперь у нас появилось основание усомниться в справедливости неравенства $K_n \geqslant n$, поэтому попытаемся его опровергнуть. Если мы сумеем найти n, такое, что либо $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n$, либо $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n$,— другими словами, такое, что

$$K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n/2 \qquad \text{или} \qquad K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n/3\,,$$

то получим $K_{n+1} < n+1$. Возможно ли такое? Но здесь нам лучше воздержаться от ответа, чтобы не испортить упр. 25.

Рекуррентные соотношения, включающие в себя полы и/или потолки, часто возникают в задачах информатики, поскольку алгоритмы, основанные на важном принципе „разделяй и властвуй“, зачастую сводят задачу размера n к решению тех же задач меньших размеров, являющихся целочисленными долями n. Например, один из способов сортировки n записей при $n > 1$ состоит

в том, чтобы разделить их на две примерно равные части: одну — размера $\lceil n/2 \rceil$, а другую — размера $\lfloor n/2 \rfloor$. (Кстати, обратите внимание, что

$$n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor ; \tag{3.17}$$

эта формула оказывается кстати довольно часто.) После того как каждая часть отсортирована отдельно (тем же самым методом, применяемым рекурсивно), можно объединить записи в требуемом порядке, выполнив самое большее $n-1$ дополнительных сравнений. Таким образом, общее число выполненных сравнений не превышает $f(n)$, где

$$\begin{aligned} f(1) &= 0\,, \\ f(n) &= f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor) + n - 1 \qquad \text{при } n > 1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Решение этой рекуррентности приводится в упр. 34.

В задаче Иосифа из гл. 1 фигурирует сходная рекуррентность, которой можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1\,, \\ J(n) &= 2J(\lfloor n/2 \rfloor) - (-1)^n \qquad \text{при } n > 1. \end{aligned}$$

Теперь мы располагаем уже бо́льшим числом приемов по сравнению с тем, что имели в гл. 1, поэтому рассмотрим более достоверную задачу Иосифа, в которой уничтожается каждый третий, а не каждый второй. Если для решения этой более сложной задачи воспользоваться теми же методами, которые срабатывали в гл. 1, то дело закончится рекуррентностью вида

$$J_3(n) = \left\lceil \tfrac{3}{2} J_3\left(\lfloor \tfrac{2}{3} n \rfloor\right) + a_n \right\rceil \bmod n + 1\,,$$

где 'mod' — это функция, которой мы вскоре займемся, и $a_n = -2$, $+1$ или $-\frac{1}{2}$ соответственно при $n \bmod 3 = 0$, 1 или 2. Но к этой рекуррентности страшно даже подступиться.

Существует другой подход к задаче Иосифа, который приводит к более благоприятной ситуации. Всякий раз, когда один из людей остается нетронутым, ему можно присвоить новый номер. Таким образом, 1-й и 2-й человек становятся $n+1$-м и $n+2$-м, а 3-й подвергается казни; 4-й и 5-й человек становятся $n+3$-м и $n+4$-м, а 6-й подвергается казни; …; $3k+1$-й и $3k+2$-й человек становятся $n+2k+1$-м и $n+2k+2$-м, а $3k+3$-й подвергается казни и так далее до тех пор, пока $3n$-й человек не подвергнется казни (или не останется в живых). Вот пример перенумерации при $n = 10$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12		13	14		15	16		17
18			19	20			21		22
			23	24					25
			26						27
			28						
			29						
			30						

Казнимый k-м человек прекращает существование вместе со своим номером $3k$. Таким образом, мы можем отгадать, кто останется в живых, если сможем отгадать первоначальный номер человека, получившего номер $3n$.

Если $N > n$, то жертва с номером N должна была иметь некий предыдущий номер, который можно установить следующим образом: поскольку $N = n + 2k + 1$ или $N = n + 2k + 2$, то $k = \lfloor (N-n-1)/2 \rfloor$. Но предыдущий номер был соответственно $3k+1$ или $3k+2$. Это значит, что он был равен $3k+(N-n-2k) = k+N-n$. Следовательно, номер $J_3(n)$ оставшегося в живых может быть вычислен следующим образом:

$$N := 3n;$$
$$\textbf{пока}\ \ N > n\ \ \textbf{выполнять}\ \ N := \left\lfloor \frac{N-n-1}{2} \right\rfloor + N - n;$$
$$J_3(n) := N.$$

Это не является выражением для $J_3(n)$ в замкнутой форме — это даже не рекуррентность. Но, по крайней мере при большом n, это позволяет вычислить ответ достаточно быстро.

„Нот ту слоу, нот ту фаст."
— Л. Армстронг

К счастью, имеется возможность упростить этот алгоритм, воспользовавшись переменной $D = 3n+1-N$ вместо N. (Такая замена переменных соответствует присвоению номеров, уменьшающихся от $3n$ до 1, вместо номеров, увеличивающихся от 1 до $3n$,— подобно обратному отсчету времени.) Тогда усложненное правило присвоения значений переменной N становится таким:

$$D := 3n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{(3n+1-D)-n-1}{2} \right\rfloor + (3n+1-D) - n \right)$$
$$= n + D - \left\lfloor \frac{2n-D}{2} \right\rfloor = D - \left\lfloor \frac{-D}{2} \right\rfloor = D + \left\lceil \frac{D}{2} \right\rceil = \left\lceil \tfrac{3}{2} D \right\rceil,$$

и предыдущий алгоритм можно переписать следующим образом:

$$D := 1;$$
$$\textbf{пока}\ \ D \leqslant 2n\ \ \textbf{выполнять}\ \ D := \left\lceil \tfrac{3}{2} D \right\rceil;$$
$$J_3(n) := 3n + 1 - D.$$

Ага! Это выглядит гораздо привлекательнее, поскольку n очень просто входит в вычисления. Фактически, рассуждая аналогично, можно показать, что если уничтожается каждый q-й человек, то номер уцелевшего $J_q(n)$ может быть вычислен следующим образом:

$$D := 1;$$
$$\textbf{пока}\ \ D \leqslant (q-1)n\ \ \textbf{выполнять}\ \ D := \left\lceil \tfrac{q}{q-1} D \right\rceil; \qquad (3.19)$$
$$J_q(n) := qn + 1 - D.$$

В случае $q = 2$, который нам столь хорошо знаком, переменная D возрастает до 2^{m+1} при $n = 2^m + l$; следовательно, $J_2(n) = 2(2^m + l) + 1 - 2^{m+1} = 2l + 1$. Годится.

В (3.19) реализован способ вычисления последовательности целых чисел, которая может быть определена рекуррентно как

$$D_0^{(q)} = 1\,,\qquad D_n^{(q)} = \left\lceil \frac{q}{q-1} D_{n-1}^{(q)} \right\rceil \quad \text{при } n > 0. \tag{3.20}$$

Эти числа, по-видимому, не связаны каким-нибудь простым способом с какими-нибудь известными функциями, за исключением случая $q = 2$; следовательно, им вряд ли можно придать привлекательный замкнутый вид. Но если мы согласимся принять последовательность $D_n^{(q)}$ за „известную“, то задача Иосифа допускает простое описание: номер уцелевшего $J_q(n)$ равен $qn+1-D_k^{(q)}$, где k — наименьшее возможное число, такое, что $D_k^{(q)} > (q-1)n$.

„Известную“ как, скажем, гармонические числа. Э. М. Одлыжко и Г. С. Вильф показали [231], что $D_n^{(3)} = \lfloor (\frac{3}{2})^n C \rfloor$, *где* $C \approx 1.622270503$.

3.4 ‘MOD’: БИНАРНАЯ ОПЕРАЦИЯ

Если m и n — целые положительные числа, то частное от деления n на m равно $\lfloor n/m \rfloor$. Полезно обзавестись достаточно простым обозначением и для остатка от этого деления — обозначим его через ‘$n \bmod m$’. Основная формула

$$n = m\underbrace{\lfloor n/m \rfloor}_{\text{частное}} + \underbrace{n \bmod m}_{\text{остаток}}$$

позволяет выразить $n \bmod m$ в виде $n - m\lfloor n/m \rfloor$. Это можно распространить на целые отрицательные числа, а фактически — на произвольные вещественные числа:

$$x \bmod y = x - y\lfloor x/y \rfloor \qquad \text{при } y \neq 0. \tag{3.21}$$

Тем самым ‘mod’ оказывается бинарной операцией точно так же, как являются бинарными операции сложения и вычитания. Неформально математики издавна использовали понятие mod, вычисляя разные величины по модулю 10, по модулю 2π и т. п., но оно утвердилось лишь в последние двадцать лет формально. Понятие — старое, обозначение — новое.

Откуда взялось название ‘mod’: бинарная операция? Вы узнаете это в следующей, волнующей, главе!

Когда x и y — вещественные положительные числа, смысл $x \bmod y$ можно легко уловить интуитивно. Вообразим себя бегущими по кругу с длиной окружности y, точкам которой приписаны вещественные числа из интервала $[0, y)$. Если, взяв старт в точке 0, пробежать некоторое расстояние x по окружности, мы остановимся в точке $x \bmod y$. (А пока мы бегаем, точка 0 встретится нам $\lfloor x/y \rfloor$ раз.)

Когда же x или y отрицательны, нужно внимательно вникнуть в определение, с тем чтобы точно выяснить, что в этом

случае означает $x \bmod y$. Вот некоторые примеры с целыми x и y:

Остерегайтесь машинных языков, в которых используется другое определение.

$$\begin{aligned} 5 \bmod 3 &= 5 - 3\lfloor 5/3 \rfloor &&= 2\,, \\ 5 \bmod -3 &= 5 - (-3)\lfloor 5/(-3) \rfloor &&= -1\,, \\ -5 \bmod 3 &= -5 - 3\lfloor -5/3 \rfloor &&= 1\,, \\ -5 \bmod -3 &= -5 - (-3)\lfloor -5/(-3) \rfloor &&= -2\,. \end{aligned}$$

Число после 'mod' называется *модулем*, но никто пока еще не придумал, как назвать число перед 'mod'. В приложениях модуль обычно положителен, но данное выше определение сохраняет смысл и когда модуль отрицателен. В обоих случаях величина $x \bmod y$ лежит между нулем и модулем:

А что если назвать это число мотором?

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \bmod y < y \qquad \text{при } y > 0, \\ 0 &\geqslant x \bmod y > y \qquad \text{при } y < 0. \end{aligned}$$

А как насчет $y = 0$? Определение (3.21) оставляет этот вопрос открытым, с тем чтобы избежать деления на нуль, но для полноты можно положить

$$x \bmod 0 = x\,. \tag{3.22}$$

Подобное соглашение сохраняет свойство $x \bmod y$ всегда отличаться от x на величину, кратную y. (Может показаться более естественным сделать эту функцию непрерывной в 0, полагая $x \bmod 0 = \lim_{y\to 0} x \bmod y = 0$. Однако в гл. 4 увидим, что это сделало бы ее менее полезной. Непрерывность — не самая важная сторона операции mod.)

Мы уже сталкивались с одним замаскированным частным случаем операции mod, когда записывали число x в виде суммы его целой и дробной частей: $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Дробная часть может быть записана также как $x \bmod 1$, потому что

$$x = \lfloor x \rfloor + x \bmod 1\,.$$

Обратите внимание, что в этой формуле круглые скобки не нужны: считается, что знак mod связывает операнды сильнее, чем знаки сложения или вычитания.

При определении операции mod использовалась функция пол, в то время как функция потолок не удостоилась равного внимания. Быть может, стоило бы воспользоваться функцией потолок для определения аналога операции mod типа операции

Одно время в 70-х годах был в моде стиль 'mod'. Может быть новую mumble-функцию следовало бы назвать 'панк'?

Нет — мне нравится 'mumble'!

$$x \operatorname{mumble} y = y\lceil x/y \rceil - x\,;$$

(mumble — нечто невразумительное.— *Ред.*). в случае нашей аналогии с кругом это соответствует расстоянию, которое нужно добежать бегуну, преодолевшему расстояние x, чтобы попасть в исходную точку 0. Конечно же, необходимо более подходящее название, нежели 'mumble'. Но нашлось бы подходящее приложение — наверняка найдется и соответствующее название.

Самым важным алгебраическим свойством операции mod является распределительный закон:

$$c(x \bmod y) = (cx) \bmod (cy) \qquad (3.23)$$

при любых вещественных c, x и y. (Те, кто предпочитает, чтобы знак mod связывал операнды слабее, чем знак умножения, могут и здесь убрать круглые скобки в правой части.) Этот закон легко получается из определения (3.21), так как

$$c(x \bmod y) = c(x - y\lfloor x/y \rfloor) = cx - cy\lfloor cx/cy \rfloor = cx \bmod cy\,,$$

если $cy \neq 0$ (случаи с нулевыми модулями тривиальны). Четыре предыдущих примера с ± 5 и ± 3 дважды иллюстрируют этот закон при $c = -1$. Тождество типа (3.23) действует успокаивающе, ибо оно позволяет надеяться, что операция 'mod' определена надлежащим образом.

В оставшейся части этого раздела рассмотрим одно приложение операции 'mod', в котором она оказывается весьма полезной, хотя и не играет центральной роли. Рассматриваемая задача часто возникает в тех многочисленных ситуациях, когда надо разложить n предметов на m групп как можно более равномерно.

В остатке, а?

Предположим, например, что мы располагаем n короткими строками текста line 1, line 2 ..., которые хотелось бы разместить в m колонках. По эстетическим соображениям желательно, чтобы по высоте эти колонки располагались в убывающем порядке (фактически — в невозрастающем порядке), причем высота колонок должна быть примерно одинаковой — никакие две колонки не должны отличаться друг от друга более чем на одну строку текста. Если 37 строк текста разбиваются на пять колонок, то предпочтительно такое их размещение, как справа:

8	8	8	8	5
line 1	line 9	line 17	line 25	line 33
line 2	line 10	line 18	line 26	line 34
line 3	line 11	line 19	line 27	line 35
line 4	line 12	line 20	line 28	line 36
line 5	line 13	line 21	line 29	line 37
line 6	line 14	line 22	line 30	
line 7	line 15	line 23	line 31	
line 8	line 16	line 24	line 32	

8	8	7	7	7
line 1	line 9	line 17	line 24	line 31
line 2	line 10	line 18	line 25	line 32
line 3	line 11	line 19	line 26	line 33
line 4	line 12	line 20	line 27	line 34
line 5	line 13	line 21	line 28	line 35
line 6	line 14	line 22	line 29	line 36
line 7	line 15	line 23	line 30	line 37
line 8	line 16			

К тому же желательно распределить строки по колонкам следующим образом: вначале решается, сколько строк войдет в первую колонку, затем мы переходим ко второй, третьей и так далее — ведь именно таков порядок чтения. Распределение строк текста ряд за рядом обеспечило бы нас требуемым числом строк в каждой колонке, однако порядок их чтения оказался бы нарушенным. (Мы получили бы нечто подобное размещению справа, но в 1-й колонке оказались бы строки 1, 6, 11, ..., 36 вместо строк 1, 2, 3,..., 8.)

Хотя план размещения ряд-за-рядом неприемлем, он позволяет выяснить, сколько строк поместится в каждой колонке. Если

n не кратно m, то в процессе размещения ряд-за-рядом выясняется, что удлиненные колонки должны вмещать $\lceil n/m \rceil$, а укороченные — $\lfloor n/m \rfloor$ строк каждая; в результате будет ровно $n \bmod m$ удлиненных колонок (и, как выясняется, ровно $n \operatorname{mumble} m$ укороченных).

Теперь обобщим терминологию и поговорим о 'предметах' и 'группах' вместо 'строк' и 'колонок'. Только что мы выяснили, что первая группа должна вмещать $\lceil n/m \rceil$ предметов; следовательно, можно попробовать следующую схему последовательного распределения: для распределения n предметов по m группам при $m > 0$ поместить $\lceil n/m \rceil$ предметов в одну группу, а затем рекурсивно применить ту же самую процедуру для того, чтобы разместить $n' = n - \lceil n/m \rceil$ оставшихся предметов в $m' = m - 1$ прочих группах.

К примеру, если $n = 314$ и $m = 6$, то распределение происходит по такой схеме:

оставшиеся предметы	оставшиеся группы	$\lceil$предметов в группе$\rceil$
314	6	53
261	5	53
208	4	52
156	3	52
104	2	52
52	1	52

Схема работает — мы получаем группы практически неизменного размера, несмотря на то, что делитель изменяется.

А почему она работает? В общем случае можно предположить, что $n = gm + r$, где $q = \lfloor n/m \rfloor$ и $r = n \bmod m$. Если $r = 0$, то процесс размещения прост: мы помещаем $\lceil n/m \rceil = q$ предметов в первую группу и заменяем n на $n' = n - q$, оставляя $n' = qm'$ предметов для размещения в остальных $m' = m - 1$ группах. Если же $r > 0$, мы помещаем $\lceil n/m \rceil = q + 1$ предметов в первую группу и заменяем n на $n' = n - q - 1$, оставляя $n' = qm' + r - 1$ предметов для последующих групп. Новый остаток r' заменяется на $r' = r - 1$, но q остается без изменений. Отсюда следует, что получится r групп с $q+1$ предметами, за которыми следуют $m-r$ групп с q предметами.

Сколько же предметов окажется в k-й группе? Для ответа на этот вопрос нам нужна формула, которая бы давала $\lceil n/m \rceil$ при $k \leqslant n \bmod m$ и $\lfloor n/m \rfloor$ в противном случае. Нетрудно убедиться, что требуемым условиям удовлетворяет формула

$$\left\lceil \frac{n-k+1}{m} \right\rceil,$$

поскольку она сводится к $q + \lceil (r-k+1)/m \rceil$, если, как и в предыдущем абзаце, записать n в виде $n = qm + r$ (здесь $q = \lfloor n/m \rfloor$). Получаем, что $\lceil (r-k+1)/m \rceil = [k \leqslant r]$, если $1 \leqslant k \leqslant m$ и $0 \leqslant r < m$.

Следовательно, можно записать следующее тождество, которое выражает разбиение n на m как-можно-более-равных частей в невозрастающем порядке:

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil . \qquad (3.24)$$

Это тождество справедливо при любом целом положительном m и при любом целом n (положительном, отрицательном или равном нулю). Мы уже сталкивались со случаем $m = 2$ в (3.17), правда, записанном в несколько ином виде: $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$.

Если бы мы пожелали, чтобы все части располагались в неубывающем порядке — когда меньшие группы предшествуют большим,— можно было бы действовать тем же способом, но с $\lfloor n/m \rfloor$ предметами в первой группе, получая соответствующее тождество:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor . \qquad (3.25)$$

Тождества (3.25) и (3.24) можно обращать одно в другое, пользуясь либо соотношением (3.4), либо тождеством из упр. 12.

Теперь, если в (3.25) заменить n на $\lfloor mx \rfloor$ и применить правило (3.11) для удаления полов внутри полов, то получится тождество, которое справедливо при любом вещественном x:

Некоторые утверждают, что заменять что бы то ни было на mx слишком опасно. (Имеются в виду ракеты MX. — Перев.).

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor . \qquad (3.26)$$

Это до некоторой степени удивительный результат, ибо функция пол является целочисленной аппроксимацией вещественнозначной величины — тем не менее, отдельное приближение слева равняется сумме их целой компании справа. Если считать, что $\lfloor x \rfloor$ — это, грубо говоря, $x - \frac{1}{2}$ в среднем, то левая часть, грубо говоря, равна примерно $mx - \frac{1}{2}$, в то время как правая часть — это приблизительно $(x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}) + \cdots + (x - \frac{1}{2} + \frac{m-1}{m}) = mx - \frac{1}{2}$. Но сумма всех этих грубых приближений оказывается величиной точной!

3.5 ПОЛ/ПОТОЛОК: СУММЫ

Уравнение (3.26) наглядно показывает, что по крайней мере один вид сумм, включающих в себя скобки $\lfloor\ \rfloor$, можно получить в замкнутой форме. А есть ли другие? Есть. Уловка, которая обычно срабатывает в таких случаях, заключается в том, чтобы избавиться от пола или потолка, введя новую переменную.

Посмотрим, к примеру, можно ли получить сумму

$$\sum_{0 \leqslant k < n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

в замкнутой форме. Предлагается ввести переменную $m = \lfloor\sqrt{k}\rfloor$ — это можно сделать „чисто механически", действуя так же, как в задаче с рулеткой:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor &= \sum_{k,m\geqslant 0} m[k<n][m=\lfloor\sqrt{k}\rfloor]\\ &= \sum_{k,m\geqslant 0} m[k<n][m\leqslant\sqrt{k}<m+1]\\ &= \sum_{k,m\geqslant 0} m[k<n][m^2\leqslant k<(m+1)^2]\\ &= \sum_{k,m\geqslant 0} m[m^2\leqslant k<(m+1)^2\leqslant n]\\ &\qquad + \sum_{k,m\geqslant 0} m[m^2\leqslant k<n<(m+1)^2]\,.\end{aligned}$$

И вновь некоторые затруднения с граничными условиями. Допустим сначала, что $n = a^2$ — точный квадрат. Тогда вторая сумма обращается в нуль, а первая может быть вычислена по обычному правилу:

$$\begin{aligned}&\sum_{k,m\geqslant 0} m[m^2\leqslant k<(m+1)^2\leqslant a^2]\\ &\quad= \sum_{m\geqslant 0} m\big((m+1)^2-m^2\big)[m+1\leqslant a]\\ &\quad= \sum_{m\geqslant 0} m(2m+1)[m<a]\\ &\quad= \sum_{m\geqslant 0} (2m^{\underline{2}}+3m^{\underline{1}})[m<a]\\ &\quad= \textstyle\sum_0^a (2m^{\underline{2}}+3m^{\underline{1}})\,\delta m\\ &\quad= \tfrac{2}{3}a(a-1)(a-2)+\tfrac{3}{2}a(a-1) = \tfrac{1}{6}(4a+1)a(a-1)\,.\end{aligned}$$

Убывающие степени убирают сумму.

В общем случае можно положить $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$; тогда нужно всего лишь сложить члены при $a^2 \leqslant k < n$, причем все они равны a, так что в сумме дают $(n-a^2)a$. А это дает сумму в требуемой замкнутой форме:

$$\sum_{0\leqslant k<n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor = na-\tfrac{1}{3}a^3-\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}a\,,\qquad a=\lfloor\sqrt{n}\rfloor. \tag{3.27}$$

Другой подход к вычислению подобных сумм состоит в замене выражения вида $\lfloor x\rfloor$ на $\sum_j[1\leqslant j\leqslant x]$, что допустимо всегда, когда

$x \geqslant 0$. Вот как выглядит этот подход в случае суммы ⌊квадратных корней⌋, если для удобства предположить, что $n = a^2$:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor &= \sum_{j,k} [1\leqslant j\leqslant \sqrt{k}\,][0\leqslant k<a^2] \\ &= \sum_{1\leqslant j<a}\ \sum_{k} [j^2\leqslant k<a^2] \\ &= \sum_{1\leqslant j<a} (a^2-j^2) = a^3 - \tfrac{1}{3}a(a+\tfrac{1}{2})(a+1)\,.\end{aligned}$$

А вот другой пример, в котором замена переменной приводит к преобразованной сумме. В 1909 г. независимо друг от друга и практически одновременно три математика — Боль [30], Серпински [269] и Вейль [49] — обнаружили замечательный факт: если число α иррационально, то при $n \to \infty$ дробные доли $\{n\alpha\}$ распределены весьма равномерно между 0 и 1. Одна из формулировок этого факта такова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} f\bigl(\{k\alpha\}\bigr) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (3.28)$$

при любом иррациональном α и любой ограниченной функции f, которая непрерывна почти всюду. В частности, полагая $f(x) = x$, можно найти *среднее* значение $\{n\alpha\}$, которое оказывается равным $\frac{1}{2}$. (Именно этого и следовало ожидать, но разве не приятно сознавать, что это справедливо вне зависимости от того, каково на самом деле иррациональное число α.)

Внимание! Это довольно трудный материал. Для начала достаточно быстро пробежать две следующие страницы — они пока не столь существенны.
— Сочувствующий ассистент

Теорема Боля, Серпинского и Вейля доказывается путем аппроксимации $f(x)$ сверху и снизу „ступенчатыми функциями“, которые являются линейными комбинациями простых функций

$$f_\nu(x) = [0 \leqslant x < \nu]$$

при $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Однако наша цель состоит не в доказательстве этой теоремы — это удел книг по численным методам. Мы же попробуем выяснить основную причину, по которой она справедлива, рассмотрев частный случай $f(x) = f_\nu(x)$. Другими словами, попробуем выяснить, насколько близка сумма

Ускоряйтесь с этого места

$$\sum_{0\leqslant k<n} [\{k\alpha\}<\nu]$$

к „идеальному“ значению $n\nu$, если n велико и α иррационально.

С этой целью определим *отклонение* $D(\alpha, n)$ как максимум по всем $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ абсолютной величины суммы

$$s(\alpha,n,\nu) = \sum_{0\leqslant k<n} \Bigl([\{k\alpha\}<\nu] - \nu\Bigr)\,. \qquad (3.29)$$

Наша задача — показать, что $D(\alpha, n)$ не „слишком велико" по сравнению с n, показав, что величина $|s(\alpha, n, \nu)|$ всегда достаточно мала для иррационального α.

Сначала можно переписать $s(\alpha, n, \nu)$ в более простом виде, а затем ввести новый индекс суммирования j:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n}\Bigl(\bigl[\{k\alpha\}<\nu\bigr]-\nu\Bigr) &= \sum_{0\leqslant k<n}\bigl(\lfloor k\alpha\rfloor-\lfloor k\alpha-\nu\rfloor-\nu\bigr)\\ &= -n\nu+\sum_{0\leqslant k<n}\sum_{j}[k\alpha-\nu<j\leqslant k\alpha]\\ &= -n\nu+\sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\sum_{k<n}\bigl[j\alpha^{-1}\leqslant k<(j+\nu)\alpha^{-1}\bigr].\end{aligned}$$

Если нам повезет, то можно будет просуммировать по k. Но прежде стоит ввести некоторые новые переменные, чтобы привести эту формулу в божеский вид. Не умаляя общности, предположим, что $0<\alpha<1$, и положим:

Правильно: обозначай и властвуй. Замена переменной k на j — вот что главное.
— Сочувствующий ассистент

$$\begin{aligned} a &= \lfloor\alpha^{-1}\rfloor, & \alpha^{-1} &= a+\alpha',\\ b &= \lceil\nu\alpha^{-1}\rceil, & \nu\alpha^{-1} &= b-\nu'.\end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha'=\{\alpha^{-1}\}$ — это дробная часть α^{-1}, а ν' — это mumble-дробная часть от $\nu\alpha^{-1}$.

И вновь единственное, что нас огорчает,— это граничные условия. Поэтому давайте пока забудем про ограничение '$k<n$' и вычислим сумму по k без него:

$$\begin{aligned}\sum_k\Bigl[k\in\bigl[j\alpha^{-1},\,(j+\nu)\alpha^{-1}\bigr)\Bigr] &= \bigl\lceil(j+\nu)(a+\alpha')\bigr\rceil-\bigl\lceil j(a+\alpha')\bigr\rceil\\ &= b+\lceil j\alpha'-\nu'\rceil-\lceil j\alpha'\rceil.\end{aligned}$$

Ну, а дальше совсем просто — подставляем это в s и выставляем S:

$$s(\alpha,n,\nu)=-n\nu+\lceil n\alpha\rceil b+\sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\bigl(\lceil j\alpha'-\nu'\rceil-\lceil j\alpha'\rceil\bigr)-S,\qquad(3.30)$$

где S — поправка на случаи $k\geqslant n$, от которых нам не удалось избавиться. Величина $j\alpha'$ будет целой только при $j=0$, поскольку число α (и, следовательно, α') иррационально, а величина $j\alpha'-\nu'$ будет целой самое большее при одном значении j. Так что можно „спуститься с потолка на пол":

(Запись [0 или 1] означает нечто, равное либо 0, либо 1,— нет необходимости связывать себя деталями, которые на самом деле несущественны.)

$$\begin{aligned}s(\alpha,n,\nu) &= -n\nu+\lceil n\alpha\rceil b\\ &\qquad-\sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\bigl(\lfloor j\alpha'\rfloor-\lfloor j\alpha'-\nu'\rfloor\bigr)-S+[0\text{ или }1].\end{aligned}$$

Интересно — вместо суммы в замкнутой форме мы получаем сумму, которая весьма похожа на $s(\alpha, n, \nu)$, но отличается параметрами: α' вместо α, $\lceil n\alpha\rceil$ вместо n и ν' вместо ν. А что если получить

рекуррентность для $s(\alpha, n, \nu)$, которая (как мы надеемся) приведет к рекуррентности для отклонения $D(\alpha, n)$? Это означает, что мы хотим ввести в рассмотрение сумму

$$s(\alpha', \lceil n\alpha \rceil, \nu') = \sum_{0 \leqslant j < \lceil n\alpha \rceil} \left(\lfloor j\alpha' \rfloor - \lfloor j\alpha' - \nu' \rfloor - \nu' \right),$$

получая рекуррентность

$$s(\alpha,n,\nu) = -n\nu + \lceil n\alpha \rceil b - \lceil n\alpha \rceil \nu' - s(\alpha', \lceil n\alpha \rceil, \nu') - S + [0 \text{ или } 1].$$

Вспоминая, что $b - \nu' = \nu\alpha^{-1}$, мы обнаруживаем, что все прекрасно упростится, если заменить $\lceil n\alpha \rceil (b - \nu')$ на $n\alpha(b - \nu') = n\nu$:

$$s(\alpha, n, \nu) = -s(\alpha', \lceil n\alpha \rceil, \nu') - S + \epsilon + [0 \text{ или } 1].$$

Здесь ϵ — некоторая положительная добавка, меньшая $\nu\alpha^{-1}$. В упр. 18 доказывается, что подобно ей S лежит между 0 и $\lceil \nu\alpha^{-1} \rceil$. К тому же можно вывести из суммы член при $j = \lceil n\alpha \rceil - 1 = \lfloor n\alpha \rfloor$, так как он дает либо ν', либо $\nu' - 1$. Следовательно, если взять максимум абсолютных величин по всем ν, то получим

$$D(\alpha, n) \leqslant D(\alpha', \lfloor \alpha n \rfloor) + \alpha^{-1} + 2. \qquad (3.31)$$

Методы, которые мы будем изучать в последующих главах, позволяют, исходя из этой рекуррентности, сделать вывод о том, что $D(\alpha, n)$ всегда много меньше n, если n достаточно велико. Следовательно, теорема (3.28) справедлива; однако сходимость к пределу не всегда очень быстрая (см. упр. 9.45 и 9.61).

Конец ускорения

Вот-те на — всего лишь упражнение на манипуляции с суммами, полами и потолками. Читателям, которые не приучены „доказывать, что погрешности невелики", трудно поверить в то, что у кого-то могло бы хватить смелости не отступить перед такими безнадежными суммами. На самом деле повторное рассмотрение показывает, что все это вычисление пронизывает одна простая мысль. Суть ее в том, что некоторая сумма $s(\alpha, n, \nu)$ из n членов может быть сведена к аналогичной сумме из не более чем $\lceil \alpha n \rceil$ членов. Все остальное сводится на нет, за исключением небольшого остатка, образованного из близких к граничным членов.

А теперь вдохнем поглубже и вычислим еще одну сумму, которая также нетривиальна, но имеет одно огромное преимущество (по сравнению с только что вычисленной): она выражается в замкнутой форме, так что можно легко проверить ответ. Теперь задача будет состоять в том, чтобы обобщить сумму в (3.26), найдя выражение для

Это более крепкая сумма полов или сумма более крепких полов?

$$\sum_{0 \leqslant k < m} \left\lfloor \frac{nk + x}{m} \right\rfloor, \qquad m, n \text{ — целые числа}, \quad m > 0.$$

Нахождение этой суммы в замкнутой форме — орешек покрепче тех, с которыми мы имели дело до сих пор (за исключением,

возможно, задачи об отклонении, с которой мы только что разобрались). Но эта задача настолько поучительна, что мы будем возиться с ней до самого конца данной главы.

Предупреждаем: это только начало тянущейся до конца главы выкладки, представляющей собой решение одной нудной задачи, поставленной исключительно ради любопытства.
— Студенты

Как обычно, особенно при решении трудных задач, начнем с рассмотрения простых крайних случаев. Частный случай $n = 1$ — это тождество (3.26), в котором x заменено на x/m:

$$\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1+x}{m}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{m-1+x}{m}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor .$$

И как в гл. 1 имеет смысл получить еще некоторую информацию, снизойдя до случая $n = 0$:

$$\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor = m\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor .$$

Справедливо. Но почему, чтобы вас заинтересовать, всегда нужно говорить о практической пользе? Эта сумма возникает, например, при изучении и тестировании генераторов случайных чисел. Однако математики рассматривали ее задолго до появления компьютеров, ибо находили естественным поинтересоваться, нет ли способа просуммировать „поставленные на пол" арифметические прогрессии.
— Ваш преподаватель

Но в нашей задаче два параметра, m и n; теперь посмотрим, как выглядят некоторые частные случаи для m. Если $m = 1$, то в сумме всего один член, равный $\lfloor x\rfloor$. Если же $m = 2$, то сумма равна $\lfloor x/2\rfloor + \lfloor (x+n)/2\rfloor$. Можно избавиться от взаимодействия x и n, если вынести n за знак функции пол, но чтобы сделать это, надо рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного n. Если n — четное, то $n/2$ — целое число, так что его можно вынести за знак пола:

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{n}{2}\right) = 2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{n}{2} .$$

Если же n — нечетное, то $(n-1)/2$ — целое число, так что мы получаем

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor + \frac{n-1}{2}\right) = \lfloor x\rfloor + \frac{n-1}{2} .$$

Последний шаг следует из (3.26) при $m = 2$.

Эти формулы при четном и нечетном n несколько напоминают формулы при $n = 0$ и 1, но отчетливой закономерности пока еще не просматривается, так что лучше продолжить рассмотрение еще нескольких крайних случаев. При $m = 3$ сумма равна

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+n}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2n}{3}\right\rfloor ,$$

и возможны три варианта для n: либо оно кратно 3, либо на 1 или на 2 больше этого кратного — т. е. $n \bmod 3 = 0$, 1 или 2. Если $n \bmod 3 = 0$, то $n/3$ и $2n/3$ — целые числа, так что сумма равна

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \frac{n}{3}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \frac{2n}{3}\right) = 3\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + n .$$

Если $n \bmod 3 = 1$, то $(n-1)/3$ и $(2n-2)/3$ — целые числа, так что имеем

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor + \frac{n-1}{3}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor + \frac{2n-2}{3}\right) = \lfloor x\rfloor + n - 1 .$$

Здесь последний шаг опять следует из (3.26), на этот раз при $m = 3$. И, наконец, если $n \bmod 3 = 2$, то

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor + \frac{n-2}{3}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor + \frac{2n-1}{3}\right) = \lfloor x\rfloor + n - 1 .$$

Наши левые мозговые полушария уже разобрались со случаем $m = 3$, но правые все еще никак не могут последовать их примеру, поэтому перейдем к случаю $m = 4$:

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+3n}{4}\right\rfloor .$$

По крайней мере теперь мы знаем уже достаточно, для того чтобы рассмотреть случаи, основанные на значении $n \bmod m$. Если $n \bmod 4 = 0$, то

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{n}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{2n}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{3n}{4}\right) = 4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{3n}{2} .$$

А если $n \bmod 4 = 1$, то

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+1}{4}\right\rfloor + \frac{n-1}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor + \frac{2n-2}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+3}{4}\right\rfloor + \frac{3n-3}{4}\right) = \lfloor x\rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} .$$

Случай $n \bmod 4 = 3$, как выясняется, дает тот же самый ответ. Наконец, в случае $n \bmod 4 = 2$ мы получаем нечто несколько иное, и это нечто оказывается важным ключом к установлению закономерности в общем случае:

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor + \frac{n-2}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{2n}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor + \frac{3n-2}{4}\right)$$
$$= 2\left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor\right) + \frac{3n}{2} - 1 = 2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{3n}{2} - 1 .$$

На последнем шаге упрощается нечто вида $\lfloor y/2\rfloor + \lfloor (y+1)/2\rfloor$, что вновь оказывается частным случаем (3.26).

Вот сводка значений нашей суммы при малых m:

m	$n \bmod m = 0$	$n \bmod m = 1$	$n \bmod m = 2$	$n \bmod m = 3$
1	$\lfloor x\rfloor$			
2	$2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{n}{2}$	$\lfloor x\rfloor + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$		
3	$3\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + n$	$\lfloor x\rfloor + n - 1$	$\lfloor x\rfloor + n - 1$	
4	$4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{3n}{2}$	$\lfloor x\rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$	$2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{3n}{2} - 1$	$\lfloor x\rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

„Пытливый ум требует приносящей удовлетворение умственной деятельности как необходимого условия его совершенствования. 'Необходимость — источник открытий' — бесхитростная поговорка. 'Необходимость — источник бесплодных усилий' — гораздо ближе к истине. Основой роста современных открытий является наука, а наука почти целиком произрастает на почве удовлетворения собственного любопытства."
— А. Н. Уайтхед [299]

Это выглядит так, как если бы мы имели нечто вида

$$a\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor + bn + c\,,$$

где a, b, и c каким-то образом зависят от m и n. Даже близорукие в состоянии заметить, что b, похоже, равно $(m-1)/2$. Труднее разглядеть выражение для a, но случай $n \bmod 4 = 2$ указывает на то, что a, похоже, равно $\text{НОД}(m,n)$ — наибольшему общему делителю m и n. Это не лишено смысла, так как $\text{НОД}(m,n)$ — это тот множитель, который мы выделяем из m и n, приводя дробь n/m к несократимой, а наша сумма включает в себя дробь n/m. (Операции с НОД будут обстоятельно рассмотрены в гл. 4.) Величина c представляется более таинственной, но, возможно, она как-нибудь получится в ходе доказательства наших предположений относительно a и b.

Вычисляя сумму при малых m, мы, по существу, переписали каждый член этой суммы в виде

$$\left\lfloor\frac{x+kn}{m}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x+kn \bmod m}{m}\right\rfloor + \frac{kn}{m} - \frac{kn \bmod m}{m}\,,$$

ибо $(kn - kn \bmod m)/m$ — целое число, которое может быть вынесено за скобки пола. Таким образом, исходную сумму можно представить в следующем развернутом виде:

$$\begin{array}{clclcl}
 & \left\lfloor\dfrac{x}{m}\right\rfloor & + & \dfrac{0}{m} & - & \dfrac{0 \bmod m}{m} \\
+ & \left\lfloor\dfrac{x+n \bmod m}{m}\right\rfloor & + & \dfrac{n}{m} & - & \dfrac{n \bmod m}{m} \\
+ & \left\lfloor\dfrac{x+2n \bmod m}{m}\right\rfloor & + & \dfrac{2n}{m} & - & \dfrac{2n \bmod m}{m} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+ & \left\lfloor\dfrac{x+(m-1)n \bmod m}{m}\right\rfloor & + & \dfrac{(m-1)n}{m} & - & \dfrac{(m-1)n \bmod m}{m}\,.
\end{array}$$

Когда мы экспериментировали с малыми значениями m, эти три колонки приводили нас соответственно к $a\lfloor x/a\rfloor$, bn и c.

В частности, теперь можно понять, откуда берется b. Вторая колонка представляет собой арифметическую прогрессию, сумма которой нам известна — это среднее первого и последнего членов, помноженное на число членов:

$$\frac{1}{2}\left(0 + \frac{(m-1)n}{m}\right)\cdot m = \frac{(m-1)n}{2}\,.$$

Таким образом, наша догадка, что $b = (m-1)/2$, подтвердилась.

Первая и третья колонки стоят покрепче: чтобы определить a и c, надо повнимательнее присмотреться к последовательности чисел

$$0 \bmod m,\ \ n \bmod m,\ \ 2n \bmod m,\ \ \ldots,\ \ (m-1)n \bmod m.$$

Допустим, к примеру, что $m = 12$ и $n = 5$. Если представить эту последовательность в виде часового циферблата, то данные числа суть 0 часов (12 часов принимается за 0 часов), затем 5 часов, 10 часов, 3 часа (= 15 часов), 8 часов и т. д.— оказывается, что каждый час пробивает лишь однажды.

Предположим теперь, что $m = 12$ и $n = 8$. Тогда данные числа суть 0 часов, 8 часов, 4 часа (= 16 часов), но затем 0, 8 и 4 повторяются. Так как 8 и 12 кратны 4, а числа начинаются с 0 (тоже кратного 4), вырваться из этого замкнутого круга невозможно — все числа должны быть кратны 4.

В этих двух случаях мы имеем $\text{нод}(12,5) = 1$ и $\text{нод}(12,8) = 4$. Общее правило, которое будет доказано в следующей главе, гласит, что если $d = \text{нод}(m,n)$, то мы получаем последовательность чисел $0, d, 2d, \ldots, m-d$, взятых в некотором порядке, за которой следуют еще $d-1$ копий той же последовательности. К примеру, при $m = 12$ и $n = 8$ набор чисел 0, 8, 4 встречается четыре раза.

Сейчас — лемма, потом — дилемма.

Итак, первая колонка суммы приобретает ясный смысл: она содержит d копий членов $\lfloor x/m \rfloor$, $\lfloor (x+d)/m \rfloor$, ..., $\lfloor (x+m-d)/m \rfloor$, взятых в некотором порядке, так что их сумма равна

$$\begin{aligned} d\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+d}{m}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{x+m-d}{m}\right\rfloor\right) \\ = d\left(\left\lfloor\frac{x/d}{m/d}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x/d+1}{m/d}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{x/d+m/d-1}{m/d}\right\rfloor\right) \\ = d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor. \end{aligned}$$

Здесь последний шаг — еще одно применение (3.26). Наша догадка относительно a подтвердилась:

$$a = d = \text{нод}(m,n).$$

А теперь, как мы и предполагали, можно вычислить c, ибо становится понятным содержание третьей колонки. Она содержит d копий членов арифметической прогрессии $0/m$, d/m, $2d/m$, ..., $(m-d)/m$, так что сумма их равна

$$d\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{m-d}{m}\right)\cdot\frac{m}{d}\right) = \frac{m-d}{2};$$

на самом деле элементы третьей колонки не складываются, а вычитаются, так что

$$c = \frac{d-m}{2}.$$

Конец загадкам, конец догадкам. Искомая сумма в замкнутой форме выглядит так:

$$\sum_{0\leqslant k<m}\left\lfloor\frac{nk+x}{m}\right\rfloor = d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2},$$

где $d = \text{НОД}(m,n)$. В порядке проверки можно убедиться в том, что это проходит для уже известных нам частных случаев $n = 0$ и $n = 1$. Если $n = 0$, то получаем $d = \text{НОД}(m,0) = m$; в этой формуле два последних члена равны нулю, поэтому формула дает правильный ответ $m\lfloor x/m\rfloor$. А при $n = 1$ мы получаем $d = \text{НОД}(m,1) = 1$; два последних члена чудесно сокращаются и сумма равна просто $\lfloor x\rfloor$.

После небольшой манипуляции с полученным замкнутым выражением его можно сделать даже симметричным относительно m и n:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<m}\left\lfloor\frac{nk+x}{m}\right\rfloor &= d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2}\\ &= d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{d-m}{2}\\ &= d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2}. \qquad (3.32)\end{aligned}$$

Оп-па! Я повержен на пол.

Это несколько неожиданно, поскольку нет никакого повода подозревать, что такая сумма должна быть симметричной. Нами доказан „закон взаимности“:

$$\sum_{0\leqslant k<m}\left\lfloor\frac{nk+x}{m}\right\rfloor = \sum_{0\leqslant k<n}\left\lfloor\frac{mk+x}{n}\right\rfloor, \qquad \text{целые } m,n>0.$$

К примеру, если $m = 41$ и $n = 127$, то левая сумма состоит из 41 члена, а правая состоит из 127 членов — тем не менее они оказываются равными при любом вещественном x.

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Когда в гл. 1 мы разбирали задачу Иосифа, то представляли произвольное целое положительное число n в виде $n = 2^m + l$, где $0 \leqslant l < 2^m$. Приведите явные формулы для l и m как функций n, используя скобки пола и/или потолка.

2 Как выглядит формула для ближайшего целого к заданному вещественному числу x? В случае „равновесия“ — когда x лежит ровно посредине между целыми числами — приведите выражение, округляющее результат: (a) в сторону увеличения, т. е. до $\lceil x\rceil$; (b) в сторону уменьшения, т. е. до $\lfloor x\rfloor$.

3 Вычислите $\lfloor\lfloor m\alpha\rfloor n/\alpha\rfloor$, если m и n — целые положительные числа, а α — иррациональное число, большее n.

4 В тексте охарактеризованы задачи с 1-го уровня по 5-й. А что представляет собой задача уровня 0? (Это, между прочим, вопрос *не* уровня 0.)

5 Укажите необходимое и достаточное условие того, что $\lfloor nx\rfloor = n\lfloor x\rfloor$, если n — целое положительное число. (Ваше условие должно включать в себя $\{x\}$.)

6 Что примечательного можно сказать про $\lfloor f(x)\rfloor$, если $f(x)$ — непрерывная, монотонно *убывающая* функция, которая принимает целые значения, только когда само x — целое число?

7 Решите рекуррентность

$$\begin{aligned} X_n &= n && \text{при } 0 \leqslant n < m, \\ X_n &= X_{n-m} + 1 && \text{при } n \geqslant m. \end{aligned}$$

8 Докажите *принцип ящиков Дирихле*: если n предметов размещены по m ящикам, то некоторый ящик должен содержать $\geqslant \lceil n/m\rceil$ предметов, а некоторый ящик должен содержать $\leqslant \lfloor n/m\rfloor$.

9 В 1800-м году до н. э. египетские математики представляли рациональные числа между 0 и 1 в виде сумм „основных“ дробей $1/x_1 + \cdots + 1/x_k$, где x_i суть различные целые положительные числа. Например, вместо $\frac{2}{5}$ они писали $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Докажите, что всегда есть возможность делать это систематически: если $0 < m/n < 1$, то

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \left\{\text{представление } \frac{m}{n} - \frac{1}{q}\right\}, \qquad q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil .$$

(Это *алгоритм Фибоначчи*, предложенный Леонардо Фибоначчи в 1202 г. н. э.)

Речь идет о так называемом „папирусе Райнда“ — по имени обнаружившего его английского египтолога, или „папирусе Ахмеса“ — по имени составившего его египетского писца, который служит основным источником сведений о древнеегипетской математике; подробнее см. Д. Я. Стройк, [288, с. 37]. — Перев.*

Обязательные упражнения

10 Покажите, что выражение

$$\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$$

всегда равно либо $\lfloor x\rfloor$, либо $\lceil x\rceil$. При каких условиях получается тот или иной случай?

11 Приведите детали отмеченного в тексте доказательства того, что открытый интервал (α, β) содержит ровно $\lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1$ целых чисел при $\alpha < \beta$. Почему для корректности доказательства нужно исключить случай $\alpha = \beta$?

12 Докажите, что

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

при любом целом n и любом целом положительном m. [Это тождество дает другой способ обращения потолков в полы и *обратно* вместо применения рефлексивного закона (3.4).]

13 Пусть α и β — вещественные положительные числа. Докажите, что $\mathrm{Spec}(\alpha)$ и $\mathrm{Spec}(\beta)$ образуют разбиение всех целых положительных чисел тогда и только тогда, когда α и β иррациональны и $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

14 Подтвердите или опровергните, что

$$(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y \qquad \text{при целом } n.$$

15 Имеется ли аналогичное (3.26) тождество, в котором вместо полов используются потолки?

16 Докажите, что $n \bmod 2 = \bigl(1 - (-1)^n\bigr)/2$. Найдите и докажите аналогичное выражение для $n \bmod 3$ вида $a + b\omega^n + c\omega^{2n}$, где ω — комплексное число $(-1 + i\sqrt{3})/2$. *Указание:* $\omega^3 = 1$ и $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

17 Вычислите сумму $\sum_{0 \leqslant k < m} \lfloor x + k/m \rfloor$ в случае, когда $x \geqslant 0$, подставляя $\sum_j [1 \leqslant j \leqslant x + k/m]$ вместо $\lfloor x + k/m \rfloor$ и суммируя сперва по k. Согласуется ли ваш ответ с (3.26)?

18 Докажите, что остаточный член S в (3.30) не превосходит $\alpha^{-1}v$. *Указание:* покажите, что малые значения j не существенны.

Домашние задания

19 Какому необходимому и достаточному условию должно удовлетворять вещественное число $b > 1$, чтобы

$$\lfloor \log_b x \rfloor = \lfloor \log_b \lfloor x \rfloor \rfloor$$

при любом вещественном $x \geqslant 1$?

20 Найдите сумму всех чисел, кратных x, в замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, при $x > 0$.

21 Сколько чисел вида 2^m, $0 \leqslant m \leqslant M$, начинаются с 1 в десятичной записи?

22 Вычислите суммы

$$S_n = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor n/2^k + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{и} \quad T_n = \sum_{k \geqslant 1} 2^k \left\lfloor n/2^k + \frac{1}{2} \right\rfloor^2.$$

23 Покажите, что n-й элемент последовательности

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

равен $\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$. (Каждое число m входит в данную последовательность m раз.)

24 Упражнение 13 устанавливает замечательную связь между двумя мультимножествами $\mathrm{Spec}(\alpha)$ и $\mathrm{Spec}(\alpha/(\alpha-1))$, когда α — некоторое иррациональное число > 1, поскольку $1/\alpha + (\alpha-1)/\alpha = 1$. Найдите (и докажите) другую примечательную связь между мультимножествами $\mathrm{Spec}(\alpha)$ и $\mathrm{Spec}(\alpha/(\alpha+1))$, когда α — некоторое положительное вещественное число.

25 Подтвердите или опровергните, что числа Кнута, определенные соотношением (3.16), удовлетворяют условию $K_n \geqslant n$ при любом неотрицательном n.

26 Покажите, что вспомогательные числа Иосифа (3.20) удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{q}{q-1}\right)^n \leqslant D_n^{(q)} \leqslant q\left(\frac{q}{q-1}\right)^n \qquad \text{при } n \geqslant 0.$$

27 Докажите, что среди определенных посредством (3.20) чисел $D_n^{(3)}$ бесконечно много четных и бесконечно много нечетных.

28 Решите рекуррентность

$$\begin{aligned} a_0 &= 1\,, \\ a_n &= a_{n-1} + \lfloor\sqrt{a_{n-1}}\rfloor \qquad \text{при } n > 0. \end{aligned}$$

29 Покажите в дополнение к (3.31), что

$$D(\alpha, n) \geqslant D(\alpha', \lfloor\alpha n\rfloor) - \alpha^{-1} - 2\,.$$

Эта формула несколько отклоняется от (3.31).

30 Покажите, что рекуррентность

$$\begin{aligned} X_0 &= m\,, \\ X_n &= X_{n-1}^2 - 2 \qquad \text{при } n > 0 \end{aligned}$$

имеет решение $X_n = \lceil\alpha^{2^n}\rceil$, если m — целое число, большее 2, где $\alpha + \alpha^{-1} = m$ и $\alpha > 1$. К примеру, если $m = 3$, то решением является

$$X_n = \lceil\phi^{2^{n+1}}\rceil\,, \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \alpha = \phi^2\,.$$

31 Подтвердите или опровергните, что $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

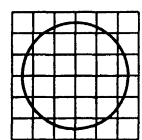
32 Обозначим через $\|x\| = \min(x - \lfloor x\rfloor, \lceil x\rceil - x)$ расстояние от x до ближайшего целого. Какова величина суммы

$$\sum_k 2^k \|x/2^k\|^2\,?$$

(Заметьте, что эта сумма может быть бесконечной в обе стороны. Так, если $x = 1/3$, то ее члены отличны от нуля как при $k \to -\infty$, так и при $k \to +\infty$.)

Контрольные работы

33 На шахматной доске размером $2n \times 2n$ клеток симметрично начерчена окружность с диаметром $2n-1$ единиц; вот как это выглядит при $n = 3$:



a Через сколько клеток доски проходит данная окружность?

b Укажите функцию $f(n,k)$, такую, что внутри данной окружности полностью умещается ровно $\sum_{k=1}^{n-1} f(n,k)$ клеток доски.

34 Пусть $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \lceil \lg k \rceil$.

a Найдите выражение для $f(n)$ при $n \geqslant 1$ в замкнутой форме.

b Докажите, что $f(n) = n-1+f(\lceil n/2 \rceil)+f(\lfloor n/2 \rfloor)$ при любом $n \geqslant 1$.

Упрощая, не измените значение.

35 Упростите формулу $\lfloor (n+1)^2 n!\, e \rfloor \bmod n$.

36 Считая, что n — целое неотрицательное число, найдите выражение для суммы

$$\sum_{1<k<2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor \lg k \rfloor} 4^{\lfloor \lg \lg k \rfloor}}$$

в замкнутой форме.

37 Докажите справедливость тождества

$$\sum_{0 \leqslant k < m} \left(\left\lfloor \frac{m+k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{m^2}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\min\big(m \bmod n, (-m) \bmod n\big)^2}{n} \right\rfloor$$

при любых целых положительных m и n.

38 Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — вещественные числа, такие, что тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor m x_k \rfloor = \left\lfloor m \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \right\rfloor$$

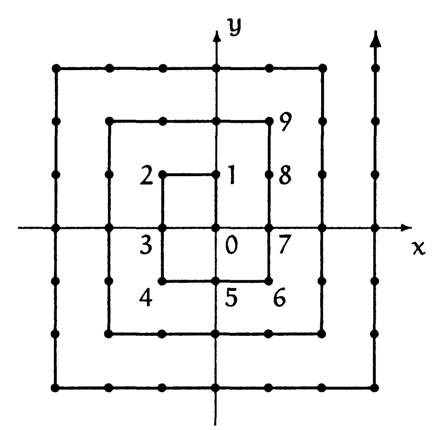
справедливо при любом целом положительном m. Выясните что-нибудь характерное для чисел $x_1, \ldots, x_n$.

39 Докажите, что двойная сумма

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant \log_b x}\ \sum_{0<j<b} \lceil (x+jb^k)/b^{k+1}\rceil$$

равна $(b-1)(\lfloor\log_b x\rfloor+1)+\lceil x\rceil-1$ при каждом вещественном $x\geqslant 1$ и каждом целом $b>1$.

40 Спиральная функция $\sigma(n)$, схематически показанная внизу, отображает целое неотрицательное число n в упорядоченную пару целых чисел $(x(n), y(n))$. Например, она отображает $n = 9$ в упорядоченную пару $(1, 2)$.



В южном полушарии спираль закручена в другую сторону.

a Докажите, что если $m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, то

$$x(n) = (-1)^m\Big(\big(n - m(m+1)\big)\cdot\big[\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor \text{ четное}\big] + \lceil \tfrac{1}{2}m\rceil\Big),$$

и укажите аналогичную формулу для $y(n)$. *Указание:* разбейте спираль на сегменты W_k, S_k, E_k, N_k в зависимости от значения $\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor = 4k-2,\ 4k-1,\ 4k,\ 4k+1$.

b И наоборот, докажите, что n можно установить из $\sigma(n)$ по формуле вида

$$n = (2k)^2 \pm \big(2k + x(n) + y(n)\big), \quad k = \max\big(|x(n)|, |y(n)|\big).$$

Приведите правило, определяющее, когда знак $\pm$ есть $+$, а когда $-$.

Конкурсные задачи

41 Пусть f и g — возрастающие функции, такие, что множества $\{f(1), f(2), \ldots\}$ и $\{g(1), g(2), \ldots\}$ образуют разбиение всех целых положительных чисел. Предположим, что f и g связаны условием $g(n) = f\big(f(n)\big) + 1$ при любом $n > 0$. Докажите, что $f(n) = \lfloor n\phi\rfloor$ и $g(n) = \lfloor n\phi^2\rfloor$, где $\phi = (1+\sqrt{5})/2$.

42 Существуют ли вещественные числа α, β и γ, такие, что $\text{Spec}(\alpha)$, $\text{Spec}(\beta)$ и $\text{Spec}(\gamma)$ вместе взятые образуют разбиение множества целых положительных чисел?

43 Дайте другую интересную интерпретацию числам Кнута, развернув рекуррентность (3.16).

44 Покажите, что существуют целые числа $a_n^{(q)}$ и $d_n^{(q)}$, такие, что

$$a_n^{(q)} = \frac{D_{n-1}^{(q)} + d_n^{(q)}}{q-1} = \frac{D_n^{(q)} + d_n^{(q)}}{q} \qquad \text{при } n > 0,$$

где $D_n^{(q)}$ является решением рекуррентности (3.20). Воспользуйтесь этим фактом для получения решения обобщенной задачи Иосифа в другой форме:

$$J_q(n) = 1 + d_k^{(q)} + q(n - a_k^{(q)}) \qquad \text{при } a_k^{(q)} \leqslant n < a_{k+1}^{(q)}.$$

45 Примените прием из упр. 30 для нахождения решения рекуррентности

$$Y_0 = m,$$
$$Y_n = 2Y_{n-1}^2 - 1 \qquad \text{при } n > 0$$

в замкнутой форме, если m — целое положительное число.

46 Докажите, что если $n = \lfloor(\sqrt{2}^{\,l} + \sqrt{2}^{\,l-1})m\rfloor$, где m и l — целые неотрицательные числа, то $\lfloor\sqrt{2n(n+1)}\rfloor = \lfloor(\sqrt{2}^{\,l+1} + \sqrt{2}^{\,l})m\rfloor$. Воспользуйтесь этим замечательным свойством для нахождения решения рекуррентности

$$L_0 = a, \qquad \text{целое } a > 0,$$
$$L_n = \lfloor\sqrt{2L_{n-1}(L_{n-1}+1)}\rfloor \qquad \text{при } n > 0$$

в замкнутой форме. *Указание:* $\lfloor\sqrt{2n(n+1)}\rfloor = \lfloor\sqrt{2}(n + \frac{1}{2})\rfloor$.

47 Говорят, что $f(x)$ является *репликативной* функцией, если

$$f(mx) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{m}\right) + \cdots + f\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

при каждом целом положительном m. Укажите, каким необходимым и достаточным условиям должно удовлетворять вещественное число c, чтобы следующие функции являлись репликативными:

a $f(x) = x + c$;

b $f(x) = [x + c \text{ целое}]$;

c $f(x) = \max(\lfloor x\rfloor, c)$;

d $f(x) = x + c\lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}[x \text{ не целое}]$.

48 Докажите тождество

$$x^3 = 3x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor + 3\{x\}\{x\lfloor x\rfloor\} + \{x\}^3 - 3\lfloor x\rfloor\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor + \lfloor x\rfloor^3$$

и покажите, как можно получить аналогичные формулы для x^n при $n > 3$.

49 Укажите, какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять вещественные числа $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\beta \geqslant 0$, чтобы можно было установить α и β из бесконечного мультимножества величин

$$\{ \lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor n\beta \rfloor \mid n > 0 \}.$$

Исследовательские проблемы

50 Укажите, какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять вещественные неотрицательные числа α и β, чтобы можно было установить α и β из бесконечного мультимножества величин

$$\{ \lfloor \lfloor n\alpha \rfloor \beta \rfloor \mid n > 0 \}.$$

51 Обозначим через x вещественное число $\geqslant \phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Тогда решение рекуррентности

$$Z_0(x) = x\,,$$
$$Z_n(x) = Z_{n-1}(x)^2 - 1 \qquad \text{при } n > 0$$

может быть записано в виде $Z_n(x) = \lceil f(x)^{2^n} \rceil$, если x — целое число, где

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} Z_n(x)^{1/2^n}\,,$$

так как $Z_n(x) - 1 < f(x)^{2^n} < Z_n(x)$. Какими еще интересными свойствами обладает функция $f(x)$?

52 При заданных вещественных неотрицательных числах α и β положим

$$\mathrm{Spec}(\alpha;\beta) = \{ \lfloor \alpha+\beta \rfloor, \lfloor 2\alpha+\beta \rfloor, \lfloor 3\alpha+\beta \rfloor, \ldots \}$$

— мультимножество, обобщающее мультимножество $\mathrm{Spec}(\alpha) = \mathrm{Spec}(\alpha;0)$. Докажите или опровергните, что если $m \geqslant 3$ мультимножеств $\mathrm{Spec}(\alpha_1;\beta_1)$, $\mathrm{Spec}(\alpha_2;\beta_2)$, ..., $\mathrm{Spec}(\alpha_m;\beta_m)$ образуют разбиение всех целых положительных чисел и при этом параметры $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$ рациональны, то

$$\alpha_k = \frac{2^m - 1}{2^{k-1}} \qquad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant m.$$

53 Алгоритм Фибоначчи (из упр. 9) является „жадным“ в том смысле, что на каждом шаге он выбирает как можно более малое q. Известен более сложный алгоритм, с помощью которого любая дробь m/n с нечетным n может быть представлена в виде суммы различных основных дробей $1/q_1 + \cdots + 1/q_k$ с *нечетными* знаменателями. Всегда ли заканчивается жадный алгоритм при поиске такого представления?

4

Элементы теории чисел

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА ЗАНИМАЮТ ОДНО ИЗ КЛЮЧЕВЫХ МЕСТ в дискретной математике, которая нас особенно интересует в этой книге. Поэтому нам следует получить представление об *элементах теории чисел* — важном разделе математики, имеющем дело со свойствами целых чисел.

Короче говоря, готовьтесь пойти ко дну.

В предыдущей главе мы ненадолго окунулись в воды теории чисел, когда учились плавать стилями 'mod' и 'НОД'. А теперь решительно бросимся и уже надолго погрузимся в стихию данного предмета.

4.1 ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ

Говорят, что m делит n (или же n делится на m), если $m > 0$, а отношение n/m — целое число. Это свойство чисел лежит в основе всей их элементарной теории, так что разумно обзавестись для него специальным обозначением. Поэтому будем писать

$$m \backslash n \iff m > 0 \text{ и } n = mk \text{ при некотором целом } k. \qquad (4.1)$$

(На самом деле, в существующей математической литературе гораздо более употребительно обозначение '$m|n$', а не '$m\backslash n$'. Но с вертикальной чертой вышел явный перебор — ее используют при записи абсолютных величин, множеств, условных вероятностей и т. д., в то время как с наклоненной влево чертой вышел явный недобор. Помимо всего прочего, обозначение '$m\backslash n$' создает впечатление, что m как бы является знаменателем некоторого воображаемого отношения. Так что наберемся смелости склонить наш символ делимости влево!)

То, что m не делит n, записывается как '$m\not\backslash n$'.

Имеется аналогичное соотношение „n кратно m“, которое означает почти то же самое с тем лишь отличием, что m не обязано быть положительным числом. Это просто означает, что $n = mk$ при некотором целом k. Так, например, существует только одно число, кратное 0 (а именно, сам 0), но ничто не делится на 0.

Каждое целое число кратно -1, но никакое целое число (строго говоря) не делится на -1. Эти определения применимы и тогда, когда m и n — любые вещественные числа; например, 2π делится на π. Но мы почти всегда будем пользоваться ими, когда m и n — целые числа. В конце концов, это всего лишь элементарная теория чисел.

„... никакое целое число (строго говоря) не делится на -1." — Грэхем, Кнут, Паташник [90]

Наибольший общий делитель двух целых чисел m и n — это наибольшее целое число, которое делит их оба:

$$\text{НОД}(m, n) = \max\{k \mid k\backslash m \quad \text{и} \quad k\backslash n\}. \tag{4.2}$$

На Британских островах это называется 'hcf' (highest common factor) [а в Соединенных Штатах — 'gcd' (greatest common divisor). — Перев.].

К примеру, $\text{НОД}(12, 18) = 6$. Это известное всем понятие, ибо это не что иное, как общий множитель, который еще в младших классах учатся выделять из дроби m/n, когда приводят ее к несократимому виду: $12/18 = (12/6)/(18/6) = 2/3$. Обратите внимание, что если $n > 0$, то $\text{НОД}(0, n) = n$, так как любое положительное число делит 0, а n является наибольшим делителем самого себя. Но величина $\text{НОД}(0, 0)$ не определена.

Другим хорошо известным понятием является *наименьшее общее кратное*

$$\text{НОК}(m, n) = \min\{k \mid k > 0, \quad m\backslash k \quad \text{и} \quad n\backslash k\}, \tag{4.3}$$

Не путать с наибольшим общим кратным.

которое не определено, если $m \leqslant 0$ или $n \leqslant 0$. Изучающим арифметику это знакомо как наименьший общий знаменатель, к которому приводятся при сложении дроби со знаменателями m и n. Например, $\text{НОК}(12, 18) = 36$, и даже ученики начальных классов знают, что $\frac{7}{12} + \frac{1}{18} = \frac{21}{36} + \frac{2}{36} = \frac{23}{36}$. Понятие НОК отчасти аналогично понятию НОД, но мы не будем уделять ему равного внимания по той причине, что НОД обладает более привлекательными свойствами.

„Прошу — забудь все, чему ты учился в школе, потому что ты этому не научился." — Э. Ландау, [182*, с. 8].

Одним из самых привлекательных свойств НОД является простота его вычисления с помощью известного уже 2300 лет метода, называемого *алгоритмом Евклида*. Для вычисления $\text{НОД}(m, n)$ заданных величин $0 \leqslant m < n$ в алгоритме Евклида используется рекуррентность

$$\begin{aligned} \text{НОД}(0, n) &= n, \\ \text{НОД}(m, n) &= \text{НОД}(n \bmod m, m) \qquad \text{при } m > 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Так, например, $\text{НОД}(12, 18) = \text{НОД}(6, 12) = \text{НОД}(0, 6) = 6$. Указанная рекуррентность законна потому, что любой общий делитель чисел m и n должен быть также общим делителем как числа m, так и числа $n \bmod m$, которое равно $n - \lfloor n/m \rfloor m$. Вряд ли имеется рекуррентность для $\text{НОК}(m, n)$ сколько-нибудь близкая по своей простоте к данной. (См. упр. 2.)

Алгоритм Евклида дает нам и нечто большее: его можно обобщить так, что он будет вычислять целые числа m' и n', удовлетворяющие уравнению

$$m'm + n'n = \text{НОД}(m, n). \tag{4.5}$$

(Не забывайте, что m' и n' могут быть и отрицательны.)

Вот как это делается. Если $m = 0$, мы просто выбираем $m' = 0$ и $n' = 1$. В противном случае мы полагаем $r = n \bmod m$ и применяем этот метод рекурсивно — подставляя r и m вместо m и n, и вычисляя $\bar{r}$ и $\bar{m}$, такие, что

$$\bar{r}\,r + \bar{m}\,m = \text{НОД}(r, m)\,.$$

А поскольку $r = n - \lfloor n/m \rfloor m$ и $\text{НОД}(r, m) = \text{НОД}(m, n)$, то это уравнение превращается в

$$\bar{r}\,(n - \lfloor n/m \rfloor m) + \bar{m}\,m = \text{НОД}(m, n)\,.$$

Левая часть может быть переписана, чтобы показать, как она зависит от m и n:

$$(\bar{m} - \lfloor n/m \rfloor \bar{r})\,m + \bar{r}\,n = \text{НОД}(m, n)\,;$$

следовательно, $m' = \bar{m} - \lfloor n/m \rfloor \bar{r}$ и $n' = \bar{r}$ — это те целые числа, которые нужны в (4.5). К примеру, в нашем излюбленном случае, когда $m = 12$ и $n = 18$, этот метод дает $6 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 1 \cdot 6 + 0 \cdot 12 = (-1) \cdot 12 + 1 \cdot 18$.

Но чем же так привлекательно уравнение (4.5)? Главным образом тем, что числа m' и n' фактически *подтверждают*, что в каждом конкретном случае алгоритм Евклида дает правильный ответ. Предположим, что после продолжительных вычислений наш компьютер сообщил, что $\text{НОД}(m, n) = d$ и что $m'm + n'n = d$, но мы относимся к этому скептически и полагаем, что на самом деле имеется больший общий делитель, который машина почему-то „проглядела". Однако этого быть не может, потому что всякий общий делитель чисел m и n должен делить $m'm + n'n$, а посему он должен делить и d — следовательно, он должен быть $\leqslant d$. К тому же можно легко проверить, что d действительно делит как m, так и n. (Алгоритмы, которые доставляют свои собственные подтверждения правильности результата, называются *самоподтверждающими*.)

До конца этой главы мы будем много раз пользоваться уравнением (4.5). Одним из его важных следствий является следующая мини-теорема:

$$k \backslash m \quad \text{и} \quad k \backslash n \qquad \Longleftrightarrow \qquad k \backslash \text{НОД}(m, n)\,. \tag{4.6}$$

(Доказательство. Если число k делит как m, так и n, то оно делит $m'm + n'n$, а потому делит и $\text{НОД}(m, n)$. Обратно, если число k делит $\text{НОД}(m, n)$, то оно делит делитель m и делитель n, а потому делит как m, так и n.) Мы всегда знали, что всякий общий делитель чисел m и n должен быть *меньшим или равным* их НОД — по определению наибольшего общего делителя. А теперь мы узнали, что всякий общий делитель на самом деле является *делителем* их наибольшего общего делителя.

Иногда бывает необходимо просуммировать по всем делителям числа n. В таком случае зачастую полезно воспользоваться

удобным правилом

$$\sum_{m\backslash n} a_m = \sum_{m\backslash n} a_{n/m}\,, \qquad \text{целое } n > 0, \tag{4.7}$$

которое справедливо в силу того, что n/m пробегает те же делители числа n, что и m. Так, при $n = 12$ это означает, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 + a_{12} = a_{12} + a_6 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$.

Важный специальный случай суммы (4.7) — функция $\sum_{m\backslash n} m$, связанная с так называемыми „совершенными числами“. См. М. Гарднер, [60, с. 343–352]. — Перев.*

Справедливо также несколько более общее равенство,

$$\sum_{m\backslash n} a_m = \sum_{k}\sum_{m>0} a_m[n=mk]\,, \tag{4.8}$$

которое немедленно следует из определения (4.1). Если n — положительное число, то правая часть (4.8) есть $\sum_{k\backslash n} a_{n/k}$, следовательно, (4.8) влечет за собой (4.7). Но равенство (4.8) справедливо и при отрицательных n. (В таких случаях ненулевые члены в правой части появляются тогда, когда k является отрицательным делителем n.)

Кроме того, двойная сумма по делителям может быть „переставлена“ по правилу

$$\sum_{m\backslash n}\sum_{k\backslash m} a_{k,m} = \sum_{k\backslash n}\sum_{l\backslash(n/k)} a_{k,kl}\,. \tag{4.9}$$

К примеру, если $n = 12$, то это правило приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &+ (a_{1,2}+a_{2,2}) + (a_{1,3}+a_{3,3}) \\ &+ (a_{1,4}+a_{2,4}+a_{4,4}) + (a_{1,6}+a_{2,6}+a_{3,6}+a_{6,6}) \\ &+ (a_{1,12}+a_{2,12}+a_{3,12}+a_{4,12}+a_{6,12}+a_{12,12}) \\ = (a_{1,1} &+ a_{1,2}+a_{1,3}+a_{1,4}+a_{1,6}+a_{1,12}) \\ &+ (a_{2,2}+a_{2,4}+a_{2,6}+a_{2,12}) + (a_{3,3}+a_{3,6}+a_{3,12}) \\ &+ (a_{4,4}+a_{4,12}) + (a_{6,6}+a_{6,12}) + a_{12,12}\,. \end{aligned}$$

Равенство (4.9) можно доказать с помощью нотации Айверсона. Его левая часть есть

$$\sum_{j,l}\sum_{k,m>0} a_{k,m}[n=jm][m=kl] = \sum_{j}\sum_{k,l>0} a_{k,kl}[n=jkl]\,,$$

а правая —

$$\sum_{j,m}\sum_{k,l>0} a_{k,kl}[n=jk][n/k=ml] = \sum_{m}\sum_{k,l>0} a_{k,kl}[n=mlk]\,,$$

что то же самое, если не считать переименования индексов. Этот пример показывает, что те приемы, которыми мы овладели в гл. 2, пригодны и при изучении элементов теории чисел.

4.2 ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

А как насчет p в слове 'оговаривается'?

Целое положительное число p называется *простым*, если оно имеет только два делителя, а именно 1 и p. *Вплоть до конца этой главы буквой p всегда будет обозначаться простое число, даже если это и не оговаривается явно.* По соглашению 1 не является простым числом, так что последовательность простых чисел начинается так:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots .$$

Некоторые числа кажутся, но не являются простыми, подобно числам 91 $(= 7\cdot 13)$ и 161 $(= 7\cdot 23)$. Эти и другие числа, которые имеют три и более делителей, называются *составными*. Каждое большее 1 целое число — либо простое, либо составное, но не то и другое одновременно.

Простые числа крайне важны, ибо это те „кирпичики", из которых строятся все целые положительные числа — всякое целое положительное число n может быть записано в виде произведения простых чисел:

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m = \prod_{k=1}^{m} p_k\,, \qquad p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_m\,. \tag{4.10}$$

Так, $12 = 2\cdot 2\cdot 3$, $11011 = 7\cdot 11\cdot 11\cdot 13$, $11111 = 41\cdot 271$. (Произведения, обозначаемые знаком $\prod$, аналогичны суммам, обозначаемым знаком $\sum$, в том смысле, как это разъяснялось в упр. 2.25. Если $m = 0$, то такое произведение считается пустым, а его величина равна 1 по определению — именно так число $n = 1$ оказывается представленным с помощью (4.10).) Подобное разложение на множители всегда возможно, ибо если число $n > 1$ не является простым, то оно имеет делитель n_1, такой, что $1 < n_1 < n$; следовательно, n можно записать в виде $n = n_1 \cdot n_2$, а (по индукции) n_1 и n_2 могут быть записаны в виде произведений простых чисел.

Более того, разложение (4.10) *единственно*: возможен только один способ записи числа n в виде произведения простых чисел в неубывающем порядке. Это утверждение называется ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМОЙ АРИФМЕТИКИ и кажется настолько очевидным, что впору усомниться в необходимости его доказательства. Разве могут два разных набора простых чисел иметь одно и то же произведение? Конечно же, не могут, но *не* просто „по определению простых чисел". Так, если рассмотреть множество всех вещественных чисел вида $m + n\sqrt{10}$, где m и n — целые, то произведение любых двух таких чисел снова будет числом того же вида, и можно было бы назвать такое число „простым", если оно не может быть разложено на множители нетривиальным способом. Число 6 имеет два представления, $2\cdot 3 = (4+\sqrt{10}\,)(4-\sqrt{10}\,)$, и тем не менее в упр. 36 показано, что в этой системе 2, 3, $4+\sqrt{10}$ и $4-\sqrt{10}$ — все „простые" числа.

Следовательно, то, что разложение (4.10) единственно, надо доказать строго. Несомненно, если $n = 1$, то имеется только одна

возможность, поскольку произведение (4.10) в этом случае должно быть пустым. Поэтому предположим, что $n > 1$ и что все меньшие числа разлагаются на множители единственным образом. Допустим, что имеются два разложения

$$n = p_1 \ldots p_m = q_1 \ldots q_k\,, \quad p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_m \quad \text{и} \quad q_1 \leqslant \cdots \leqslant q_k\,,$$

где все числа p_i и q_i простые. Покажем, что $p_1 = q_1$. Если это не так, то можно считать, что $p_1 < q_1$, тем самым число p_1 меньше всех чисел q. Так как p_1 и q_1 — простые числа, их НОД должен быть равен 1; следовательно, самоподтверждающий алгоритм Евклида дает целые числа a и b, такие, что $ap_1 + bq_1 = 1$. Тогда

$$ap_1q_2 \ldots q_k + bq_1q_2 \ldots q_k = q_2 \ldots q_k\,.$$

Итак, p_1 делит оба члена в левой части, поскольку $q_1q_2 \ldots q_k = n$; следовательно, p_1 делит и правую часть $q_2 \ldots q_k$. Тогда число $q_2 \ldots q_k/p_1$ целое, а $q_2 \ldots q_k$ — разложение на множители, в котором присутствует p_1. Однако $q_2 \ldots q_k < n$, так что оно допускает единственное разложение на множители (по индукции). Это противоречие показывает, что в конце концов p_1 должно быть равно q_1. Поэтому можно разделить оба разложения n на p_1, получая $p_2 \ldots p_m = q_2 \ldots q_k < n$. Подобно этому и другие сомножители должны быть равны (по индукции) — тем самым наше доказательство единственности разложения завершено.

Иногда удобнее сформулировать ОСНОВНУЮ ТЕОРЕМУ другим образом: *любое целое положительное число может быть записано единственным образом в виде*

Единственное — это разложение, но не теорема.

$$n = \prod_p p^{n_p}\,, \qquad \text{где каждое } n_p \geqslant 0. \qquad (4.11)$$

Правая часть представляет собой произведение по бесконечно многим простым числам, однако для любого отдельного n все показатели степени — за исключением нескольких — равны 0, так что соответствующие им сомножители равны 1. Следовательно, на самом деле — это конечное произведение, точно так же, как в действительности конечны многие „бесконечные“ суммы, ибо большая часть их слагаемых равна нулю.

Формула (4.11) однозначно представляет n, так что последовательность $\langle n_2, n_3, n_5, \ldots \rangle$ можно рассматривать как (*каноническую*) *систему представления* целых положительных чисел. Например, представление в виде показателей простых числа 12 имеет вид $\langle 2, 1, 0, 0, \ldots \rangle$, а представление в виде показателей простых числа 18 — $\langle 1, 2, 0, 0, \ldots \rangle$. При умножении двух чисел их представления просто складываются. Другими словами,

$$k = mn \qquad \iff \quad k_p = m_p + n_p \quad \text{при всех } p. \qquad (4.12)$$

Это означает, что

$$m \backslash n \qquad \iff \quad m_p \leqslant n_p \quad \text{при всех } p, \qquad (4.13)$$

откуда непосредственно следует, что

$$k = \text{нод}(m, n) \iff k_p = \min(m_p, n_p) \quad \text{при всех } p, \qquad (4.14)$$
$$k = \text{нок}(m, n) \iff k_p = \max(m_p, n_p) \quad \text{при всех } p. \qquad (4.15)$$

Например, поскольку $12 = 2^2 \cdot 3^1$ и $18 = 2^1 \cdot 3^2$, можно получить их нод и нок, взяв min и max соответствующих показателей:

$$\text{нод}(12, 18) = 2^{\min(2,1)} \cdot 3^{\min(1,2)} = 2^1 \cdot 3^1 = 6,$$
$$\text{нок}(12, 18) = 2^{\max(2,1)} \cdot 3^{\max(1,2)} = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Если некоторое простое число p делит произведение mn, то оно делит либо число m, либо число n, а возможно, и оба из них — в силу теоремы о единственности разложения на множители. Однако составные числа этим свойством не обладают. К примеру, не простое число 4 делит $60 = 6 \cdot 10$, но не делит ни 6, ни 10. Причина очевидна: в разложении $60 = 6 \cdot 10 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 5)$ два простых сомножителя числа $4 = 2 \cdot 2$ расщеплены на две части — следовательно, 4 не делит ни одну из частей. Но простое число нерасщепляемо, так что оно должно делить один из исходных сомножителей.

4.3 ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ

„Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν."
— Евклид [360]

[Перевод: „Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел."]

Сколько всего простых чисел? Много. На самом деле — бесконечно много. Это давным-давно доказал Евклид в своем предложении 20 книги IX, и вот как. Предположим, что имеется лишь конечное число простых, скажем, k чисел 2, 3, 5, ..., P_k. Тогда, говорил Евклид, следует рассмотреть число

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot P_k + 1.$$

Ни одно из k простых чисел не может делить M, ибо каждое из них делит $M - 1$. Таким образом, должно иметься некоторое другое простое число, которое делит M, а, возможно, само M — простое число. Это противоречит нашему предположению, что только 2, 3, ..., P_k суть простые числа, так что на самом деле их должно быть бесконечно много.

Евклидово доказательство наводит на мысль определить рекуррентно *числа Евклида*:

$$e_n = e_1 e_2 \ldots e_{n-1} + 1, \qquad \text{если } n \geqslant 1. \qquad (4.16)$$

Их последовательность начинается с чисел

$$e_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$e_2 = 2 + 1 = 3,$$
$$e_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$e_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43,$$

все из которых простые. Но уже следующее число, e_5, есть $1807 = 13 \cdot 139$. Оказывается, что $e_6 = 3263443$ — простое число, в то время как

$$e_7 = 547 \cdot 607 \cdot 1033 \cdot 31051\,,$$
$$e_8 = 29881 \cdot 67003 \cdot 9119521 \cdot 6212157481\,.$$

Известно, что $e_9, \ldots, e_{17}$ — составные числа, так же как, по всей видимости, и остальные e_n. Однако все числа Евклида являются попарно *взаимно простыми*, т. е.

$$\text{НОД}(e_m, e_n) = 1\,, \qquad \text{если } m \neq n.$$

Алгоритм Евклида (а как иначе?) подтверждает это за три коротких шага: поскольку $e_n \bmod e_m = 1$ при $n > m$, то

$$\text{НОД}(e_m, e_n) = \text{НОД}(1, e_m) = \text{НОД}(0, 1) = 1\,.$$

Следовательно, если положить q_j равным наименьшему множителю числа e_j при каждом $j \geqslant 1$, то все простые числа q_1, q_2, q_3, ... будут различны — они образуют бесконечную последовательность простых чисел.

Теперь ненадолго отвлечемся, чтобы рассмотреть числа Евклида с позиций гл. 1. Можно ли выразить числа e_n в замкнутой форме? Рекуррентность (4.16) можно упростить, избавившись от многоточия. Если $n > 1$, то

$$e_n = e_1 \ldots e_{n-2} e_{n-1} + 1 = (e_{n-1} - 1)e_{n-1} + 1 = e_{n-1}^2 - e_{n-1} + 1\,.$$

Таким образом, в e_n примерно вдвое больше десятичных цифр, чем в e_{n-1}. В упр. 37 доказывается, что существует постоянная $E \approx 1.264$, такая, что

$$e_n = \lfloor E^{2^n} + \tfrac{1}{2} \rfloor\,. \tag{4.17}$$

А в упр. 60 обосновывается подобная этой формула

$$p_n = \lfloor P^{3^n} \rfloor\,, \tag{4.18}$$

которая доставляет только лишь простые числа при некоторой постоянной P. Но на самом деле формулы типа (4.17) и (4.18) не могут рассматриваться как формулы в замкнутой форме, поскольку постоянные E и P вычисляются по тем же самым числам e_n и p_n — как бы заметая проблему под ковер. Не известно (и его существование маловероятно) какое-либо соотношение, которое связывало бы эти числа с другими математически важными постоянными.

И, действительно, никто не знает *никакой* полезной формулы, которая бы давала сколь угодно большие простые, но только простые числа. Тем не менее, проводя в 1984 г. испытания нового суперкомпьютера Cray X-MP, специалисты из геологической компании Chevron Geosciences все-таки наткнулись на математический клад. Используя программу, которую разработал Дэвид

Словински, они обнаружили наибольшее из известных на тот момент простых чисел,

$$2^{216091} - 1 .$$

На персональном компьютере данное число легко вычислить за несколько миллисекунд, поскольку современные компьютеры работают в двоичной системе, а это число — просто $(11\ldots1)_2$: все 216 091 его битов суть '1'. Но много труднее доказать, что оно простое. Практически любая операция с этим числом поглощает уйму времени из-за его слишком больших размеров. Так, даже изощренному алгоритму требуется несколько минут только для преобразований $2^{216091} - 1$ в десятичную форму на ПК. А для того чтобы переслать по почте распечатку этого числа, состоящего из 65050 десятичных цифр, вам потребуется 78 центов.

А, может быть, и больше к тому времени, когда вы это прочтете.

Между прочим, $2^{216091} - 1$ — это число перекладываний, необходимых для решения задачи о ханойской башне, когда имеется 216 091 дисков. Числа вида

$$2^p - 1$$

(где p — простое, как и везде в этой главе) называются *числами Мерсенна*, в честь преподобного Марена Мерсенна, который еще в семнадцатом веке занимался исследованием некоторых свойств подобных чисел [218]. Известные к настоящему времени простые числа Мерсенна получаются при p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839 859433, 1257787, 1398269 и 2976221.

„Что задача различать простые и составные числа, последние разлагать на простые множители, принадлежит к важнейшим и полезнейшим задачам во всей арифметике и что она занимала ум как древних, так и современных математиков, настолько известно, что было бы излишним тратить на это много слов."
— К. Ф. Гаусс, [296].*

Число $2^n - 1$ всегда не простое, если n — составное, поскольку $2^{km} - 1$ имеет одним из сомножителей $2^m - 1$:

$$2^{km} - 1 = (2^m - 1)(2^{m(k-1)} + 2^{m(k-2)} + \cdots + 1) .$$

Однако $2^p - 1$ не всегда простое число, если p — простое: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ — наименьшее из таких не простых чисел. (Мерсенн знал это.)

В наши дни разложение на множители и испытание на простоту больших чисел — темы оживленных исследований. Сводка того, что было известно об этом вплоть до 1981 г., содержится в разд. 4.5.4 книги [140], а тем временем становятся известными многие новые результаты. На сс. 431–435 (русского перевода) объясняется специальный метод проверки на простоту чисел Мерсенна.

На протяжении последних пяти столетий наибольшим известным простым числом оказывается, по большей части, простое число Мерсенна, хотя известно всего лишь несколько десятков простых чисел Мерсенна. Многим не дают покоя бо́льшие числа, но они поддаются исследованию с трудом. Поэтому тем, кто рассчитывает на действительно заслуженную известность (а не просто на везение) и место в *Книге мировых рекордов Гиннесса*, вместо

этого можно было бы попытать счастья с числами вида $2^n k + 1$ при малых k, скажем, 3 или 5. Эти числа могут быть проверены на простоту почти столь же быстро, сколь и числа Мерсенна (подробности см. в упр. 4.5.4–27 книги [140]).

Но мы еще не полностью ответили на наш первоначальный вопрос относительно того, СКОЛЬКО ИМЕЕТСЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. Их бесконечно много, но дело в том, что одни бесконечные множества „гуще“, нежели другие. Так, среди целых положительных чисел бесконечно много четных чисел и бесконечно много полных квадратов, хотя с некоторых не лишенных смысла точек зрения четных чисел больше, чем полных квадратов. Одна из таких точек зрения — сравнить n-ю величину: n-е целое четное — это $2n$, а n-й полный квадрат — это n^2; так как $2n$ гораздо меньше n^2 при большом n, то n-е целое четное встречается значительно раньше, чем n-й полный квадрат, так что можно считать, что целых четных чисел много больше, чем полных квадратов. Сходная точка зрения — сравнить число величин, не превосходящих x: имеется $\lfloor x/2 \rfloor$ таких целых четных чисел и $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ таких полных квадратов; а поскольку $x/2$ гораздо больше $\sqrt{x}$ при большом x, то снова можно считать, что целых четных чисел много больше.

Странно... Я-то думал, что целых четных чисел столько же, сколько и полных квадратов, поскольку между ними существует взаимно однозначное соответствие.

Но что же можно сказать о простых числах с этих двух точек зрения? Оказывается, что n-е простое число P_n приблизительно в n раз больше натурального логарифма n:

$$P_n \sim n \ln n \,.$$

(Знак '$\sim$' может быть прочитан как „асимптотически равно“ — это значит, что предел отношения $P_n / n \ln n$ равен 1, когда n стремится к бесконечности.) Подобно этому, для числа $\pi(x)$ — простых чисел, не превосходящих x, мы располагаем фактом, который известен как „теорема о распределении простых чисел“:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \,.$$

Доказательство этих двух фактов выходит за рамки нашей книги, хотя легко показать, что один из них влечет за собой другой. В гл. 9 мы обсудим скорости, с которыми возрастают функции, и увидим, что функция $n \ln n$ — наше приближение числа P_n — лежит между функциями $2n$ и n^2 при большом n. Следовательно, простых чисел меньше, чем целых четных, но больше, чем полных квадратов.

Эти формулы, справедливые только в пределе при n или $x \to \infty$, могут быть заменены более точными оценками. Так, Россером и Шенфельдом [263] установлены следующие удачные границы:

$$\ln x - \tfrac{3}{2} < \tfrac{x}{\pi(x)} < \ln x - \tfrac{1}{2} \,, \qquad x \geqslant 67, \quad (4.19)$$

$$n\bigl(\ln n + \ln\ln n - \tfrac{3}{2}\bigr) < P_n < n\bigl(\ln n + \ln\ln n - \tfrac{1}{2}\bigr) \,, \; n \geqslant 20. \quad (4.20)$$

Если выбрать „случайное“ целое число n, то его шансы оказаться простым составляют примерно один к $\ln n$. Так, если выбирать числа вблизи 10^{16}, то мы должны проверить примерно $16 \ln 10 \approx 36.8$ из них, прежде чем найдем простое число. (Оказывается, что между $10^{16} - 370$ и $10^{16} - 1$ имеется ровно 10 простых чисел.) Тем не менее в распределении простых чисел имеется много нерегулярностей. Так, числа между $P_1 P_2 \ldots P_n + 2$ и $P_1 P_2 \ldots P_n + P_{n+1} - 1$ включительно — абсолютно все составные. Известно много примеров „парных простых чисел“ p и $p + 2$ (5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, ..., 9999999999999641 и 9999999999999643, ...), однако никто не знает, бесконечно много или нет пар таких простых чисел. (См. Харди и Райт [335, §1.4 и §2.8].)

Один из простых способов подсчитать все $\pi(x)$ простых чисел $\leqslant x$ — просеять их через так называемое „решето Эратосфена“. Сначала выписываются все целые числа от 2 до x. Затем обводится число 2, т. е. оно выделяется в качестве простого, и вычеркиваются все другие числа, кратные 2. Затем последовательно обводятся наименьшие из необведенных и невычеркнутых чисел и вычеркиваются все кратные им. Когда все окажется обведенным или вычеркнутым, обведенные числа — суть простые. Если, например, $x = 10$, то выписываются числа от 2 до 10, обводится число 2 и вычеркиваются кратные ему числа 4, 6, 8 и 10. Затем наименьшим необведенным, невычеркнутым числом оказывается число 3, поэтому оно обводится и вычеркиваются числа 6 и 9. Теперь наименьшим является число 5, так что оно обводится и вычеркивается число 10. В заключение обводится число 7. Обведенные числа суть 2, 3, 5, 7 — вот вам $\pi(10) = 4$ простых числа, не превосходящих 10.

4.4 ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ФАКТЫ

„Je me sers de la notation très simple $n!$ pour désigner le produit de nombres décroissans depuis n jusqu'à l'unité, savoir $n(n-1)(n-2)\ldots .3.2.1.$ L'emploi continuel de l'analyse combinatoire que je fais dans la plupart de mes démonstrations, a rendu cette notation indispensable.“
— К. Крамп [167]

Давайте теперь посмотрим, как выглядит разложение на простые множители самых составных чисел — факториалов:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \tag{4.21}$$

В соответствии с нашим соглашением относительно пустого произведения эта формула определяет $0!$ как 1. Таким образом, $n! = (n-1)!\,n$ для каждого целого положительного числа n. Это число перестановок n различных объектов, т. е. число способов размещения n предметов в некотором ряду: для размещения первого предмета имеется n вариантов; для каждого из этих n вариантов имеется $n - 1$ вариантов размещения второго предмета; для каждого из этих $n(n-1)$ вариантов имеется $n - 2$ вариантов размещения третьего предмета и т. д., что дает $n(n-1)(n-2)\ldots(1)$ вариантов размещения в целом. Вот несколько первых значений

факториальной функции:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Полезно знать несколько факториальных фактов: например, точные значения первых шести факториалов, приблизительное значение 10! равное $3\frac{1}{2}$ миллиона с мелочью. Еще один полезный факт заключается в том, что количество цифр в записи $n!$ превышает n, когда $n \geqslant 25$.

Можно доказать, что величина $n!$ очень велика, используя нечто вроде уловки Гаусса из гл. 1:

$$n!^2 = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)(n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\,.$$

Имеем $n \leqslant k(n+1-k) \leqslant \frac{1}{4}(n+1)^2$, поскольку квадратный многочлен $k(n+1-k) = \frac{1}{4}(n+1)^2 - \bigl(k - \frac{1}{2}(n+1)\bigr)^2$ принимает наименьшее значение при $k = 1$ и наибольшее значение — при $k = \frac{1}{2}(n+1)$. Поэтому

$$\prod_{k=1}^{n} n \leqslant n!^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^2}{4}\,,$$

т. е.

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \frac{(n+1)^n}{2^n}\,. \qquad (4.22)$$

Это соотношение указывает на то, что факториальная функция возрастает экспоненциально!!

Для более точного приближения $n!$ при большом n можно воспользоваться формулой Стирлинга, которую нам еще предстоит вывести в гл. 9:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\,. \qquad (4.23)$$

А еще более точное приближение доставляет его асимптотическую относительную погрешность: формула Стирлинга „не дотягивает" до величины $n!$ на множитель, примерно равный $1/(12n)$. Даже при весьма малом n подобное более точное приближение вполне достаточно. К примеру, приближение Стирлинга (4.23) при $n = 10$ дает значение, близкое к 3598696, при этом погрешность — около $0.83\% \approx 1/120$ — крайне мала. Хорошая вещь — асимптотика.

Но вернемся к простым числам. Хотелось бы для любого заданного простого числа установить наивысшую степень p, которая делит $n!$ — т. е. показатель числа p, с которым оно входит в однозначное разложение $n!$ на простые множители. Обозначим эту величину через $\epsilon_p(n!)$ и начнем наше исследование с частного случая $p = 2$ и $n = 10$. Поскольку $10!$ — произведение десяти

чисел, то величину $\epsilon_2(10!)$ можно найти, сложив вхождения степеней числа 2 в эти десять чисел; подобное вычисление соответствует суммированию столбцов в следующей таблице:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	степени 2
делится на 2		x		x		x		x		x	$5 = \lfloor 10/2 \rfloor$
делится на 4				x				x			$2 = \lfloor 10/4 \rfloor$
делится на 8								x			$1 = \lfloor 10/8 \rfloor$
степени 2	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	8

(Суммарные значения столбцов образуют то, что иногда называют *линеечной функцией* $\rho(k)$ в силу ее сходства с линейкой ‘┌┬┬┬┬┬┬┬┬┬┬┬┬┬┬┐’, деления которой отмечают доли дюйма.) Сумма этих чисел равна 8; следовательно, 2^8 делит $10!$, а 2^9 — нет.

Есть и другой способ: можно подсчитать вклады по строкам. В первой строке отмечены числа, которые вносят степень 2 (и, следовательно, делятся на 2): их $\lfloor 10/2 \rfloor = 5$. Во второй строке отмечены те числа, которые вносят дополнительную степень 2: их $\lfloor 10/4 \rfloor = 2$. И, наконец, в третьей строке отмечены числа, которые вносят еще кое-что: их $\lfloor 10/8 \rfloor = 1$. Тем самым подсчитываются все вклады, так что $\epsilon_2(10!) = 5 + 2 + 1 = 8$.

Для произвольного n данный метод дает

$$\epsilon_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \cdots = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor .$$

В действительности эта сумма конечна, так как при $2^k > n$ общий член суммы обращается в нуль. Следовательно, она содержит только $\lfloor \lg n \rfloor$ ненулевых членов и довольно просто вычисляется. Так, если $n = 100$, то

$$\epsilon_2(100!) = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 .$$

Каждый член в этой сумме — всего лишь пол от половины предыдущего члена. Это справедливо для любого n, поскольку, как частный случай выражения (3.11), получаем $\lfloor n/2^{k+1} \rfloor = \lfloor \lfloor n/2^k \rfloor /2 \rfloor$. Если записать эти числа в двоичной форме, то суть дела становится предельно ясной:

$$\begin{aligned}
100 &= (1100100)_2 = 100 \\
\lfloor 100/2 \rfloor &= (110010)_2 = 50 \\
\lfloor 100/4 \rfloor &= (11001)_2 = 25 \\
\lfloor 100/8 \rfloor &= (1100)_2 = 12 \\
\lfloor 100/16 \rfloor &= (110)_2 = 6 \\
\lfloor 100/32 \rfloor &= (11)_2 = 3 \\
\lfloor 100/64 \rfloor &= (1)_2 = 1
\end{aligned}$$

Для получения последующего члена мы просто отбрасываем наименее значимый бит предыдущего.

Помимо этого, двоичное представление показывает, как вывести другую формулу:

$$\epsilon_2(n!) = n - \nu_2(n)\,, \tag{4.24}$$

где $\nu_2(n)$ — число единиц в двоичном представлении n. Подобное упрощение возможно потому, что каждая 1, которая обеспечивает вклад 2^m в величину n, обеспечивает вклад $2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^0 = 2^m - 1$ в величину $\epsilon_2(n!)$.

Обобщая наши находки на произвольное простое число p и используя прежнее рассуждение, получаем, что

$$\epsilon_p(n!) = \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor + \cdots = \sum_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor. \tag{4.25}$$

А какова примерно величина $\epsilon_p(n!)$? Можно получить простую (но хорошую) верхнюю оценку, просто удаляя пол в общем члене суммы, а затем суммируя бесконечную геометрическую прогрессию:

$$\begin{aligned}\epsilon_p(n!) &< \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \cdots \\ &= \frac{n}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = \frac{n}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right) = \frac{n}{p-1}\,.\end{aligned}$$

При $p = 2$ и $n = 100$ это неравенство свидетельствует, что $97 < 100$. Таким образом, 100 — как оценка сверху — не только правильна, но и близка к действительному значению 97. И в самом деле, в общем случае действительная величина $n - \nu_2(n) \sim n$, потому что $\nu_2(n) \leqslant \lceil \lg n \rceil$ асимптотически много меньше n.

Если $p = 2$ и 3, то наши формулы дают $\epsilon_2(n!) \sim n$ и $\epsilon_3(n!) \sim n/2$, поэтому весьма правдоподобно, что изредка величина $\epsilon_3(n!)$ должна быть ровно в два раза меньше величины $\epsilon_2(n!)$. Так случается, например, когда $n = 6$ и $n = 7$, поскольку $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 7!/7$. Но еще никем не доказано, что подобные совпадения случаются бесконечно часто.

Оценка для величины $\epsilon_p(n!)$, в свою очередь, приводит к оценке для величины $p^{\epsilon_p(n!)}$, которая равна вкладам p в $n!$:

$$p^{\epsilon_p(n!)} < p^{n/(p-1)}\,.$$

Эту формулу можно упростить (рискуя сильно ослабить верхнюю границу), заметив, что $p \leqslant 2^{p-1}$; следовательно, $p^{n/(p-1)} \leqslant (2^{p-1})^{n/(p-1)} = 2^n$. Другими словами, вклад, который любое простое число вносит в $n!$, меньше 2^n.

Используя это наблюдение, можно дать другое доказательство того, что ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ БЕСКОНЕЧНО МНОГО. Действительно, если бы было только k простых чисел 2, 3, ..., P_k, то мы бы имели, что $n! < (2^n)^k = 2^{nk}$ при любом $n > 1$, поскольку каждое простое число может внести в разложение $n!$ множитель, равный,

самое большее, $2^n - 1$. Но неравенство $n! < 2^{nk}$ можно легко опровергнуть, выбрав достаточно большое n, скажем, $n = 2^{2k}$. Тогда

$$n! < 2^{nk} = 2^{2^{2k}k} = n^{n/2},$$

что противоречит неравенству $n! \geqslant n^{n/2}$, которое было установлено в (4.22). Так что простых чисел все же бесконечно много.

Можно еще помусолить это рассуждение, с тем чтобы получить грубую оценку для $\pi(n)$ — количества простых чисел, не превосходящих n. Каждое такое простое число вносит в разложение $n!$ множитель, меньший чем 2^n; поэтому, как и прежде,

$$n! < 2^{n\pi(n)}.$$

Если здесь заменить величину $n!$ приближением Стирлинга (4.23), которое служит ее нижней оценкой, и взять логарифмы, то получим

$$n\pi(n) > n\lg(n/e) + \tfrac{1}{2}\lg(2\pi n),$$

откуда

$$\pi(n) > \lg(n/e).$$

Подобная нижняя оценка совсем слабая по сравнению с фактической величиной $\pi(n) \sim n/\ln n$, ибо $\log n$ много меньше $n/\log n$ при большом n. Но зато мы не потратили много сил на ее вывод — оценка есть оценка.

4.5 ВЗАИМНАЯ ПРОСТОТА

Если $\text{НОД}(m, n) = 1$, то целые числа m и n не имеют одинаковых простых сомножителей; в таком случае говорят, что они *взаимно простые.*

Подобно тому, как перпендикулярные прямые не имеют общего направления, так и перпендикулярные числа не имеют общих сомножителей.

Это понятие настолько важно на практике, что следовало бы обзавестись для него специальным обозначением. Но, увы, теоретико-числовики еще не пришли к устраивающему всех соглашению, а потому мы взываем: ВНЕМЛИТЕ НАМ, О МАТЕМАТИКИ ВСЕГО СВЕТА! БОЛЬШЕ МЕДЛИТЬ НЕЛЬЗЯ! МНОГИЕ ФОРМУЛЫ МОЖНО СДЕЛАТЬ ЯСНЕЕ УЖЕ СЕЙЧАС, ДОГОВОРИВШИСЬ О НОВОМ ОБОЗНАЧЕНИИ! СОГЛАСИМСЯ ЖЕ ПИСАТЬ '$m \perp n$' И ГОВОРИТЬ, ЧТО „m ПРОСТО С n", ЕСЛИ m И n ВЗАИМНО ПРОСТЫ. Другими словами, давайте объявим, что

$$m \perp n \quad \Longleftrightarrow \quad m, n \text{ — целые и } \text{НОД}(m, n) = 1. \tag{4.26}$$

Дробь m/n несократима тогда и только тогда, когда $m \perp n$. Поскольку мы сводим дроби к несократимым, сокращая на самый большой общий множитель числитель и знаменатель, то можно предположить, что в общем случае

$$m/\text{НОД}(m, n) \;\perp\; n/\text{НОД}(m, n); \tag{4.27}$$

и это действительно так. Данное обстоятельство вытекает из более общего правила: $\text{НОД}(km, kn) = k\,\text{НОД}(m, n)$, доказанного в упр. 14.

Определение отношения $\perp$ упрощается, если воспользоваться представлением чисел в виде показателей простых. В силу правила (4.14) для НОД имеем:

$$m \perp n \iff \min(m_p, n_p) = 0 \quad \text{при всех } p. \tag{4.28}$$

Более того, поскольку m_p и n_p неотрицательны, это можно переписать в виде

$$m \perp n \iff m_p n_p = 0 \quad \text{при всех } p. \tag{4.29}$$

Подобно ортогональным векторам, скалярное произведение которых равно нулю.

А теперь можно установить важное правило, с помощью которого можно разъединять и объединять два отношения $\perp$ с одинаковой левой частью:

$$k \perp m \ \text{и}\ k \perp n \iff k \perp mn. \tag{4.30}$$

Ввиду соотношения (4.29) это правило представляет собой другой вариант следующего утверждения: $k_p m_p = 0$ и $k_p n_p = 0$ тогда и только тогда, когда $k_p(m_p + n_p) = 0$ при неотрицательных m_p и n_p.

Существует замечательный способ построения множества всех неотрицательных дробей m/n с $m \perp n$, носящий название *дерева Штерна—Броко*, поскольку он был открыт независимо друг от друга немецким математиком Морицем Штерном [357] и французским часовщиком Ахиллом Броко [41]. Суть этого способа в том, чтобы начать с двух дробей $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$, а затем повторить необходимое количество раз следующую операцию:

Интересно, отчего математики говорят „открыт“, тогда как абсолютно все остальные сказали бы „придуман“.

[По этому поводу см. интервью с Рональдом Грэхемом в 4-м номере журнала „Квант“ за 1988 г. — Перев.]

$$\text{вставить } \frac{m+m'}{n+n'} \text{ между двумя соседними дробями } \frac{m}{n} \text{ и } \frac{m'}{n'}.$$

Новая дробь $(m+m')/(n+n')$ называется *медиантой* дробей m/n и m'/n'. К примеру, первый шаг дает одну новую вставку между $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0};$$

следующий шаг добавляет две:

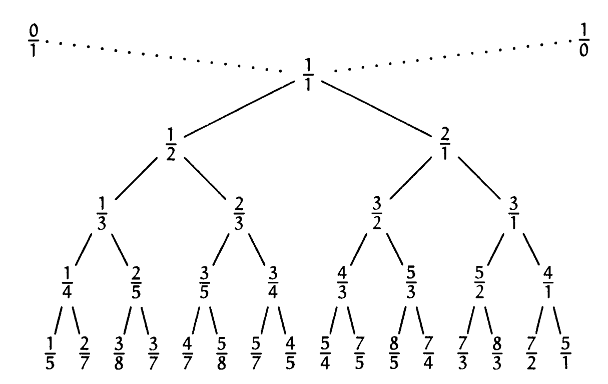
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}.$$

Последующий шаг добавляет четыре:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0};$$

Я полагаю, 1/0 — это бесконечность „в несократимом виде“.

затем добавляется 8, 16 и т. д. новых вставок. Всю совокупность вставок можно представить в виде бесконечного бинарного дерева, верхние уровни которого выглядят так:



Каждая дробь имеет вид $\frac{m+m'}{n+n'}$, где $\frac{m}{n}$ — ближайший предок сверху слева, а $\frac{m'}{n'}$ — сверху справа. („Предком“ является дробь, которая достижима, если следовать по ветвям вверх.) Подобное дерево радует глаз обильным урожаем закономерностей.

Пора бы заняться консервированием.

Но почему это дерево плодоносно? Почему, например, каждая медианта $(m+m')/(n+n')$ оказывается несократимой, когда созревает на этом дереве? (Если бы все числа m, m', n и n' были нечетны, то мы получали бы дроби вида четное/четное — тем не менее наше построение гарантирует, что дроби с нечетными числителями и знаменателями никогда не появляются рядом.) И почему все возможные дроби m/n встречаются только однажды? Почему какая-нибудь дробь не может встретиться дважды или не встретиться вообще?

Все эти вопросы имеют на удивление простые ответы, в основе которых лежит следующий элементарный факт: *если m/n и m'/n' — последовательные дроби на любом шаге их построения, то*

$$m'n - mn' = 1. \qquad (4.31)$$

Это соотношение справедливо первоначально $(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1)$, а когда мы вставляем новую медианту $(m+m')/(n+n')$, то надо проверить новые соотношения:

$$(m+m')n - m(n+n') = 1;$$
$$m'(n+n') - (m+m')n' = 1.$$

Оба этих уравнения эквивалентны исходному условию (4.31), которое они заменяют. Поэтому условие (4.31) инвариантно на всех шагах построения.

Кроме того, если $m/n < m'/n'$ и если все эти величины неотрицательны, то легко убедиться в том, что

$$m/n < (m+m')/(n+n') < m'/n'.$$

Медианта не лежит точно посередине между своими предшественниками, но она лежит где-то между ними. Следовательно, наше построение сохраняет порядок и получение одной и той же дроби в двух разных местах невозможно.

Все это так, но если у вас застряла дробь в разных местах, то лучше показаться врачу.

Остается еще один вопрос: может ли какая-нибудь положительная дробь a/b с $a \perp b$ оказаться пропущенной? Ответ отрицательный, ибо наше построение можно ограничить непосредственной окрестностью дроби a/b, в которой ее поведение легко поддается анализу. Вначале положим

$$\frac{m}{n} = \frac{0}{1} < \left(\frac{a}{b}\right) < \frac{1}{0} = \frac{m'}{n'},$$

где скобки у дроби $\frac{a}{b}$ указывают на то, что на самом деле ее здесь нет. Затем, если на некотором шаге

$$\frac{m}{n} < \left(\frac{a}{b}\right) < \frac{m'}{n'},$$

то наше построение образует дробь $(m + m')/(n + n')$ и здесь возможны три варианта. Либо $(m + m')/(n + n') = a/b$ и мы удовлетворены; либо $(m+m')/(n+n') < a/b$ и можно положить $m \leftarrow m+m'$, $n \leftarrow n+n'$; либо $(m+m')/(n+n') > a/b$ и можно положить $m' \leftarrow m + m'$, $n' \leftarrow n + n'$. Этот процесс не может продолжаться неограниченно, поскольку условия

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{m'}{n'} - \frac{a}{b} > 0$$

означают, что

$$an - bm \geqslant 1 \qquad \text{и} \qquad bm' - an' \geqslant 1;$$

следовательно,

$$(m'+n')(an-bm) + (m+n)(bm'-an') \geqslant m'+n'+m+n,$$

а это то же самое, что и $a+b \geqslant m'+n'+m+n$, согласно (4.31). С каждым шагом либо m, либо n, либо m', либо n' возрастают, так что мы должны быть удовлетворены после самое большее $a + b$ шагов.

Последовательностью Фарея порядка N, обозначаемой через $\mathcal{F}_N$, является множество всех несократимых дробей между 0 и 1, знаменатели которых не превосходят N и которые расположены в возрастающем порядке. Так, если $N = 6$, то

$$\mathcal{F}_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

В общем случае последовательность $\mathcal{F}_N$ можно получить, начав с $\mathcal{F}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ и затем вставляя медианты всякий раз, когда это можно сделать, с тем чтобы не получить превышающий N знаменатель. При этом ни одна дробь не будет пропущена, поскольку известно, что построение Штерна—Броко не пропускает ни одну из них, и поскольку медианта со знаменателем $\leqslant N$ никогда не образуется из дроби, знаменатель которой $> N$. (Другими словами, $\mathcal{F}_N$ выделяет в дереве Штерна—Броко некоторое *поддерево*,

получаемое путем обрезки ненужных ветвей.) Отсюда следует, что $m'n - mn' = 1$ всякий раз, когда m/n и m'/n' являются последовательными дробями в последовательности Фарея.

Подобный метод построения показывает, что последовательность $\mathcal{F}_N$ легко получается из последовательности $\mathcal{F}_{N-1}$: мы просто вставляем дробь $(m+m')/N$ между последовательными дробями m/n и m'/n' в $\mathcal{F}_{N-1}$, сумма знаменателей которых $= N$. Так, последовательность $\mathcal{F}_7$ легко получить из элементов последовательности $\mathcal{F}_6$, вставляя в нее дроби $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$ в соответствии с указанным правилом:

$$\mathcal{F}_7 = \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}.$$

Если N — простое число, то появится $N-1$ новых дробей; в противном случае их появится меньше $N-1$, так как подобный процесс порождает лишь дроби, имеющие взаимно простые с N числители.

Еще в (4.5) было доказано — правда, в других терминах,— что если $m \perp n$ и $0 < m \leqslant n$, то можно найти целые числа a и b, такие, что

$$ma - nb = 1. \tag{4.32}$$

(На самом деле утверждалось, что $m'm + n'n = \text{НОД}(m, n)$, но вместо $\text{НОД}(m, n)$ можно подставить 1, вместо m' подставить a, а вместо $-n'$ подставить b. Последовательность Фарея обеспечивает нас другим доказательством равенства (4.32), так как можно положить дробь b/a равной дроби, которая предшествует дроби m/n в последовательности $\mathcal{F}_n$. Таким образом, (4.5) снова есть просто (4.31). К примеру, одним из решений уравнения $3a-7b = 1$ является $a = 5$, $b = 2$, поскольку дробь $\frac{2}{5}$ предшествует дроби $\frac{3}{7}$ в $\mathcal{F}_7$. Из этого следует, что всегда можно найти решение уравнения (4.32) с $0 \leqslant b < a < n$, если $0 < m \leqslant n$. Аналогично, если $0 \leqslant n < m$ и $m \perp n$, то уравнение (4.32) с $0 < a \leqslant b \leqslant m$ можно решить, полагая a/b равной дроби, *следующей за дробью* n/m в $\mathcal{F}_m$.

Последовательные тройки дробей последовательности Фарея обладают удивительным свойством, которое доказано в упр. 61. Но лучше прекратить дальнейшее обсуждение последовательностей Фарея, ибо в целом дерево Штерна—Броко оказывается гораздо более интересным.

Хватит Фарея.

И в самом деле, дерево Штерна—Броко можно рассматривать как *систему счисления* для представления рациональных чисел, поскольку каждая положительная несократимая дробь встречается в нем лишь один раз. Воспользуемся символами L и R для идентификации левой и правой ветви при продвижении вниз по дереву от корня к некоторой определенной дроби; тогда строка символов L и R будет однозначно идентифицировать местонахождение дроби в этом дереве. Так, LRRL означает продвижение вниз влево от $\frac{1}{1}$ к $\frac{1}{2}$, затем вправо к $\frac{2}{3}$, еще раз вправо к $\frac{3}{4}$, и, наконец, влево к $\frac{5}{7}$: строку LRRL можно рассматривать как

представление дроби $\frac{5}{7}$. При таком подходе каждая положительная дробь получает единственное представление в виде строки символов L и R.

Однако имеется небольшое затруднение: дробь $\frac{1}{1}$ соответствует *пустой* строке и необходимо подыскать ей какое-нибудь обозначение. Давайте условимся обозначать ее через I, поскольку этот символ напоминает цифру 1 и с него начинается слово „identity“ (единица — *Перев.*).

Такого рода представление вызывает два естественных вопроса. (1) Если заданы целые положительные числа m и n с $m \perp n$, то какая строка символов L и R соответствует дроби m/n? (2) Если задана некоторая строка символов L и R, то какая дробь ей соответствует? Вопрос 2 выглядит попроще, поэтому займемся им в первую очередь. Пусть

$$f(S) = \text{дробь, соответствующая } S,$$

где S — некоторая строка символов L и R. Так, $f(LRRL) = \frac{5}{7}$.

В соответствии с нашим построением $f(S) = (m+m')/(n+n')$, если m/n и m'/n' являются ближайшими к S (предшествующими и последующими) дробями на верхних уровнях нашего дерева. Первоначально $m/n = 0/1$ и $m'/n' = 1/0$; затем либо m/n, либо m'/n' последовательно заменяются медиантой $(m+m')/(n+n')$ по мере продвижения по дереву соответственно вправо или влево.

Но как облечь это действо в подходящие математические одежды? Некоторый опыт подсказывает, что наилучший способ — скроить 2×2-матрицу

$$M(S) = \begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix},$$

которая содержит все четыре величины, входящие в дроби — предки m/n и m'/n', охватывающие $f(S)$. Подобно записи дробей, можно было бы расположить величины m наверху, а величины n — внизу, однако перевернутое вверх дном расположение оказывается более подходящим, поскольку в начале $M(I) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, а матрица $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ традиционно называется единичной матрицей.

Шаг влево заменяет n' на $n+n'$, а m' — на $m+m'$; следовательно,

$$\begin{aligned} M(SL) &= \begin{pmatrix} n & n+n' \\ m & m+m' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(S) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Это частный случай общего правила

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix}$$

Если вы не имеете понятия о матрицах — не впадайте в панику: в этой книге они используются только здесь.

умножения 2×2-матриц.) Точно так же оказывается, что

$$M(SR) = \begin{pmatrix} n+n' & n' \\ m+m' & m' \end{pmatrix} = M(S)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому если определить L и R как 2×2-матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

то индукцией по длине S мы получим простую формулу $M(S) = S$. Разве не здорово? (Буквы L и R исполняют две роли: роль матриц и роль символов в строковом представлении.) К примеру,

$$M(LRRL) = LRRL = \begin{pmatrix} 1&1\\0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0\\1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0\\1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1\\0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&1\\1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1\\1&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3&4\\2&3 \end{pmatrix};$$

так что дроби-предки, которые охватывают дробь $LRRL = \frac{5}{7}$, равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Это построение дает ответ на вопрос 2:

$$f(S) = f\left(\begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix}\right) = \frac{m+m'}{n+n'}. \tag{4.34}$$

А как насчет вопроса 1? Теперь, когда мы выяснили элементарную связь между узлами дерева и матрицами 2×2, ответить на него уже просто. При заданной паре целых положительных чисел m и n с $m \perp n$, местоположение дроби m/n в дереве Штерна—Броко можно установить „двоичным поиском“:

$S := I$;
пока $m/n \ne f(S)$ **выполнять**
  если $m/n < f(S)$ **то** (вывод(L); $S := SL$)
    иначе (вывод(R); $S := SR$).

Результатом работы (посылаемым на вывод) является требуемая строка символов L и R.

То же самое можно выполнить и другим способом, изменяя величины m и n без использования переменной S. Если S — некоторая 2×2-матрица, то

$$f(RS) = f(S) + 1,$$

поскольку матрица RS схожа с матрицей S с тем лишь отличием, что в матрице RS верхняя строка матрицы S прибавлена к нижней. (Распишем это подробнее:

$$S = \begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix}; \qquad RS = \begin{pmatrix} n & n' \\ m+n & m'+n' \end{pmatrix};$$

следовательно, $f(S) = (m+m')/(n+n')$ и $f(RS) = \big((m+n) + (m'+n')\big)/(n+n')$.) Если алгоритм двоичного поиска выполняется применительно к некоторой дроби m/n с $m > n$, то первым

выводом алгоритма будет R; следовательно, при дальнейшем выполнении алгоритма $f(S)$ будет ровно на 1 больше, чем если бы мы начинали с $(m-n)/n$, а не с m/n. Аналогичное обстоятельство имеет место и для L, так что получаем

$$\frac{m}{n} = f(RS) \iff \frac{m-n}{n} = f(S) \qquad \text{при } m > n,$$
$$\frac{m}{n} = f(LS) \iff \frac{m}{n-m} = f(S) \qquad \text{при } m < n.$$

Это значит, что алгоритм двоичного поиска можно преобразовать в следующую безматричную процедуру:

пока $m \neq n$ **выполнять**
  если $m < n$ **то** (вывод(L); $n := n - m$)
  иначе (вывод(R); $m := m - n$) .

Так, если $m/n = 5/7$, то с использованием этого упрощенного алгоритма последовательно получаем:

$m =$	5	5	3	1	1
$n =$	7	2	2	2	1
вывод	L	R	R	L	

В дереве Штерна—Броко отсутствуют иррациональные числа, но зато присутствуют все „близкие“ к ним рациональные числа. Так, если попытаться использовать алгоритм двоичного поиска с числом $e = 2.71828\ldots$ вместо дроби m/n, то получим бесконечную строку символов L и R:

$$RRLRRLRLLLLRLRRRRRLRLLLLLLLRLR\ldots.$$

Эту бесконечную строку можно рассматривать как представление числа e в системе счисления Штерна—Броко, точно так же, как число e можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $2.718281828459\ldots$ или в виде бесконечной двоичной дроби $(10.101101111110\ldots)_2$. Между тем оказывается, что представление числа e в системе Штерна—Броко обнаруживает устойчивую закономерность:

Это замечательное бинарное представление Герман Минковский продемонстрировал на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге в 1904 г.

$$e = RL^0RLR^2LRL^4RLR^6LRL^8RLR^{10}LRL^{12}RL\ldots,$$

что эквивалентно частному случаю одного открытия, сделанного Эйлером [369] в возрасте 24 лет.

Исходя из этого представления, можно установить, что дроби

$$\overset{R}{\frac{1}{1}},\ \overset{R}{\frac{2}{1}},\ \overset{L}{\frac{3}{1}},\ \overset{R}{\frac{5}{2}},\ \overset{R}{\frac{8}{3}},\ \overset{L}{\frac{11}{4}},\ \overset{R}{\frac{19}{7}},\ \overset{L}{\frac{30}{11}},\ \overset{L}{\frac{49}{18}},\ \overset{L}{\frac{68}{25}},\ \overset{L}{\frac{87}{32}},\ \overset{R}{\frac{106}{39}},\ \overset{L}{\frac{193}{71}},\ \overset{R}{\frac{299}{110}},\ \overset{R}{\frac{492}{181}},\ \overset{R}{\frac{685}{252}},\ \overset{R}{\frac{878}{323}},\ \overset{R}{\frac{1071}{394}},\ \overset{R}{\frac{1264}{465}},\ \ldots$$

служат простейшими рациональными приближениями к числу e сверху и снизу. Действительно, если дробь m/n отсутствует в этом списке, то между m/n и e присутствует некоторая дробь

из этого списка с числителем $\leqslant m$ и знаменателем $\leqslant n$. К примеру, дробь $\frac{27}{10}$ не служит столь же простым приближением, как дробь $\frac{19}{7} = 2.714\ldots$, которая присутствует в списке и которая ближе к числу e. Мы можем убедиться в этом на основании того, что дерево Штерна—Броко не просто включает все рациональные числа — оно включает их в упорядоченном виде, а также на основании того, что все дроби с малыми числителем и знаменателем располагаются выше всех менее простых дробей. Так, дробь $\frac{27}{10} = \mathrm{RRLRRLL}$ меньше дроби $\frac{19}{7} = \mathrm{RRLRRL}$, которая, в свою очередь, меньше числа $e = \mathrm{RRLRRLR}\ldots$. Этот способ позволяет находить прекрасные приближения. К примеру, дробь $\frac{878}{323} \approx 2.718266 \approx .999994e$; эта дробь получается из первых 16 символов представления числа e в системе Штерна—Броко, а точность примерно такая же, как в случае 16-битового двоичного представления этого числа.

Бесконечное представление некоторого иррационального числа α можно получить путем простой модификации безматричной процедуры двоичного поиска:

$$\textbf{если } \alpha < 1 \textbf{ то } \quad (\text{вывод}(\mathrm{L});\ \ \alpha := \alpha/(1-\alpha))$$
$$\textbf{иначе } (\text{вывод}(\mathrm{R});\ \ \alpha := \alpha - 1)\,.$$

(Эти шаги должны быть повторены бесконечное число раз, пока не надоест.) Если число α — рациональное, то бесконечное представление, полученное этим способом, аналогично прежнему, но к (конечному) представлению α справа присоединяются символы RL^∞. К примеру, если $\alpha = 1$, то получаем $\mathrm{RLLL}\ldots$, что соответствует бесконечной последовательности дробей $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, …, стремящейся в пределе к 1. Такое положение дел в точности соответствует обычному двоичному представлению, если рассматривать L как 0 и R как 1: точно так же, как каждое вещественное число x из $[0, 1)$ имеет бесконечное двоичное представление $(.b_1b_2b_3\ldots)_2$, не оканчивающееся одними цифрами 1, так и каждое вещественное число из $[0, \infty)$ имеет бесконечное представление Штерна—Броко $B_1B_2B_3\ldots$, не оканчивающееся одними символами R. Таким образом, имеется сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие между $[0, 1)$ и $[0, \infty)$, если исходить из соответствия $0 \leftrightarrow \mathrm{L}$ и $1 \leftrightarrow \mathrm{R}$.

Существует тесная связь между алгоритмом Евклида и представлением Штерна—Броко рациональных чисел. Если $\alpha = m/n$, то получаем $\lfloor m/n \rfloor$ символов R, затем $\lfloor n/(m \bmod n) \rfloor$ символов L, после чего $\lfloor (m \bmod n)/(n \bmod (m \bmod n)) \rfloor$ символов R и т. д. Числа $m \bmod n$, $n \bmod (m \bmod n)$, … — это не что иное, как величины, фигурировавшие в алгоритме Евклида. (Нужно проявить некоторую изобретательность, чтобы обеспечить отсутствие в конце бесконечного числа символов R.) Подобная взаимосвязь будет исследована в гл. 6.

4.6 ОТНОШЕНИЕ СРАВНИМОСТИ

Модулярная арифметика — это один из главных инструментов, которыми располагает теория чисел. Мы мельком коснулись ее в гл. 3, когда имели дело с бинарной операцией 'mod' — как правило, в качестве одной из операций наряду с другими в составе некоторого выражения. В этой главе 'mod' будет использоваться и в качестве самостоятельного выражения, в связи с чем будет более удобна несколько иная форма ее записи:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a \bmod m = b \bmod m. \qquad (4.35)$$

К примеру, $9 \equiv -16 \pmod 5$, так как $9 \bmod 5 = 4 = (-16) \bmod 5$. Формула '$a \equiv b \pmod m$' может быть прочитана как „a сравнимо с b по модулю m". Данное понятие имеет смысл и тогда, когда a, b и m — произвольные вещественные числа, но мы почти всегда будем использовать его только для целых чисел.

„Numerorum congruentiam hoc signo, ≡, in posterum denotabimus, modulum ubi opus erit in clausulis adiungentes, $-16 \equiv 9$ (mod. 5), $-7 \equiv 15$ (mod. 11)."
— К. Ф. Гаусс [67]

Поскольку $x \bmod m$ отличается от x на величину, кратную m, понятие сравнимости можно истолковать по-другому:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a - b \text{ кратно } m. \qquad (4.36)$$

Действительно, если $a \bmod m = b \bmod m$, то определение операции 'mod' из (3.21) указывает, что $a - b = a \bmod m + km - (b \bmod m + lm) = (k - l)m$ при некоторых целых k и l. И наоборот, если $a - b = km$, то $a = b$ при $m = 0$; в противном случае

$$\begin{aligned} a \bmod m = a - \lfloor a/m \rfloor m &= b + km - \lfloor (b + km)/m \rfloor m \\ &= b - \lfloor b/m \rfloor m = b \bmod m. \end{aligned}$$

Зачастую проще применять характеризацию $\equiv$ из (4.36), нежели из (4.35). Так, $8 \equiv 23 \pmod 5$, ибо $8 - 23 = -15$ кратно 5 — не нужно вычислять ни $8 \bmod 5$, ни $23 \bmod 5$.

Знак сравнения '$\equiv$' очень напоминает знак '$=$', ибо сравнения весьма схожи с равенствами. Например, сравнение является *отношением эквивалентности*, т. е. оно обладает свойствами рефлексивности '$a \equiv a$', симметричности '$a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$' и транзитивности '$a \equiv b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$'. Все эти свойства легко доказуемы, поскольку всякое отношение '$\equiv$', которое удовлетворяет соотношению '$a \equiv b \iff f(a) = f(b)$' для некоторой функции f, является отношением эквивалентности. (В нашем случае $f(x) = x \bmod m$.) Кроме того, сравнимые элементы можно складывать и вычитать без потери сравнимости:

„Сегодня я чувствую себя прекрасно по модулю легкой головной боли."
— Словарь хакера [283]

$$\begin{aligned} a \equiv b \text{ и } c \equiv d &\implies a + c \equiv b + d \pmod{m}, \\ a \equiv b \text{ и } c \equiv d &\implies a - c \equiv b - d \pmod{m}. \end{aligned}$$

Действительно, если $a - b$ и $c - d$ кратны m, то это же верно для $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$ и для $(a - c) - (b - d) = (a - b) - (c - d)$. Кстати, вовсе не обязательно писать '$(\bmod m)$' после каждого знака '$\equiv$': если величина модуля не меняется, то

достаточно упомянуть его лишь один раз без изменения последующего смысла. В этом состоит большое удобство понятия сравнения.

Подобное свойство справедливо и для умножения, если только мы имеем дело с целыми числами:

$$a \equiv b \quad \text{и} \quad c \equiv d \quad \Longrightarrow \quad ac \equiv bd \qquad (\text{mod } m)\,, \quad \text{целые } b, c.$$

Доказательство: $ac - bd = (a-b)c + b(c-d)$. А повторное применение этого свойства умножения делает его справедливым и для степеней:

$$a \equiv b \quad \Longrightarrow \quad a^n \equiv b^n \qquad (\text{mod } m)\,, \quad \text{целые } a, b, \quad \text{целые } n \geqslant 0.$$

К примеру, поскольку $2 \equiv -1 \pmod 3$, то $2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$; это означает, что $2^n - 1$ кратно 3 тогда и только тогда, когда n четно.

Таким образом, бóльшую часть алгебраических операций, которые обыкновенно выполняются с равенствами, можно выполнять и со сравнениями. Бóльшую — но не все: операция деления блистательно отсутствует. Если $ad \equiv bd \pmod m$, то это не всегда означает, что $a \equiv b$. К примеру, $3 \cdot 2 \equiv 5 \cdot 2 \pmod 4$, но $3 \not\equiv 5$.

Однако свойство сократимости сравнений можно сохранить в часто встречающемся случае, когда d и m взаимно просты:

$$ad \equiv bd \iff a \equiv b \quad (\text{mod } m)\,, \quad \text{целые } a, b, d, m \text{ и } d \perp m. \tag{4.37}$$

К примеру, из того, что $15 \equiv 35 \pmod m$, вполне закономерен вывод, что $3 \equiv 7 \pmod m$, если только модуль m не кратен 5.

Для доказательства этого свойства снова воспользуемся расширением правила (4.5) для НОД, находя d' и m', такие, что $d'd + m'm = 1$. Тогда, если $ad \equiv bd$, то можно умножить обе части сравнения на d', получая $ad'd \equiv bd'd$. А поскольку $d'd \equiv 1$, то $ad'd \equiv a$ и $bd'd \equiv b$; следовательно, $a \equiv b$. Это доказательство показывает, что при рассмотрении сравнений по модулю m, число d' ведет себя наподобие числа $1/d$, в силу чего его называют „обратным d по модулю m".

Другое применение операции деления к сравнениями — деление модуля наряду с другими числами:

$$ad \equiv bd \pmod{md} \iff a \equiv b \pmod m \text{ при } d \neq 0. \tag{4.38}$$

Это правило справедливо для всех вещественных чисел a, b, d и m, поскольку оно основывается только на распределительном законе $(a \bmod m)d = ad \bmod md$: имеем $a \bmod m = b \bmod m \iff (a \bmod m)d = (b \bmod m)d \iff ad \bmod md = bd \bmod md$. Так, например, из того, что $3 \cdot 2 \equiv 5 \cdot 2 \pmod 4$, заключаем, что $3 \equiv 5 \pmod 2$.

Теперь можно объединить (4.37) и (4.38) и получить общее правило, изменяющее величину модуля в наименьшей возможной степени:

$$ad \equiv bd \pmod{m} \iff a \equiv b \ \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{\text{НОД}(d,m)}\right), \quad \text{целые } a, b, d, m. \qquad (4.39)$$

Действительно, можно умножить $ad \equiv bd$ на d', где $d'd + m'm = \text{НОД}(d, m)$, получая сравнение $a \cdot \text{НОД}(d, m) \equiv b \cdot \text{НОД}(d, m)$ $(\mathrm{mod}\ m)$, которое можно разделить на $\text{НОД}(d, m)$.

Немного разовьем подобную идею изменения величины модуля. Если нам известно, что $a \equiv b \pmod{100}$, то a должно быть сравнимо с b по модулю 10, а также по модулю любого другого делителя 100. Сказать, что $a - b$ кратно 100 — это сильнее, чем сказать, что $a - b$ кратно 10. В общем случае

$$a \equiv b \pmod{md} \implies a \equiv b \pmod{m}, \quad \text{целое } d, \qquad (4.40)$$

поскольку величина, кратная md, кратна и m.

Обратно, если известно, что $a \equiv b$ по некоторым двум малым модулям, можно ли сделать вывод, что $a \equiv b$ и по какому-либо большему модулю? Можно — соответствующее правило гласит, что

Модульчикам?

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{и} \quad a \equiv b \pmod{n} \iff a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ \text{НОК}(m,n)), \quad \text{целые } m, n > 0. \qquad (4.41)$$

Так, если известно, что $a \equiv b$ по модулю 12 и 18, то можно с уверенностью заключить, что $a \equiv b \pmod{36}$. Основанием для этого служит то, что если разность $a - b$ кратна как m, так и n, то она кратна и $\text{НОК}(m, n)$. Это вытекает из принципа единственности разложения на простые множители.

Исключительно важен частный случай этого правила, когда $m \perp n$, так как $\text{НОК}(m, n) = mn$, если m и n взаимно просты. Поэтому сформулируем его в явном виде:

$$a \equiv b \pmod{mn} \iff a \equiv b \pmod{m} \text{ и } a \equiv b \pmod{n}, \text{ если } m \perp n. \qquad (4.42)$$

К примеру, $a \equiv b \pmod{100}$ тогда и только тогда, когда $a \equiv b \pmod{25}$ и $a \equiv b \pmod{4}$. Говоря по-другому, если известны $x \bmod 25$ и $x \bmod 4$, то этого вполне достаточно для установления $x \bmod 100$. Это частный случай *китайской теоремы об остатках* (см. упр. 30), открытой Сунь Цзы из Китая около 350 г. н. э..

Пишут также Сунь Цю, или Сунь Тзу. — Перев.

Модули m и n в (4.42) могут быть далее разложены на взаимно простые множители, пока не будут выделены все различные простые числа. Следовательно,

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a \equiv b \pmod{p^{m_p}} \text{ при всех } p,$$

если разложение (4.11) числа m на простые множители имеет вид $\prod_p p^{m_p}$. Сравнения по модулю степеней простых чисел — это те „кирпичики", из которых строятся все сравнения по модулю целых чисел.

4.7 НЕЗАВИСИМЫЕ ОСТАТКИ

Одно из важнейших приложений теории сравнений — *система счисления в остатках*, в которой целое число x представлено набором его остатков (или вычетов) по взаимно простым модулям:

$$\mathrm{Res}(x) = (x \bmod m_1, \ldots, x \bmod m_r), \quad \text{если } m_j \perp m_k \text{ при } 1 \leqslant j < k \leqslant r.$$

Знание $x \bmod m_1$, ..., $x \bmod m_r$ ничего не позволяет сказать про x, однако все же позволяет установить величину $x \bmod m$, где m равно произведению $m_1 \ldots m_r$. А поскольку в практических применениях зачастую известно, что x лежит в некотором диапазоне, то можно узнать все про x, если известна величина $x \bmod m$ и m — достаточно большое число.

Рассмотрим, например, один из случаев системы счисления в остатках, когда имеется только два модуля — 3 и 5:

$x \bmod 15$	$x \bmod 3$	$x \bmod 5$
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	0	3
4	1	4
5	2	0
6	0	1
7	1	2
8	2	3
9	0	4
10	1	0
11	2	1
12	0	2
13	1	3
14	2	4

Все упорядоченные пары $(x \bmod 3, x \bmod 5)$ различны, поскольку $x \bmod 3 = y \bmod 3$ и $x \bmod 5 = y \bmod 5$ тогда и только тогда, когда $x \bmod 15 = y \bmod 15$.

Согласно свойствам сравнений можно складывать, вычитать и умножать обе компоненты *независимо*. К примеру, если нужно умножить $7 = (1,2)$ на $13 = (1,3)$ по модулю 15, то вычисляются $1 \cdot 1 \bmod 3 = 1$ и $2 \cdot 3 \bmod 5 = 1$. Ответом будет $(1,1) = 1$; следовательно $7 \cdot 13 \bmod 15$ должно равняться 1. (Безусловно, так оно и есть.)

Сей принцип независимости полезен при вычислениях на компьютере в силу того, что разные компоненты можно обрабатывать раздельно (скажем, на разных компьютерах). Если в качестве каждого модуля m_k выбраны различные простые числа p_k,

несколько меньшие чем 2^{31}, то компьютер, выполняющий основные арифметические операции с целыми числами в диапазоне $[-2^{31}, 2^{31})$, может легко вычислять суммы, разности и произведения по модулю p_k. Набор из r таких простых чисел дает возможность складывать, вычитать и умножать „числа многократной точности", состоящие из почти $31r$ битов, а система остатков дает возможность сделать это быстрее, чем если бы такие большие числа складывались, вычитались и умножались другими способами.

Например, удобно работать с простым числом Мерсенна $2^{31}-1$.

А в ряде случаев можно выполнять и деление. Предположим, например, что нужно вычислить точную величину некоторого большого определителя, составленного из целых чисел. Результатом будет некоторое целое число D, а границы для $|D|$ можно задать, исходя из размера его элементов. Однако все известные способы быстрого вычисления определителей требуют деления, а это приводит к дробям (и потере точности, если довольствоваться двоичными приближениями). Выход заключается в вычислении $D \bmod p_k = D_k$ по ряду больших простых чисел p_k — можно спокойно делить по модулю p_k, если только делитель не окажется кратным p_k. Это случается крайне редко, но если все-таки случается, то можно выбрать другое простое число. В конечном счете, знание D_k для достаточно многих простых модулей позволяет установить величину D.

Но мы еще не объяснили, как от заданного набора остатков $(x \bmod m_1, \ldots, x \bmod m_r)$ перейти к $x \bmod m$. Мы показали, что такой переход теоретически возможен, но сами вычисления могут оказаться столь внушительны, что практически сведут на нет всю эту затею. К счастью, имеется довольно несложный способ уладить дело, который можно проиллюстрировать на примере набора $(x \bmod 3, x \bmod 5)$ из нашей таблички. Ключевая идея состоит в разрешении данной проблемы для двух случаев $(1,0)$ и $(0,1)$; действительно, если $(1,0) = a$ и $(0,1) = b$, то $(x,y) = (ax+by) \bmod 15$, поскольку сравнения можно перемножать и складывать.

В нашем случае просмотр таблички дает $a = 10$ и $b = 6$; но как найти a и b, когда модули огромны? Иначе говоря, если $m \perp n$, то где тот путь, который приведет к числам a и b, удовлетворяющим каждому из уравнений

$$a \bmod m = 1, \quad a \bmod n = 0, \quad b \bmod m = 0, \quad b \bmod n = 1?$$

И опять на выручку приходит (4.5): с помощью алгоритма Евклида можно найти числа m' и n', такие, что

$$m'm + n'n = 1\,.$$

Поэтому можно взять $a = n'n$ и $b = m'm$, при необходимости приводя их по $\bmod mn$.

При больших модулях для сведения вычислений к минимуму бывают необходимы и другие уловки; подробности выходят

за рамки этой книги, но их можно найти в книге [140, разд. 4.3]. Переход от остатков к соответствующим исходным числам — операция в принципе выполнимая, но достаточно медленная, так что выигрыша во времени выполнения можно достичь лишь при условии, что удается выполнить сразу некоторую последовательность операций в системе счисления в остатках перед обратным переходом.

Попробуем подкрепить эти сравнительные идеи решением небольшой задачи: сколько решений имеет сравнение

$$x^2 \equiv 1 \pmod{m}, \qquad (4.43)$$

если два решения x и x', такие, что $x \equiv x'$, считать одинаковыми?

В соответствии с установленными ранее общими правилами, вначале следует рассмотреть случай, когда m равно степени простого числа p^k при $k > 0$. Тогда сравнение $x^2 \equiv 1$ может быть записано в виде

$$(x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod{p^k},$$

так что p должно делить либо $x-1$, либо $x+1$, либо и то и другое. Но p не может делить как $x-1$, так и $x+1$, если только p не равно 2 (оставим этот случай напоследок). Если же $p > 2$, то $p^k \backslash (x-1)(x+1) \iff p^k \backslash (x-1)$ или $p^k \backslash (x+1)$; поэтому имеется ровно два решения: $x \equiv +1$ и $x \equiv -1$.

Случай $p = 2$ несколько отличается. Если $2^k \backslash (x-1)(x+1)$, то одно из чисел $x-1$ или $x+1$ делится на 2 (но не на 4), а тогда другое число должно делиться на 2^{k-1}. Это означает, что при $k \geqslant 3$ имеется четыре решения, а именно, $x \equiv \pm 1$ и $x \equiv 2^{k-1} \pm 1$. (Например, если $p^k = 8$, то этими четырьмя решениями будут $x \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$ — полезно знать, что *квадрат любого нечетного числа имеет вид* $8n+1$.)

Итак, $x^2 \equiv 1 \pmod m$ тогда и только тогда, когда $x^2 \equiv 1 \pmod{p^{m_p}}$ для всех простых чисел p с $m_p > 0$ из канонического разложения m на множители. Каждое простое число не зависит от других, и для $x \bmod p^{m_p}$ (кроме случая $p = 2$) имеется ровно две возможности. Поэтому если m имеет ровно r различных простых делителей, то общее число решений сравнения $x^2 \equiv 1$ равно 2^r (за исключением поправки на четное m). В общем случае точное число решений равно

Все простые числа свои среди нечетных, кроме числа 2, чужого среди своих.

$$2^{r+[8\backslash m]+[4\backslash m]-[2\backslash m]}. \qquad (4.44)$$

Так, имеется четыре „квадратных корня из единицы по модулю 12“, а именно 1, 5, 7 и 11. При $m = 15$ данная четверка — это числа, остатки которых по mod 3 и mod 5 равны ± 1, а именно $(1,1)$, $(1,4)$, $(2,1)$ и $(2,4)$ в системе счисления в остатках. В обычной (десятичной) системе счисления этими решениями будут 1, 4, 11 и 14.

4.8 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

За нами тянется долг из гл. 3: мы обещали доказать, что m чисел

$$0 \bmod m,\ n \bmod m,\ 2n \bmod m,\ \ldots,\ (m-1)n \bmod m \qquad (4.45)$$

состоят в точности из d наборов m/d чисел

$$0,\quad d,\quad 2d,\quad \ldots,\quad m-d,$$

взятых в некотором порядке, где $d = \text{НОД}(m, n)$. Например, если $m = 12$ и $n = 8$, то $d = 4$ и эти числа суть 0, 8, 4, 0, 8, 4, 0, 8, 4, 0, 8, 4.

Первая часть доказательства — показать, что мы получаем d наборов первых m/d величин,— теперь уже тривиальна. Согласно (4.38),

Математики обожают говорить, что то или иное тривиально.

$$jn \equiv kn \pmod m \qquad \Longleftrightarrow \qquad j(n/d) \equiv k(n/d) \pmod{m/d}$$

откуда мы получаем d наборов чисел, полученных при $0 \leqslant k < m/d$.

Теперь нужно показать, что эти m/d чисел суть $\{0, d, 2d, \ldots, m-d\}$, взятые в некотором порядке. Положим $m = m'd$ и $n = n'd$. Тогда $kn \bmod m = d(kn' \bmod m')$ по распределительному закону (3.23), так что величины, которые получаются при $0 \leqslant k < m'$,— это взятые по d раз числа

$$0 \bmod m',\ n' \bmod m',\ 2n' \bmod m',\ \ldots,\ (m'-1)n' \bmod m'.$$

Но на основании (4.27) известно, что $m' \perp n'$ — они уже поделены на их НОД. Поэтому нужно рассмотреть лишь случай $d = 1$, а именно тот случай, когда m и n взаимно просты.

Итак, допустим, что $m \perp n$. Нетрудно заметить, что в этом случае числа (4.45) — это не что иное, как расположенные в некотором порядке числа $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, если воспользоваться „принципом голубиных гнезд“. Сей принцип утверждает, что если m голубей рассаживаются по m гнездам, то одно из гнезд окажется пустым тогда и только тогда, когда в каком-нибудь другом гнезде будет сидеть более одного голубя. (Это аналогично „принципу ящиков Дирихле“, доказанному в упр. 3.8.) Известно, что числа (4.45) различны, поскольку

$$jn \equiv kn \pmod m \qquad \Longleftrightarrow \qquad j \equiv k \pmod m,$$

если $m \perp n$ (это свойство (4.37)). Следовательно, все гнезда с номерами $0, 1, \ldots, m-1$ должны заполниться m различными числами и доказательство завершено. Тем самым наш долг из гл. 3 погашен.

Доказательство-то завершено, но если не полагаться на косвенную „птичью“ аргументацию, а воспользоваться прямым методом, то можно доказать даже большее. Если $m \perp n$ и если задано

„Cubum autem in duos cubos, aut guadrato — guadratum in duos guadrati — guadratos, et generaliter nullam in infifnitum ultra guadratum patestatem in duas ejusdem nominas fas est dividere — cujus rei demonstrarttonem mirabelem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."
— Запись П. де Ферма на полях „Арифметики" Диофанта (Добавл. перев.)

значение $j \in [0, m)$, то можно явно вычислить число $k \in [0, m)$, такое, что $kn \bmod m = j$, разрешив сравнение

$$kn \equiv j \pmod m$$

относительно k. Мы просто умножаем обе части сравнения на число n', такое, что $m'm + n'n = 1$, получая

$$k \equiv jn' \pmod m,$$

откуда $k = jn' \bmod m$.

Только что доказанные факты могут быть использованы для установления одного важного обстоятельства, обнаруженного Пьером де Ферма в 1640 г. Ферма был великим математиком, внесшим существенный вклад в создание дифференциального исчисления и многие другие разделы математики. После него остались рукописи, содержащие массу сформулированных без доказательства теорем, и все они были впоследствии подтверждены. Все — за исключением одной, которая стала самой знаменитой, поскольку она противостояла лучшим математикам на протяжении 350 лет. Та, что осталась недоказанной, теперь носит название ПОСЛЕДНЕЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА и утверждает, что

$$a^n + b^n \neq c^n \tag{4.46}$$

для всех целых положительных чисел a, b, c и n, если $n > 2$. (Разумеется, уравнения $a+b=c$ и $a^2+b^2=c^2$ имеют уйму решений.) В конце концов этот вопрос был разрешен Эндрю Уайлсом: его эпохальное доказательство формулы (4.46) опубликовано в *Annals of Mathematics* **141** (1995), с. 443–551.

СЕНСАЦИЯ

В 1772 г. Эйлер [379] предположил, что $a^4+b^4+c^4 \neq d^4$, однако в августе 1987 г. Наум Элькис [383] обнаружил, что существует бесконечное число решений.

Только что Роджер Фрай провел исчерпывающий машинный поиск, выяснив (после 110 часов работы суперкомпьютера Connection Machine), что единственным решением для $d < 1000000$ является $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$.

Теорему Ферма 1640 г. гораздо легче проверить. Теперь она называется МАЛОЙ ТЕОРЕМОЙ ФЕРМА (или, для краткости, просто теоремой Ферма) и утверждает, что

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p, \qquad \text{если } n \perp p. \tag{4.47}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, допустим, что p обозначает простое число. Нам известно, что $p-1$ чисел $n \bmod p$, $2n \bmod p$, …, $(p-1)n \bmod p$ суть числа $1, 2, \ldots, p-1$, взятые в некотором порядке. Поэтому если их перемножить, то получим

$$\begin{aligned} n \cdot (2n) \cdot \ldots \cdot ((p-1)n) &\equiv (n \bmod p) \cdot (2n \bmod p) \cdot \ldots \cdot ((p-1)n \bmod p) \\ &\equiv (p-1)!\,, \end{aligned}$$

где сравнимость понимается по модулю p. Это означает, что

$$(p-1)!\,n^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p$$

и можно сократить на множитель $(p-1)!$, поскольку он не делится на p. ЧТД.

Иногда более удобна другая формулировка теоремы Ферма:

$$n^p \equiv n \pmod p, \qquad \text{целое } n. \tag{4.48}$$

Данное сравнение имеет место при любом целом n. Доказать это легко: если $n \perp p$, то просто умножаем (4.47) на n; если же нет, то $p \backslash n$, так что $n^p \equiv 0 \equiv n$.

В том же году, когда им была открыта теорема (4.47), Ферма в письме к Мерсенну высказывает свое предположение о том, что число

$$f_n = 2^{2^n} + 1$$

должно быть простым при всех $n \geqslant 0$. Он знал, что первые пять случаев давали простые числа:

„... laquelle proposition, si elle est vraie, est de très grand usage." — П. де Ферма [311]

$$2^1 + 1 = 3, \quad 2^2 + 1 = 5, \quad 2^4 + 1 = 17,$$
$$2^8 + 1 = 257, \quad 2^{16} + 1 = 65537,$$

но он не мог понять, как доказать, что в следующем случае число $2^{32} + 1 = 4294967297$ является простым.

Самое интересное, что используя свою же собственную только что открытую теорему, Ферма мог бы доказать, что число $2^{32} + 1$ *не* является простым, если бы нашел время для выполнения нескольких десятков умножений. Можно подставить $n = 3$ в (4.47), устанавливая тем самым, что

$$3^{2^{32}} \equiv 1 \pmod{2^{32} + 1}, \qquad \text{если } 2^{32} + 1 \text{ — простое число.}$$

А это соотношение можно проверить вручную, начиная с 3 и возводя в квадрат 32 раза, сохраняя лишь остатки по mod $2^{32} + 1$. Вначале мы получаем $3^2 = 9$, затем $3^{2^2} = 81$, потом $3^{2^3} = 6561$ и т. д., до тех пор, пока не доберемся до

$$3^{2^{32}} \equiv 3029026160 \pmod{2^{32} + 1}.$$

Если это всего-навсего МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА, то другая, хотя и была последней, но только не по важности.

В результате не получается 1, так что $2^{32}+1$ не является простым числом. Подобный метод опровержения не дает никакого ключа к разгадке того, каковы могут быть сомножители,— он только доказывает, что сомножители существуют. (В данном случае они равны 641 и 6700417, что было впервые обнаружено Эйлером в 1732 г. [366].)

Если бы число $3^{2^{32}}$ оказалось равным 1 по модулю $2^{32} + 1$, то данное вычисление не доказывало бы, что число $2^{32}+1$ простое,— оно всего лишь не опровергало бы это. Однако в упр. 47 обсуждается обращение теоремы Ферма, с помощью которого *можно* доказать, что большие простые числа — действительно простые, не прибегая к изнурительным арифметическим выкладкам.

Мы доказали теорему Ферма, сократив обе части уравнения на $(p-1)!$. Оказывается, что величина $(p-1)!$ всегда сравнима с -1 по модулю p — это следствие одного классического факта, известного под названием теоремы Вильсона:

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod n \iff n \text{ простое, если } n > 1. \qquad (4.49)$$

Одна половина этой теоремы тривиальна: если $n > 1$ — не простое число, то у него есть простой делитель p, который появляется в качестве множителя в разложении $(n-1)!$, так что величина $(n-1)!$ не может быть сравнима с -1. (Если бы величина $(n-1)!$ была сравнима с -1 по модулю n, то она была бы также сравнима с -1 по модулю p, но это не так.)

Другая половина теоремы Вильсона утверждает, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. Эту половину можно доказать, объединяя попарно числа и обратные к ним по mod p. Если $n \perp p$, то известно, что существует n', такое, что

$$n'n \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ p);$$

здесь n' — число, обратное к n, а, в свою очередь, n — обратное к n'. Любые два обратных к n числа должны быть сравнимы друг с другом, поскольку $nn' \equiv nn''$ влечет за собой $n' \equiv n''$.

Теперь предположим, что каждое число между 1 и $p-1$ образует пару со своим обратным. Поскольку произведение некоторого числа и обратного к нему сравнима с 1, то произведение всех обратных чисел во всех парах также сравнима с 1; по-видимому, и величина $(p-1)!$ будет сравнима с 1. Проверим это, скажем, при $p = 5$. Получаем $4! = 24$, но это число сравнимо с 4, а не с 1 по модулю 5. О-ля-ля! Где же мы ошиблись? Давайте-ка посмотрим повнимательнее, что собой представляют обратные числа:

$$1' = 1, \qquad 2' = 3, \qquad 3' = 2, \qquad 4' = 4.$$

Ах, вот в чем дело: 2 и 3 образуют пару, а 1 и 4 нет — они являются обратными к самим себе.

Это, наверное, оборотни.

Чтобы исправить наши рассуждения, надо установить, какие числа являются обратными к самим себе. Если число x является обратным к самому себе, то $x^2 \equiv 1 \pmod p$. Но уже доказано, что это сравнение имеет ровно два корня, когда $p > 2$. (Если $p = 2$, то очевидно, что $(p-1)! \equiv -1$, так что нет нужды беспокоиться об этом случае.) Эти корни равны 1 и $p-1$, а все остальные числа (между 1 и $p-1$) благополучно разбиваются на пары; следовательно,

$$(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1,$$

что и требовалось.

К сожалению, мы не умеем эффективно вычислять факториалы, так что в качестве практического инструмента проверки на простоту теорема Вильсона бесполезна. Это только теорема.

4.9 ФИ- И МЮ-ФУНКЦИИ

Сколько среди целых чисел $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ взаимно простых с m? Эта важная величина называется $\varphi(m)$ — „тотиентой“ числа m (названной так Дж. Дж. Силвестером [274] — английским математиком, любившим придумывать новые термины). Имеем

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(p) = p - 1$ и $\varphi(m) < m - 1$ для всех составных чисел m.

Функция φ называется *эйлеровой фи-функцией*, ибо Эйлер был первым, кто изучал ее. Так, Эйлер обнаружил, что теорема Ферма (4.47) может быть обобщена на непростые модули следующим образом:

$$n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \qquad \text{если } n \perp m. \tag{4.50}$$

(Доказать теорему Эйлера предлагается в упр. 32).

Если m является степенью простого числа, $m = p^k$, то $\varphi(m)$ легко вычисляется, ибо $n \perp p^k \iff p \nmid n$. Кратными p среди чисел $\{0, 1, \ldots, p^k - 1\}$ являются числа $\{0, p, 2p, \ldots, p^k - p\}$, следовательно, всего их p^{k-1}, а $\varphi(p^k)$ подсчитывает то, что остается:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

Обратите внимание, что при $k = 1$ эта формула, как и положено, дает величину $\varphi(p) = p - 1$.

Если $m > 1$ не является степенью простого числа, то можно записать $m = m_1 m_2$, где $m_1 \perp m_2$. Тогда числа $0 \leqslant n < m$ могут быть представлены как $(n \bmod m_1, n \bmod m_2)$ в системе остатков. Согласно (4.30) и (4.4)

$$n \perp m \iff n \bmod m_1 \perp m_1 \quad \text{и} \quad n \bmod m_2 \perp m_2.$$

Следовательно, величина $n \bmod m$ является „хорошей“ тогда и только тогда, когда являются „хорошими“ как $n \bmod m_1$, так и $n \bmod m_2$, если считать взаимную простоту хорошим качеством. А общее число „хороших“ величин по модулю m теперь может быть вычислено рекурсивно: оно равно $\varphi(m_1)\varphi(m_2)$, поскольку имеется $\varphi(m_1)$ хороших способов выбора первой компоненты $n \bmod m_1$ и $\varphi(m_2)$ хороших способов выбора второй компоненты $n \bmod m_2$ в модульном представлении.

Так, $\varphi(12) = \varphi(4)\varphi(3) = 2 \cdot 2 = 4$, поскольку n взаимно просто с 12 тогда и только тогда, когда $n \bmod 4 = (1$ или $3)$ и $n \bmod 3 = (1$ или $2)$. Вот четыре величины в системе остатков, взаимно простых с 12: $(1,1)$, $(1,2)$, $(3,1)$, $(3,2)$; в обычной десятичной записи это 1, 5, 7, 11. Теорема Эйлера утверждает, что $n^4 \equiv 1 \pmod{12}$ всякий раз, когда $n \perp 12$.

Функция $f(m)$ целых положительных чисел называется *мультипликативной*, если $f(1) = 1$ и

$$f(m_1 m_2) = f(m_1) f(m_2) \qquad \text{для любых } m_1 \perp m_2. \tag{4.51}$$

Тем самым мы доказали, что $\varphi(m)$ — мультипликативная функция. Ранее в этой главе нам уже встречался другой пример мультипликативной функции: число несравнимых решений сравнения $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$ мультипликативно. А вот еще один пример: $f(m) = m^\alpha$ при любом показателе степени α.

Мультипликативная функция полностью определяется ее значениями на множестве степеней простых чисел, поскольку любое

„*Si fuerit* N *ad* x *numerus primus et* n *numerus partium ad* N *primarum, tum potestas* x^n *unitate minuta semper per numerum* N *erit divisibilis.*“
— *Л. Эйлер [375]*

„*Латынь Эйлера очень проста, а его обозначения почти современны — пожалуй, было бы лучше сказать, что наши обозначения почти эйлеровы!*“
— *Д. Я. Стройк [288*, с. 165]*

„*Si sint* A *et* B *numeri inter se primi et numerus partium ad* A *primarum sit* = a, *numerus vero partium ad* B *primarum sit* = b, *tum numerus partium ad productum* AB *primarum erit* = ab.“
— *Л. Эйлер [375]*

целое положительное число m может быть разложено на степени простых сомножителей, которые взаимно просты друг с другом. Общая формула

$$f(m) = \prod_p f(p^{m_p}), \qquad \text{если } m = \prod_p p^{m_p}, \tag{4.52}$$

имеет место тогда и только тогда, когда f — мультипликативная функция.

В частности, эта формула доставляет величину эйлеровой фи-функции для произвольного числа m:

$$\varphi(m) = \prod_{p \backslash m} (p^{m_p} - p^{m_p - 1}) = m \prod_{p \backslash m} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big). \tag{4.53}$$

К примеру, $\varphi(12) = (4-2)(3-1) = 12(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})$.

Обратимся теперь к использованию φ-функции для изучения рациональных чисел по $\mathrm{mod}\ 1$. Говорят, что дробь m/n — *правильная*, если $0 \leqslant m < n$. Следовательно, $\varphi(n)$ — это число несократимых правильных дробей со знаменателем n, а все несократимые правильные дроби со знаменателем n или меньшим и неправильная дробь $\frac{1}{1}$ входят в состав последовательности Фарея $\mathcal{F}_n$.

Множество *всех* правильных дробей со знаменателем 12 до их приведения к несократимым имеет вид:

$$\tfrac{0}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{12}, \tfrac{3}{12}, \tfrac{4}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{6}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{8}{12}, \tfrac{9}{12}, \tfrac{10}{12}, \tfrac{11}{12},$$

а после приведения —

$$\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{11}{12},$$

и эти дроби можно сгруппировать по их знаменателям:

$$\tfrac{0}{1}; \quad \tfrac{1}{2}; \quad \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}; \quad \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}; \quad \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}; \quad \tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{11}{12}.$$

Но что из этого можно извлечь? Ну, например, то, что среди знаменателей встречается каждый делитель d числа 12 вместе со всеми $\varphi(d)$ своими числителями. Все без исключения знаменатели являются делителями 12. Таким образом,

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 12.$$

Если же начать с несокращенных дробей $\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}$ при любом m, то, очевидно, выйдет то же самое — следовательно,

$$\sum_{d \backslash m} \varphi(d) = m. \tag{4.54}$$

Как-то в начале этой главы мы утверждали, что в теоретико-числовых задачах часто требуются суммы по делителям некоторого числа. Как видите, (4.54) — одна из таких сумм, так что наше утверждение подтвердилось. (Мы увидим и другие примеры.)

А теперь — курьезный факт: если $f(m)$ — некоторая функция, такая, что сумма

$$g(m) = \sum_{d \backslash m} f(d)$$

является мультипликативной функцией, то и сама f — мультипликативная функция. (Это обстоятельство, наряду с (4.54) и тем фактом, что $g(m) = m$, очевидно, мультипликативная функция, дает другое объяснение тому, почему $\varphi(m)$ является мультипликативной функцией.) Сей курьезный факт можно доказать индукцией по m: база индукции устанавливается просто, ибо $f(1) = g(1) = 1$. Пусть $m > 1$ и допустим, что $f(m_1 m_2) = f(m_1)f(m_2)$ для любых $m_1 \perp m_2$ и $m_1 m_2 < m$. Если $m = m_1 m_2$ и $m_1 \perp m_2$, то

$$g(m_1 m_2) = \sum_{d \backslash m_1 m_2} f(d) = \sum_{d_1 \backslash m_1} \sum_{d_2 \backslash m_2} f(d_1 d_2),$$

и $d_1 \perp d_2$, так как все делители m_1 взаимно просты со всеми делителями m_2. По индукционному предположению, $f(d_1 d_2) = f(d_1)f(d_2)$, за исключением, возможно, случая, когда $d_1 = m_1$ и $d_2 = m_2$; следовательно,

$$\Bigl(\sum_{d_1 \backslash m_1} f(d_1) \sum_{d_2 \backslash m_2} f(d_2)\Bigr) - f(m_1)f(m_2) + f(m_1 m_2)$$
$$= g(m_1)g(m_2) - f(m_1)f(m_2) + f(m_1 m_2).$$

Но это равно $g(m_1 m_2) = g(m_1)g(m_2)$, так что $f(m_1 m_2) = f(m_1)f(m_2)$.

Обратно, если $f(m)$ является мультипликативной функцией, то соответствующая ей функция суммы по делителям $g(m) = \sum_{d \backslash m} f(d)$ — всегда мультипликативная функция. На самом деле, как показывает упр. 33, справедливо даже большее. Следовательно, наш курьезный факт и обратный к нему — это непреложные факты.

Функция Мёбиуса $\mu(m)$ — названная так в честь математика девятнадцатого столетия Августа Мёбиуса, знаменитого также своей лентой,— определяется при всех $m \geqslant 1$ уравнением

$$\sum_{d \backslash m} \mu(d) = [m = 1]. \qquad (4.55)$$

Вообще-то, это рекуррентное уравнение, поскольку его левая часть представляет собой сумму, состоящую из собственно $\mu(m)$ и определенных значений $\mu(d)$ при $d < m$. Например, если последовательно подставлять $m = 1, 2, \ldots, 12$, то можно вычислить двенадцать первых значений данной функции:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu(m)$	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1	−1	0

Ричард Дедекинд [100] и Жозеф Лиувилль [199] в 1857 г. заметили следующий важный „принцип обращения“:

$$g(m) = \sum_{d \backslash m} f(d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(m) = \sum_{d \backslash m} \mu(d) g\left(\frac{m}{d}\right). \quad (4.56)$$

В соответствии с этим принципом, функция μ обеспечивает нас еще одним способом выяснения того, что собой представляет некоторая функция $f(m)$, для которой известна сумма $\sum_{d\backslash m} f(d)$.

Сейчас самое время размяться упражнением 11.

Для доказательства соотношения (4.56) воспользуемся двумя приемами (4.7) и (4.9), которые были приведены где-то в начале этой главы. Если $g(m) = \sum_{d\backslash m} f(d)$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{d\backslash m} \mu(d) g\left(\frac{m}{d}\right) &= \sum_{d\backslash m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) \\
&= \sum_{d\backslash m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{k\backslash d} f(k) \\
&= \sum_{k\backslash m} \sum_{d\backslash (m/k)} \mu\left(\frac{m}{kd}\right) f(k) \\
&= \sum_{k\backslash m} \sum_{d\backslash (m/k)} \mu(d) f(k) \\
&= \sum_{k\backslash m} [m/k=1] f(k) = f(m).
\end{aligned}$$

Другая половина соотношения (4.56) доказывается аналогично (см. упр. 12).

Соотношение (4.56) выявляет ценное качество функции Мёбиуса, и мы уже поместили в табличку первые двенадцать ее значений. Но какова величина $\mu(m)$ при большом m? И как разрешить рекуррентность (4.55)? Ну, очевидно, что $g(m) = [m=1]$ является мультипликативной функцией — при всех m она попросту равна нулю, за исключением $m = 1$. Так что функция Мёбиуса, определенная уравнением (4.55), должна быть мультипликативной функцией в силу того, что мы доказали минуту или две назад. Поэтому можно выяснить, что такое $\mu(m)$, если вычислить $\mu(p^k)$.

В зависимости от того, как быстро вы читаете.

Когда $m = p^k$, то (4.55) утверждает, что

$$\mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \cdots + \mu(p^k) = 0$$

при любом $k \geqslant 1$, так как делителями p^k является $1, \ldots, p^k$. Отсюда следует, что

$$\mu(p) = -1, \qquad \mu(p^k) = 0 \quad \text{для } k > 1.$$

Поэтому в силу (4.52) получаем общую формулу:

$$\mu(m) = \prod_{p\backslash m} \mu(p^{m_p}) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{если } m = p_1p_2\dots p_r, \\ 0, & \text{если } m \text{ делится на некоторый} \\ & \text{квадрат простого, } p^2. \end{cases} \tag{4.57}$$

Вот что такое μ.

Если рассматривать (4.54) как рекуррентное соотношение для функции $\varphi(m)$, то эту рекуррентность можно разрешить, применив правило Дедекинда—Лиувилля (4.56). Искомое решение таково:

$$\varphi(m) = \sum_{d\backslash m} \mu(d)\,\frac{m}{d}\,. \tag{4.58}$$

Например,

$$\begin{aligned} \varphi(12) &= \mu(1)\cdot 12 + \mu(2)\cdot 6 + \mu(3)\cdot 4 + \mu(4)\cdot 3 + \mu(6)\cdot 2 + \mu(12)\cdot 1 \\ &= 12 - 6 - 4 + 0 + 2 + 0 = 4\,. \end{aligned}$$

Если m делится на r различных простых чисел, скажем, на $\{p_1,\dots,p_r\}$, то сумма (4.58) имеет только 2^r ненулевых членов, ибо функция μ большей частью равна нулю. Так, можно убедиться, что (4.58) согласуется с формулой (4.53), записанной в виде

$$\varphi(m) = m\Bigl(1-\frac{1}{p_1}\Bigr)\dots\Bigl(1-\frac{1}{p_r}\Bigr)\,;$$

если перемножить все r сомножителей $(1 - 1/p_j)$, то получим в точности 2^r ненулевых членов суммы (4.58). Достоинство функции Мёбиуса состоит в том, что помимо рассмотренной, она применима и во многих других ситуациях.

К примеру, попробуем выяснить, сколько дробей насчитывается в последовательности Фарея $\mathcal{F}_n$. Их количество равно числу несократимых дробей из $[0, 1]$, знаменатели которых не превосходят n, так что оно на 1 больше величины $\Phi(n)$, которая определяется как

$$\Phi(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant x} \varphi(k)\,. \tag{4.59}$$

(Из-за последней дроби $\frac{1}{1}$ к $\Phi(n)$ нужно прибавить 1.) Непосредственное вычисление суммы (4.59) затруднительно, однако величину $\Phi(x)$ можно установить косвенно, заметив, что

$$\sum_{d\geqslant 1} \Phi\Bigl(\frac{x}{d}\Bigr) = \frac{1}{2}\lfloor x\rfloor\lfloor 1+x\rfloor \tag{4.60}$$

при любом вещественном $x \geqslant 0$. Но почему это тождество справедливо? Ну, несмотря на его несколько пугающий вид, на самом

деле доказательство его справедливости не выходит за рамки наших возможностей. Всего имеется $\frac{1}{2}\lfloor x\rfloor\lfloor 1+x\rfloor$ правильных дробей m/n с $0 \leqslant m < n \leqslant x$, считая как сокращенные, так и несокращенные дроби,—это дает правую часть. А число таких дробей с $\text{НОД}(m,n) = d$ равно $\Phi(x/d)$, потому что такие дроби суть m'/n' с $0 \leqslant m' < n' \leqslant x/d$ после замены m на $m'd$ и n на $n'd$. Таким образом, левая часть подсчитывает число тех же самых дробей другим способом, и данное тождество должно быть признано справедливым.

Теперь более обстоятельно разберемся в сложившейся ситуации, с тем чтобы уравнения (4.59) и (4.60) стали более ясными. Из определения $\Phi(x)$ следует, что $\Phi(x) = \Phi(\lfloor x\rfloor)$, однако удобнее считать функцию $\Phi(x)$ определенной на произвольных вещественных числах, а не только на целых. В целых точках получаем следующую таблицу:

(Подобное продолжение на вещественные числа — полезный прием для разрешения многих рекуррентностей, которые возникают при анализе алгоритмов.)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	–	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4
$\Phi(n)$	0	1	2	4	6	10	12	18	22	28	32	42	46

и можно проверить тождество (4.60) при $x = 12$:

$$\Phi(12) + \Phi(6) + \Phi(4) + \Phi(3) + \Phi(2) + \Phi(2) + 6\cdot\Phi(1)$$
$$= 46 + 12 + 6 + 4 + 2 + 2 + 6 = 78 = \tfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 13\,.$$

Поразительно.

Тождество (4.60) можно рассматривать как неявную рекуррентность относительно $\Phi(x)$ — как мы только что видели, этим можно было воспользоваться при вычислении величины $\Phi(12)$ по определенным величинам $\Phi(m)$ при $m < 12$. А разрешать такие рекуррентности можно с помощью другого прекрасного свойства функции Мёбиуса:

В действительности Мёбиус [215] изобрел свою функцию из-за свойства (4.61), а не (4.56).

$$g(x) = \sum_{d\geqslant 1} f(x/d) \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) = \sum_{d\geqslant 1} \mu(d)\,g(x/d)\,. \qquad (4.61)$$

Данное правило обращения имеет место для всех функций f, таких, что $\sum_{k,d\geqslant 1}\bigl|f(x/kd)\bigr| < \infty$. Это можно доказать следующим образом. Предположим, что $g(x) = \sum_{d\geqslant 1} f(x/d)$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{d\geqslant 1}\mu(d)\,g(x/d) &= \sum_{d\geqslant 1}\mu(d)\sum_{k\geqslant 1} f(x/kd)\\ &= \sum_{m\geqslant 1} f(x/m)\sum_{d,k\geqslant 1}\mu(d)[m=kd]\\ &= \sum_{m\geqslant 1} f(x/m)\sum_{d\backslash m}\mu(d)\\ &= \sum_{m\geqslant 1} f(x/m)[m=1] = f(x)\,.\end{aligned}$$

Доказательство в другую сторону по существу такое же.

Вот теперь мы в состоянии разрешить рекуррентность (4.60) относительно $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{d\geqslant 1} \mu(d)\lfloor x/d\rfloor\lfloor 1+x/d\rfloor\,. \qquad (4.62)$$

Эта сумма всегда конечна. К примеру,

$$\begin{aligned}\Phi(12) &= \tfrac{1}{2}(12\cdot 13 - 6\cdot 7 - 4\cdot 5 + 0 - 2\cdot 3 + 2\cdot 3\\ &\qquad\qquad - 1\cdot 2 + 0 + 0 + 1\cdot 2 - 1\cdot 2 + 0)\\ &= 78 - 21 - 10 - 3 + 3 - 1 + 1 - 1 = 46\,.\end{aligned}$$

В гл. 9 мы покажем, как использовать (4.62) для получения хорошего приближения к $\Phi(x)$; в действительности мы докажем результат, установленный Мертенсом в 1874 г. [219],

$$\Phi(x) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log x)\,.$$

Следовательно, функция $\Phi(x)$ возрастает „плавно“, усредняя сумасбродное поведение функции $\varphi(k)$.

Придерживаясь заведенной в предыдущей главе традиции, завершим эту главу задачей, иллюстрирующей многое из того, с чем мы уже познакомились, и что, кроме того, имеет отношение к следующей главе. Представим себя обладателями бусинок n различных цветов; наша цель — подсчитать, сколькими способами из них можно составить ожерелье длины m. В данной задаче можно испытать принцип „обозначай и властвуй“, обозначив число возможных ожерелий через $N(m,n)$.

К примеру, из бусинок двух цветов R и B ожерелье длины 4 можно собрать $N(4,2) = 6$ различными способами:

Red и Black — красный и черный. — Ред.

```
 ╭R╮     ╭R╮     ╭R╮     ╭R╮     ╭R╮     ╭B╮
R   R   R   R   R   B   B   B   B   B   B   B
 ╰R╯     ╰B╯     ╰B╯     ╰R╯     ╰B╯     ╰B╯
```

Все другие способы эквивалентны одному из этих, потому что вращение ожерелья ничего не меняет. Однако их отражения считаются различными; так, в случае $m = 6$

```
 ╭B╮                   ╭B╮
R   R                 R   R
|   |    отлично от   |   |  .
R   B                 B   R
 ╰B╯                   ╰B╯
```

Задача подсчета таких конфигураций впервые была решена майором П. А. Мак-Магоном в 1892 г. [212].

Явной рекуррентности для величины $N(m,n)$ не существует, однако число ожерелий можно подсчитать, разрывая и вытягивая в нить m способами каждое из них и рассматривая получающиеся

обрывки. Например, при $m = 4$ и $n = 2$ получаем следующие наборы:

RRRR	RRRR	RRRR	RRRR
RRBR	RRRB	BRRR	RBRR
RBBR	RRBB	BRRB	BBRR
RBRB	BRBR	RBRB	BRBR
RBBB	BRBB	BBRB	BBBR
BBBB	BBBB	BBBB	BBBB

Каждый из n^m возможных наборов встречается по крайней мере один раз в этом наряде из $mN(m,n)$ ниток бус, а некоторые наборы — и более одного раза. А сколько раз на самом деле встречается набор $a_0 \ldots a_{m-1}$? В таком вопросе нет ничего сложного: это число циклических сдвигов набора $a_k \ldots a_{m-1}a_0 \ldots a_{k-1}$, приводящих к тому же набору, что и первоначальный набор $a_0 \ldots a_{m-1}$. К примеру, набор BRBR получается дважды, так как четыре способа разрыва ожерелья из бус BRBR соответствуют четырем циклическим сдвигам (BRBR, RBRB, BRBR, RBRB), два из которых совпадают с самим BRBR. Подобное рассуждение показывает, что

$$mN(m,n) = \sum_{a_0,\ldots,a_{m-1}\in S_n} \sum_{0\leqslant k<m} [a_0 \ldots a_{m-1} = a_k \ldots a_{m-1}a_0 \ldots a_{k-1}]$$
$$= \sum_{0\leqslant k<m} \sum_{a_0,\ldots,a_{m-1}\in S_n} [a_0 \ldots a_{m-1} = a_k \ldots a_{m-1}a_0 \ldots a_{k-1}] .$$

Здесь S_n — множество n различных цветов.

Выясним, сколько наборов удовлетворяют равенству $a_0 \ldots a_{m-1} = a_k \ldots a_{m-1}a_0 \ldots a_{k-1}$ при заданном k. К примеру, если $m = 12$ и $k = 8$, нужно подсчитать число решений вида

$$a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11} = a_8a_9a_{10}a_{11}a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7.$$

Это означает, что $a_0 = a_8 = a_4$, $a_1 = a_9 = a_5$, $a_2 = a_{10} = a_6$ и $a_3 = a_{11} = a_7$. Таким образом, a_0, a_1, a_2 и a_3 могут быть выбраны n^4 способами, а остальные $a_4, \ldots, a_{11}$ — в зависимости от них. Не напоминает ли это что-нибудь знакомое? В общем случае соотношение

$$a_j = a_{(j+k) \bmod m} \qquad \text{при } 0 \leqslant j < m$$

заставляет нас уравнять a_j с $a_{(j+kl) \bmod m}$ при $l = 1, 2, \ldots,$ а нам известно, что кратными k по модулю m являются числа $\{0, d, 2d, \ldots, m-d\}$, где $d = \text{НОД}(k,m)$. Поэтому общее решение состоит в независимом выборе $a_0, \ldots, a_{d-1}$ и последующем присвоении $a_j = a_{j-d}$ при $d \leqslant j < m$. А всего решений n^d.

Тем самым мы доказали, что

$$mN(m,n) = \sum_{0\leqslant k<m} n^{\text{НОД}(k,m)} .$$

Эта сумма может быть упрощена, поскольку она включает только члены вида n^d, где $d\backslash m$. Подстановка $d = \text{НОД}(k,m)$ дает

$$\begin{aligned} N(m,n) &= \frac{1}{m}\sum_{d\backslash m} n^d \sum_{0\leqslant k<m} \bigl[d = \text{НОД}(k,m)\bigr] \\ &= \frac{1}{m}\sum_{d\backslash m} n^d \sum_{0\leqslant k<m} \bigl[k/d \perp m/d\bigr] \\ &= \frac{1}{m}\sum_{d\backslash m} n^d \sum_{0\leqslant k<m/d} \bigl[k \perp m/d\bigr] . \end{aligned}$$

(Мы имеем право заменить k/d на k, так как k должно быть кратно d.) Наконец, по определению, $\sum_{0\leqslant k<m/d}[k \perp m/d] = \varphi(m/d)$, и мы получаем формулу Мак-Магона:

$$N(m,n) = \frac{1}{m}\sum_{d\backslash m} n^d\,\varphi\Bigl(\frac{m}{d}\Bigr) = \frac{1}{m}\sum_{d\backslash m} \varphi(d)\,n^{m/d} . \qquad (4.63)$$

К примеру, если $m = 4$ и $n = 2$, то число ожерелий равно $\frac{1}{4}(1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^1) = 6$ — как того и следовало ожидать.

Не тотчас очевидно, что величина $N(m,n)$, определяемая суммой Мак-Магона, является целым числом! Давайте попробуем доказать непосредственно, что

$$\sum_{d\backslash m} \varphi(d)\,n^{m/d} \equiv 0 \pmod m , \qquad (4.64)$$

не связывая наши рассуждения с ожерельями. В частном случае, когда m — простое число, это сравнение сводится к $n^p + (p-1)n \equiv 0 \pmod p$, т. е. к сравнению $n^p \equiv n$. Мы уже видели в (4.48), что это сравнение представляет собой другую формулировку теоремы Ферма. Поэтому сравнение (4.64) справедливо, если $m = p$,— его можно рассматривать как обобщение теоремы Ферма на случай, когда модуль не является простым. (Обобщение Эйлера (4.50) — это другое обобщение.)

Мы доказали (4.64) для всех простых модулей, так что обратимся к наименьшему из оставшихся непростых случаев — случаю $m = 4$. Надо доказать, что

$$n^4 + n^2 + 2n \equiv 0 \pmod 4 .$$

Доказательство упростится, если рассматривать отдельно четные и нечетные случаи. Если n четно, то все три члена в левой части сравнимы с 0 по модулю 4 — так же, как и их сумма. Если же n нечетно, то n^4 и n^2 сравнимы с 1, а $2n$ сравнимо с 2; следовательно, левая часть сравнима с $1 + 1 + 2$, а тем самым, сравнима с 0 по модулю 4, и мы получили требуемое.

А теперь немного осмелеем и замахнемся на случай $m = 12$. Это m должно нас заинтересовать потому, что оно имеет довольно много множителей, включая квадрат простого числа, несмотря на то, что само оно весьма мало. (К тому же нами движет надежда получить возможность обобщения доказательства для 12 на произвольное m.) Сравнение, которое надо доказать, это

$$n^{12} + n^6 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n \equiv 0 \pmod{12}.$$

Ну и что? Согласно (4.42) это сравнение выполняется тогда и только тогда, когда оно выполняется по модулю 3 и по модулю 4. Поэтому вначале докажем, что оно выполняется по модулю 3. Сравнение (4.64) выполняется для простых чисел, так что $n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3$. Под пытливым взором выясняется, что данный факт можно использовать для группировки членов большей суммы:

$$\begin{aligned} &n^{12} + n^6 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n \\ &\qquad = (n^{12} + 2n^4) + (n^6 + 2n^2) + 2(n^3 + 2n) \\ &\qquad \equiv 0 + 0 + 2\cdot 0 \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

Итак, по модулю 3 это проходит.

Полдела сделано. Для доказательства сравнимости по модулю 4 воспользуемся тем же самым приемом. Уже доказано, что $n^4 + n^2 + 2n \equiv 0 \pmod 4$, поэтому воспользуемся этим обстоятельством для группировки членов сравнения

$$\begin{aligned} &n^{12} + n^6 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 4n \\ &\qquad = (n^{12} + n^6 + 2n^3) + 2(n^4 + n^2 + 2n) \\ &\qquad \equiv 0 + 2\cdot 0 \equiv 0 \pmod 4. \end{aligned}$$

ЧТД: *Чрезвычайно Тривиальное Дело.*

ЧТД для случая $m = 12$.

Пока наше сравнение доказано для простого m, для $m = 4$ и для $m = 12$. Теперь попробуем доказать его для степеней простого числа. Для конкретности можно предположить, что $m = p^3$ при некотором простом p. Тогда левая часть (4.64) есть

$$\begin{aligned} &n^{p^3} + \varphi(p)n^{p^2} + \varphi(p^2)n^p + \varphi(p^3)n \\ &\qquad = n^{p^3} + (p-1)n^{p^2} + (p^2 - p)n^p + (p^3 - p^2)n \\ &\qquad = (n^{p^3} - n^{p^2}) + p(n^{p^2} - n^p) + p^2(n^p - n) + p^3 n. \end{aligned}$$

Можно показать, что это сравнимо с 0 по модулю p^3, если мы сумеем доказать, что $n^{p^3} - n^{p^2}$ делится на p^3, что $n^{p^2} - n^p$ делится на p^2 и что $n^p - n$ делится на p,— ибо все это вместе будет тогда делиться на p^3. Согласно теореме Ферма в альтернативной формулировке имеем $n^p \equiv n \pmod p$, так что p делит $n^p - n$; следовательно, существует целое q, такое, что

$$n^p = n + pq.$$

Теперь возводим обе части в p-ю степень, разлагаем правую часть в соответствии с биномиальной теоремой (с которой познакомимся в гл. 5) и после перегруппировки членов получаем

$$\begin{aligned} n^{p^2} &= (n+pq)^p = n^p + (pq)^1 n^{p-1}\binom{p}{1} + (pq)^2 n^{p-2}\binom{p}{2} + \cdots \\ &= n^p + p^2 Q \end{aligned}$$

при некотором другом целом Q. Мы оказались в состоянии выделить множитель p^2 потому, что во втором слагаемом $\binom{p}{1} = p$, и потому, что множитель $(pq)^2$ присутствует во всех последующих членах. Итак, выяснили, что p^2 делит $n^{p^2} - n^p$.

Возведем еще раз обе части в p-ю степень, разложим в ряд и перегруппируем члены, получая

$$\begin{aligned} n^{p^3} &= (n^p + p^2 Q)^p \\ &= n^{p^2} + (p^2 Q)^1 n^{p(p-1)}\binom{p}{1} + (p^2 Q)^2 n^{p(p-2)}\binom{p}{2} + \cdots \\ &= n^{p^2} + p^3 \mathbf{Q} \end{aligned}$$

при еще одном целом $\mathbf{Q}$. Итак, p^3 делит $n^{p^3} - n^{p^2}$. Этим завершается доказательство для $m = p^3$, ибо показано, что p^3 делит левую часть (4.64).

Более того, можно доказать по индукции, что

$$n^{p^k} = n^{p^{k-1}} + p^k \Omega$$

при некотором последнем целом Ω (последнем потому, что мы исчерпали все способы начертания данной буквы); следовательно,

$$n^{p^k} \equiv n^{p^{k-1}} \pmod{p^k} \qquad \text{при } k > 0. \tag{4.65}$$

Таким образом, левая часть (4.64), которая равна

$$(n^{p^k} - n^{p^{k-1}}) + p(n^{p^{k-1}} - n^{p^{k-2}}) + \cdots + p^{k-1}(n^{p^{\bullet}} - n) + p^k n\,,$$

делится на p^k и тем самым сравнима с 0 по модулю p^k.

Уже почти все сделано. Теперь, когда сравнение (4.64) доказано для степеней простого числа, все, что осталось,— это доказать его для $m = m_1 m_2$, где $m_1 \perp m_2$, считая, что данное сравнение справедливо при m_1 и m_2. Рассмотрение случая $m = 12$, который распадался на отдельные случаи $m = 3$ и $m = 4$, дает основание надеяться, что такой подход будет оправдан.

Поскольку нам известно, что φ — мультипликативная функция, можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{d\backslash m} \varphi(d)\, n^{m/d} &= \sum_{d_1\backslash m_1,\, d_2\backslash m_2} \varphi(d_1 d_2)\, n^{m_1 m_2/d_1 d_2} \\ &= \sum_{d_1\backslash m_1} \varphi(d_1)\biggl(\sum_{d_2\backslash m_2} \varphi(d_2)(n^{m_1/d_1})^{m_2/d_2}\biggr). \end{aligned}$$

Но внутренняя сумма сравнима с 0 по модулю m_2, так как мы предположили, что (4.64) выполняется при m_2; следовательно, и вся сумма сравнима с 0 по модулю m_2. Из симметричных соображений выясняется, что вся сумма сравнима с 0 по модулю m_1. Таким образом, в силу (4.42) она сравнима с 0 по модулю m. ЧТД.

Упражнения

Разминочные упражнения

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."
— Л. Кронекер. (Добавл. перев.)

1 Каково наименьшее целое положительное число, имеющее ровно k делителей при $1 \leqslant k \leqslant 6$?

2 Докажите, что $\text{НОД}(m,n) \cdot \text{НОК}(m,n) = m \cdot n$, и воспользуйтесь этим тождеством, чтобы выразить $\text{НОК}(m,n)$ через $\text{НОК}(n \bmod m, m)$ при $n \bmod m \neq 0$. *Указание:* воспользуйтесь правилами (4.12), (4.14) и (4.15).

3 Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x. Докажите или опровергните, что

$$\pi(x) - \pi(x-1) = [x \text{ — простое число}]\,.$$

4 Что бы случилось, если бы построение Штерна—Броко начиналось с пяти дробей $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{0}{-1}, \frac{-1}{0}, \frac{0}{1}\right)$, а не с дробей $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$?

5 Укажите простые формулы для L^k и R^k, если L и R суть 2×2-матрицы из (4.33).

6 Что означает запись '$a \equiv b \pmod 0$'?

7 Десять человек, перенумерованных числами от 1 до 10, выстроены в круг, как в задаче Иосифа, и каждый m-й человек подвергается казни. (Величина m может быть значительно больше 10.) Докажите, что первыми тремя обреченными на уничтожение людьми не могут быть 10-й, k-й и $k+1$-й человек (именно в таком порядке) при любом k.

8 Система счисления в остатках $(x \bmod 3, x \bmod 5)$, рассмотренная в тексте, обладает тем забавным свойством, что числу 13 соответствует в ней пара чисел $(1,3)$, которая выглядит почти так же. Объясните, как установить все случаи подобного совпадения, не вычисляя все пятнадцать пар остатков. Другими словами, найдите все решения сравнений

$$10x + y \equiv x \pmod 3\,, \qquad 10x + y \equiv y \pmod 5\,.$$

Указание: воспользуйтесь теми фактами, что $10u + 6v \equiv u \pmod 3$ и $10u + 6v \equiv v \pmod 5$.

9 Покажите, что $(3^{77}-1)/2$ — нечетное составное число. *Указание:* чему равно $3^{77} \bmod 4$?

10 Вычислите $\varphi(999)$.

11 Найдите функцию $\sigma(n)$, обладающую тем свойством, что

$$g(n) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} f(k) \quad\Longleftrightarrow\quad f(n) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \sigma(k)\, g(n-k)\,.$$

(Это аналогично функции Мёбиуса: см. (4.56).)

12 Упростите формулу $\sum_{d\backslash m}\sum_{k\backslash d}\mu(k)\,g(d/k)$.

13 Целое положительное число n называется *свободным от квадратов*, если оно не делится на m^2 при любом $m > 1$. Установите необходимое и достаточное условие того, что число n свободно от квадратов:

a через представление (4.11) числа n в виде показателей простых;

b через функцию $\mu(n)$..

Обязательные упражнения

14 Докажите или опровергните следующие правила:

a $\text{НОД}(km, kn) = k\,\text{НОД}(m, n)$;

b $\text{НОК}(km, kn) = k\,\text{НОК}(m, n)$.

15 Встречается ли каждое простое число в качестве сомножителя некоторого числа Евклида e_n?

16 Чему равна сумма величин, обратных первым n числам Евклида?

17 Пусть f_n — „число Ферма“ $2^{2^n}+1$. Докажите, что $f_m \perp f_n$, если $m < n$.

18 Покажите, что если 2^n+1 — простое число, то n является степенью двойки.

19 Докажите следующие тождества при целом положительном n:

$$\sum_{1\leqslant k<n}\left\lfloor\frac{\varphi(k+1)}{k}\right\rfloor = \sum_{1<m\leqslant n}\left\lfloor\left(\sum_{1\leqslant k<m}\lfloor(m/k)/\lceil m/k\rceil\rfloor\right)^{-1}\right\rfloor$$
$$= n-1-\sum_{k=1}^{n}\left\lceil\left\{\frac{(k-1)!+1}{k}\right\}\right\rceil.$$

Внимание: вопрос несколько усложнен, но ответ нисколько не сложен.

20 При каждом целом положительном числе n найдется простое число p, такое, что $n < p \leqslant 2n$. (В сущности, это „постулат Бертрана“, справедливость которого в 1845 г. проверил Жозеф Бертран для $n < 3000000$, а в 1850 г. доказал П. Чебышёв для всех n.) Воспользуйтесь постулатом Бертрана для доказательства того, что существует постоянная $b \approx 1.25$, такая, что все числа

$$\lfloor 2^b\rfloor,\ \lfloor 2^{2^b}\rfloor,\ \lfloor 2^{2^{2^b}}\rfloor,\ \ldots$$

простые.

21 Пусть P_n — n-е простое число. Найдите постоянную K, такую, что

$$\lfloor (10^{n^2} K) \bmod 10^n \rfloor = P_n .$$

Это что, проверка на косоглазие?

22 Число 1111111111111111111 — простое. Докажите, что в системе счисления с любым основанием b число $(11\ldots1)_b$ может быть простым только тогда, когда число единиц — само простое число.

23 Установите рекуррентность для $\rho(k)$ — линеечной функции из того места в тексте, где обсуждалась величина $\epsilon_2(n!)$. Покажите, что существует определенная связь между $\rho(k)$ и тем диском, который перекладывался на k-м шаге $(1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1)$ при перемещении ханойской башни из n дисков за $2^n - 1$ перекладываний.

24 Выразите величину $\epsilon_p(n!)$ через функцию $\nu_p(n)$ — сумму цифр представления числа n в системе счисления с основанием p, обобщая тем самым формулу (4.24).

25 Будем говорить, что m *напросто делит* n, записывая это как $m\backslash\backslash n$, если $m\backslash n$ и $m \perp n/m$. Так, для рассмотренных в тексте факториальных делителей $p^{\epsilon_p(n!)}\backslash\backslash n!$. Докажите или опровергните следующие утверждения:

a $k\backslash\backslash n$ и $m\backslash\backslash n \iff km\backslash\backslash n$, если $k \perp m$.

b для всех $m, n > 0$; либо $\text{нод}(m,n)\backslash\backslash m$, либо $\text{нод}(m,n)\backslash\backslash n$.

26 Рассмотрим последовательность $\mathcal{G}_N$ всех неотрицательных несократимых дробей m/n, таких, что $mn \leqslant N$. Например,

$$\mathcal{G}_{10} = \tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{5}{1}, \tfrac{6}{1}, \tfrac{7}{1}, \tfrac{8}{1}, \tfrac{9}{1}, \tfrac{10}{1}.$$

Верно ли, что $m'n - mn' = 1$ всякий раз, когда дробь m/n непосредственно предшествует дроби m'/n' в $\mathcal{G}_N$?

27 Укажите простое правило сравнения рациональных чисел, основанное на их представлениях посредством символов L и R в системе счисления Штерна—Броко.

28 Представление Штерна—Броко числа π имеет вид

$$\pi = R^3L^7R^{15}LR^{292}LRLR^2LR^3LR^{14}L^2R\ldots ;$$

воспользуйтесь этим для нахождения всех простейших рациональных приближений к π, знаменатели которых меньше 50. Относится ли к ним $\frac{22}{7}$?

29 В тексте охарактеризовано соответствие между двоичными вещественными числами $x = (.b_1b_2b_3\ldots)_2$ из $[0, 1)$ и вещественными числами Штерна—Броко $\alpha = B_1B_2B_3\ldots$ из $[0, \infty)$. Если числу x соответствует число α и $x \neq 0$, то какое число соответствует числу $1 - x$?

30 Докажите следующее утверждение (китайскую теорему об остатках): пусть $m_1, \ldots, m_r$ — целые числа с $m_j \perp m_k$ при $1 \leqslant j < k \leqslant r$, пусть $m = m_1 \ldots m_r$ и $a_1, \ldots, a_r$, A — целые числа. Тогда существует ровно одно целое число a, такое, что

$$a \equiv a_k \pmod{m_k} \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant r \quad \text{и} \quad A \leqslant a < A + m\,.$$

31 Десятичное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Докажите это широко известное правило и обобщите его.

32 Докажите теорему Эйлера (4.50), обобщив доказательство теоремы Ферма (4.47).

Почему 'Euler' произносится „Эйлер", тогда как 'Euclid' произносится „Евклид"?

33 Покажите, что если $f(m)$ и $g(m)$ — мультипликативные функции, то такой же будет и функция $h(m) = \sum_{d\backslash m} f(d)\,g(m/d)$.

34 Докажите, что (4.56) является частным случаем (4.61).

Домашние задания

35 Пусть $I(m,n)$ — функция, которая удовлетворяет соотношению

$$I(m,n)m + I(n,m)n = \text{НОД}(m,n)\,,$$

если m и n — целые неотрицательные числа и $m \neq n$. Таким образом, $I(m,n) = m'$ и $I(n,m) = n'$ в соотношении (4.5); величина $I(m,n)$ — это *обращение* m относительно n. Установите рекуррентность, которая определяет величину $I(m,n)$.

36 Рассмотрим множество $Z(\sqrt{10}) = \{\, m + n\sqrt{10} \mid \text{целые } m, n \,\}$. Число $m + n\sqrt{10}$ называется *обратимым* (или *единицей*), если $m^2 - 10n^2 = \pm 1$, так как оно имеет некоторое обратное число (т. е. $(m + n\sqrt{10}\,) \cdot (\pm(m - n\sqrt{10}\,)) = 1$). К примеру, $3 + \sqrt{10}$ — обратимое число, так же как и число $19 - 6\sqrt{10}$. Пары взаимно сокращаемых обратимых чисел могут быть вставлены в любое разложение на множители, поэтому оставим их в покое. Необратимые числа множества $Z(\sqrt{10}\,)$ называются „простыми", если они не могут быть записаны в виде произведения двух необратимых. Покажите, что 2, 3 и $4 \pm \sqrt{10}$ являются „простыми" числами множества $Z(\sqrt{10}\,)$. *Указание:* если $2 = (k + l\sqrt{10}\,)(m + n\sqrt{10}\,)$, то $4 = (k^2 - 10l^2)(m^2 - 10n^2)$. Кроме того, квадрат любого целого числа по модулю 10 равен 0, 1, 4, 5, 6, или 9.

37 Докажите формулу (4.17). *Указание:* покажите, что $e_n - \frac{1}{2} = (e_{n-1} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, и рассмотрите числа $2^{-n}\log(e_n - \frac{1}{2})$.

38 Докажите, что если $a \perp b$ и $a > b$, то

$$\text{НОД}(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{\text{НОД}(m,n)} - b^{\text{НОД}(m,n)}\,, \quad 0 \leqslant m < n.$$

(Здесь все переменные — целые числа.) *Указание:* воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

39 Пусть $S(m)$ — наименьшее целое положительное число n, для которого существует возрастающая последовательность целых чисел

$$m = a_1 < a_2 < \cdots < a_t = n,$$

такая, что $a_1 a_2 \ldots a_t$ — полный квадрат. (Если само число m — полный квадрат, то можно положить $t = 1$ и $n = m$.) К примеру, $S(2) = 6$, ибо наилучшей из таких последовательностей является $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$. Имеем:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S(n)$	1	6	8	4	10	12	14	15	9	18	22	20

Докажите, что $S(m) \neq S(m')$ для любых $0 < m < m'$.

40 Если представление числа n в системе счисления с основанием p имеет вид $(a_m \ldots a_1 a_0)_p$, то докажите, что

$$n!/p^{\epsilon_p(n!)} \equiv (-1)^{\epsilon_p(n!)} a_m! \ldots a_1!\, a_0! \pmod p\,.$$

(Левая часть есть просто $n!$ с полностью удаленными множителями p. В случае $n = p$ это сводится к теореме Вильсона.)

41 **a** Покажите, что если $p \bmod 4 = 3$, то не существует целого числа n, такого, что p делит $n^2 + 1$. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Ферма.

b С другой стороны, покажите, что если $p \bmod 4 = 1$, то такое целое число существует. *Указание:* запишите $(p-1)!$ в виде $\left(\prod_{k=1}^{(p-1)/2} k(p-k)\right)$ и вспомните теорему Вильсона.

42 Рассмотрим две несократимые дроби m/n и m'/n'. Докажите, что если сумма $m/n + m'/n'$ приведена к несократимому виду, то ее знаменателем будет nn' тогда и только тогда, когда $n \perp n'$. (Другими словами, дробь $(mn' + m'n)/nn'$ сразу будет несократимой тогда и только тогда, когда n и n' не имеют общего множителя.)

43 На уровне k дерева Штерна—Броко имеется 2^k узлов, соответствующих последовательности матриц L^k, $L^{k-1}R$, …, R^k. Покажите, что эту последовательность можно получить, начав с матрицы L^k и затем последовательно умножая на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\rho(n)+1 \end{pmatrix}$$

при $1 \leqslant n < 2^k$, где $\rho(n)$ — линеечная функция.

Радиокомментатор: „… Питчер Марк Лешифр дошел до второй базы! У Марка, с коэффициентом бэттера лишь .080, это второй удачный удар в этом сезоне.“ Что-нибудь не так?

44 Докажите, что бейсболист, коэффициент бэттера у которого равен .316, должен был отбить мяч по меньшей мере 19 раз. (Если у него было m удачных ударов за n раз, когда он выходил на биту, то $m/n \in [0.3155, 0.3165)$.)

45 Число 9376 обладает своеобразным свойством самовоспроизводимости, как то:

$$9376^2 = 87909376 .$$

Сколько четырехзначных чисел x удовлетворяют уравнению $x^2 \bmod 10000 = x$? Сколько n-значных чисел x удовлетворяют уравнению $x^2 \bmod 10^n = x$?

46 **a** Докажите, что если $n^j \equiv 1$ и $n^k \equiv 1 \pmod m$, то $n^{\text{НОД}(j,k)} \equiv 1$.
b Покажите, что $2^n \not\equiv 1 \pmod n$, если $n > 1$. *Указание:* рассмотрите наименьший простой множитель в разложении n.

47 Покажите, что если $n^{m-1} \equiv 1 \pmod m$ и если $n^{(m-1)/p} \not\equiv 1 \pmod m$ для любого простого числа p, такого, что $p \backslash (m-1)$, то число m — простое. *Указание:* покажите, что если это условие выполняется, то при $1 \leqslant k < m$ все числа $n^k \bmod m$ различны.

48 Обобщите теорему Вильсона (4.49), установив величину выражения $\left(\prod_{1 \leqslant n < m,\, n \perp m} n\right) \bmod m$ при $m > 1$.

49 Пусть $R(N)$ — количество пар (m, n) целых чисел, таких, что $1 \leqslant m < N$, $1 \leqslant n < N$ и $m \perp n$.
a Выразите $R(N)$ через Φ-функцию.
b Докажите, что $R(N) = \sum_{d \geqslant N} \lfloor N/d \rfloor^2 \mu(d)$.

50 Пусть m — некоторое целое положительное число и

$$\omega = e^{2\pi i/m} = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m) .$$

Говорят, что ω является *корнем из единицы* степени m, так как $\omega^m = e^{2\pi i} = 1$. На самом деле, каждое из m комплексных чисел $\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{m-1}$ является корнем m-й степени из единицы, поскольку $(\omega^k)^m = e^{2\pi k i} = 1$; следовательно, $z - \omega^k$ — один из сомножителей многочлена $z^m - 1$ при $0 \leqslant k < m$. Поскольку эти сомножители различны, то полное разложение многочлена $z^m - 1$ над полем комплексных чисел должно быть таким:

А что такое корни из раз-ницы?

$$z^m - 1 = \prod_{0 \leqslant k < m} (z - \omega^k) .$$

a Пусть $\Psi_m(z) = \prod_{0 \leqslant k < m,\, k \perp m} (z - \omega^k)$. (Этот многочлен степени $\varphi(m)$ называется *круговым многочленом порядка* m.) Докажите, что

$$z^m - 1 = \prod_{d \backslash m} \Psi_d(z) .$$

b Докажите, что $\Psi_m(z) = \prod_{d \backslash m} (z^d - 1)^{\mu(m/d)}$.

Контрольные работы

51 Докажите теорему Ферма (4.48), разлагая $(1+1+\cdots+1)^p$ посредством мультиномиальной теоремы.

52 Пусть n и x — целые положительные числа, такие, что x не имеет делителей $\leqslant n$ (исключая 1), и пусть p — некоторое простое число. Докажите, что по меньшей мере $\lfloor n/p \rfloor$ чисел $\{x-1, x^2-1, \ldots, x^{n-1}-1\}$ кратны p.

53 Укажите все целые положительные числа n, такие, что $n \backslash \lfloor (n-1)!/(n+1) \rfloor$.

54 Вычислите „вручную" величину $1000! \bmod 10^{250}$.

55 Пусть P_n — произведение первых n факториалов, $\prod_{k=1}^{n} k!$. Докажите, что при любом целом положительном n отношение P_{2n}/P_n^4 является целым числом.

56 Покажите, что величина

$$\left(\prod_{k=1}^{2n-1} k^{\min(k,\,2n-k)}\right) \bigg/ \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)^{2n-2k-1}\right)$$

является степенью 2.

57 Пусть $S(m,n)$ — множество всех целых чисел k, таких, что

$$m \bmod k + n \bmod k \geqslant k\,.$$

К примеру, $S(7,9) = \{2,4,5,8,10,11,12,13,14,15,16\}$. Докажите, что

$$\sum_{k \in S(m,n)} \varphi(k) = mn\,.$$

Указание: вначале докажите, что сумма $\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{d \backslash m} \varphi(d) = \sum_{d \geqslant 1} \varphi(d) \lfloor n/d \rfloor$. Затем рассмотрите разность $\lfloor (m+n)/d \rfloor - \lfloor m/d \rfloor - \lfloor n/d \rfloor$.

58 Пусть $f(m) = \sum_{d \backslash m} d$. Укажите необходимое и достаточное условие того, что $f(m)$ является степенью 2.

Конкурсные задачи

59 Докажите, что если $x_1, \ldots, x_n$ — целые положительные числа и $1/x_1 + \cdots + 1/x_n = 1$, то $\max(x_1, \ldots, x_n) < e_n$. *Указание:* докажите по индукции следующий более сильный результат: „Если $1/x_1 + \cdots + 1/x_n + 1/\alpha = 1$, где $x_1, \ldots, x_n$ — целые положительные числа и α — рациональное число $\geqslant \max(x_1, \ldots, x_n)$, то $\alpha + 1 \leqslant e_{n+1}$ и $x_1 \ldots x_n(\alpha+1) \leqslant e_1 \ldots e_n e_{n+1}$." (Доказательство этого нетривиально.)

60 Докажите, что существует постоянная P, такая, что формула (4.18) доставляет только простые числа. Можно воспользоваться следующим (в высшей степени нетривиальным) фактом: при любом достаточно большом p между p и $p+p^\theta$ имеется простое число, если $\theta > \frac{6}{11}$.

61 Докажите, что если m/n, m'/n' и m''/n'' — последовательные элементы последовательности $\mathcal{F}_N$, то

$$m'' = \lfloor (n+N)/n' \rfloor m' - m\,,$$
$$n'' = \lfloor (n+N)/n' \rfloor n' - n\,.$$

(Эта рекуррентность позволяет вычислить все элементы $\mathcal{F}_N$ по порядку, начиная с $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{N}$.)

62 Какое двоичное число соответствует числу e, исходя из соответствия „двоичная система $\leftrightarrow$ система Штерна—Броко“? (Выразите ваш ответ в виде бесконечной суммы, вычислять ее в замкнутой форме не нужно.)

63 Покажите, используя только методы из этой главы, что если ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА — утверждение (4.46) — неверна, то наименьшее n, которое ее опровергает, является простым числом. (Можно считать, что утверждение (4.46) справедливо, когда $n = 4$.) Кроме того, если $a^p + b^p = c^p$ — наименьший контрпример, покажите, что существует целое число m, такое, что

$$a + b = \begin{cases} m^p, & \text{если } p\nmid c, \\ p^{p-1}m^p, & \text{если } p\backslash c. \end{cases}$$

Таким образом, число $c \geqslant m^p/2$ должно быть поистине гигантским. *Указание:* положите $x = a + b$ и заметьте, что $\text{НОД}\bigl(x, (a^p + (x-a)^p)/x\bigr) = \text{НОД}(x, pa^{p-1})$.

64 *Последовательность Пирса* $\mathcal{P}_N$ *порядка* N — это разделенная знаками '<' или '=' бесконечная строка дробей, состоящая из всех неотрицательных дробей m/n с $m \geqslant 0$ и $n \leqslant N$ (включая несокращенные дроби). Она определяется рекурсивно, начиная с последовательности

$$\mathcal{P}_1 = \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{1} < \tfrac{2}{1} < \tfrac{3}{1} < \tfrac{4}{1} < \tfrac{5}{1} < \tfrac{6}{1} < \tfrac{7}{1} < \tfrac{8}{1} < \tfrac{9}{1} < \tfrac{10}{1} < \cdots .$$

При $N \geqslant 1$ последовательность $\mathcal{P}_{N+1}$ образуется путем вставки двух символов непосредственно перед kN-м символом последовательности $\mathcal{P}_N$ при всех $k > 0$. Вставляемые символы суть

$$\frac{k-1}{N+1} \quad =, \qquad \text{если } kN \text{ нечетно;}$$
$$\mathcal{P}_{N,kN} \quad \frac{k-1}{N+1}, \qquad \text{если } kN \text{ четно.}$$

Здесь $\mathcal{P}_{N,j}$ обозначает j-й символ последовательности $\mathcal{P}_N$, которым будет либо знак '$<$' либо знак '$=$', если j четно, либо это будет некоторая дробь, если j нечетно. Так,

$$\mathcal{P}_2=\tfrac{0}{2}=\tfrac{0}{1}<\tfrac{1}{2}<\tfrac{2}{2}=\tfrac{1}{1}<\tfrac{3}{2}<\tfrac{4}{2}=\tfrac{2}{1}<\tfrac{5}{2}<\tfrac{6}{2}=\tfrac{3}{1}<\tfrac{7}{2}<\tfrac{8}{2}=\tfrac{4}{1}<\tfrac{9}{2}<\tfrac{10}{2}=\tfrac{5}{1}<\cdots;$$
$$\mathcal{P}_3=\tfrac{0}{2}=\tfrac{0}{3}=\tfrac{0}{1}<\tfrac{1}{3}<\tfrac{1}{2}<\tfrac{2}{3}<\tfrac{2}{2}=\tfrac{3}{3}=\tfrac{1}{1}<\tfrac{4}{3}<\tfrac{3}{2}<\tfrac{5}{3}<\tfrac{4}{2}=\tfrac{6}{3}=\tfrac{2}{1}<\tfrac{7}{3}<\tfrac{5}{2}<\cdots;$$
$$\mathcal{P}_4=\tfrac{0}{2}=\tfrac{0}{4}=\tfrac{0}{3}=\tfrac{0}{1}<\tfrac{1}{4}<\tfrac{1}{3}<\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{2}<\tfrac{2}{3}<\tfrac{3}{4}<\tfrac{2}{2}=\tfrac{4}{4}=\tfrac{3}{3}=\tfrac{1}{1}<\tfrac{5}{4}<\tfrac{4}{3}<\tfrac{6}{4}=\cdots;$$
$$\mathcal{P}_5=\tfrac{0}{2}=\tfrac{0}{4}=\tfrac{0}{5}=\tfrac{0}{3}=\tfrac{0}{1}<\tfrac{1}{5}<\tfrac{1}{4}<\tfrac{1}{3}<\tfrac{2}{5}<\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{2}<\tfrac{2}{5}<\tfrac{2}{3}<\tfrac{3}{4}<\tfrac{4}{5}<\tfrac{2}{2}=\tfrac{4}{4}=\cdots;$$
$$\mathcal{P}_6=\tfrac{0}{2}=\tfrac{0}{4}=\tfrac{0}{6}=\tfrac{0}{5}=\tfrac{0}{3}=\tfrac{0}{1}<\tfrac{1}{6}<\tfrac{1}{5}<\tfrac{1}{4}<\tfrac{2}{6}=\tfrac{1}{3}<\tfrac{2}{5}<\tfrac{2}{4}=\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}<\tfrac{3}{5}<\tfrac{4}{6}=\cdots.$$

(Одинаковые элементы выстраиваются в довольно своеобразном порядке). Докажите, что знаки '$<$' и '$=$', определенные по указанному правилу, корректно описывают отношения между соседними дробями в последовательности Пирса.

Исследовательские проблемы

65 Все ли числа Евклида e_n являются числами, свободными от квадратов?

66 Все ли числа Мерсенна $2^p - 1$ являются числами, свободными от квадратов?

67 Докажите или опровергните, что $\max_{1\leqslant j<k\leqslant n} a_k/\text{НОД}(a_j, a_k) \geqslant n$ для любой последовательности целых чисел $0 < a_1 < \cdots < a_n$.

68 Существует ли постоянная Q, такая, что число $\lfloor Q^{2^n} \rfloor$ является простым при любом $n \geqslant 0$?

69 Пусть P_n обозначает n-е простое число. Докажите или опровергните, что $P_{n+1} - P_n = O(\log P_n)^2$.

70 Будет ли $\epsilon_3(n!) = \epsilon_2(n!)/2$ для бесконечно многих n?

71 Докажите или опровергните: если $k \neq 1$, то найдется $n > 1$, такое, что $2^n \equiv k \pmod n$. Существует ли бесконечно много таких n?

72 Докажите или опровергните: при любом целом числе a существует бесконечно много n, таких, что $\varphi(n)\backslash(n+a)$.

73 Если бы $\Phi(n) + 1$ членов последовательности Фарея

$$\mathcal{F}_n = \big\langle \mathcal{F}_n(0), \mathcal{F}_n(1), \ldots, \mathcal{F}_n\big(\Phi(n)\big)\big\rangle$$

были распределены достаточно равномерно, то надо бы ожидать, что $\mathcal{F}_n(k) \approx k/\Phi(n)$. Следовательно, сумма $D(n) = \sum_{k=0}^{\Phi(n)} \big|\mathcal{F}_n(k) - k/\Phi(n)\big|$ служит мерой „отклонения $\mathcal{F}_n$ от равномерности". Верно ли, что $D(n) = O(n^{1/2+\epsilon})$ при любом $\epsilon > 0$?

„In re arithmetica ars proponendi questionem pluris facienda est quam solnendi."
— Г. Кантор
(Добавл. перев.)

74 Приблизительно сколько различных величин содержится в множестве $\{0! \bmod p, 1! \bmod p, \ldots, (p-1)! \bmod p\}$ при $p \to \infty$?

5

Биномиальные коэффициенты

ПЕРЕВЕДЕМ ДУХ. В предыдущих главах нам порой приходилось нелегко с суммами, включавшими в себя пол-, потолок-, mod-, фи- и мю-функции. А сейчас нам придется заняться биномиальными коэффициентами, которые оказываются (a) более важными в приложениях и (b) более удобными в обращении, чем все отмеченные величины.

Удачи!

5.1 ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Символ $\binom{n}{k}$ — это биномиальный коэффициент, своим названием обязанный биномиальной теореме — важному соотношению, которое мы рассмотрим позже в этом разделе. А читается этот символ как выбор „k из n". Подобное заклинание проистекает из его комбинаторной интерпретации — это число способов выбора k-элементного подмножества из n-элементного множества. Скажем, два элемента из множества $\{1,2,3,4\}$ можно выбрать шестью способами,

Иначе известные как k-членные комбинации из n членов без повторения.

$$\{1,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{1,4\}, \quad \{2,3\}, \quad \{2,4\}, \quad \{3,4\},$$

так что $\binom{4}{2} = 6$.

Для того чтобы выразить величину $\binom{n}{k}$ в более привычных терминах, удобнее всего вначале установить не число подмножеств, а число k-элементных *последовательностей*, выбранных из n-элементного множества; в последовательностях учитывается порядок элементов. Воспользуемся тем же соображением, которым мы пользовались в гл. 4, доказывая, что $n!$ — это число перестановок из n объектов. Существует n вариантов выбора первого элемента последовательности, для каждого из них существует $n-1$ вариантов выбора второго элемента и т. д., вплоть до $n-k+1$ вариантов выбора k-го элемента, что дает в итоге $n(n-1)\ldots(n-k+1) = n^{\underline{k}}$ вариантов выбора. А поскольку каждое k-элементное подмножество может быть упорядочено $k!$ различными способами, это число *последовательностей* учитывает каждое *подмножество* ровно $k!$ раз. Чтобы получить

требуемое, мы просто делим на k!:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots(1)}\,.$$

Так,

$$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6\,,$$

что согласуется с нашим предыдущим перечислением.

Назовем n *верхним индексом*, а k — *нижним индексом*. В соответствии с их комбинаторной интерпретацией эти индексы ограничены неотрицательными целыми числами, так как множества не могут иметь отрицательное или дробное число элементов. Однако биномиальные коэффициенты полезны не только своей комбинаторной трактовкой, а посему от некоторых ограничений будем избавляться. Оказывается, что полезнее всего считать верхний индекс произвольным вещественным (или даже комплексным) числом, а нижний — произвольным целым числом. Соответственно, наше формальное определение принимает следующий вид:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k(k-1)\ldots(1)} = \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!}\,, & \text{целое } k \geqslant 0, \\ 0\,, & \text{целое } k < 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Это определение обладает рядом заслуживающих внимания особенностей. Во-первых, верхний индекс обозначен через r, а не через n — буква r подчеркивает, что биномиальные коэффициенты сохраняют смысл и тогда, когда в этом месте оказывается любое вещественное число. Так, $\binom{-1}{3} = (-1)(-2)(-3)/(3\cdot 2\cdot 1) = -1$. Несмотря на отсутствие комбинаторного смысла, случай $r = -1$ оказывается одним из важнейших частных случаев. Некоторые нецелые индексы, типа $r = -1/2$, также оказываются полезными.

Во-вторых, $\binom{r}{k}$ можно рассматривать как многочлен k-й степени относительно r. Мы увидим, что такая точка зрения часто бывает плодотворной.

В-третьих, мы оставили неопределенными биномиальные коэффициенты при нецелых нижних индексах. Можно дать приемлемое определение и в этом случае, но на практике такие коэффициенты редко бывают нужны, поэтому мы отложим подобное обобщение и займемся им позднее в этой главе.

И последнее. В правой части нашего определения приведены ограничения ‘целое $k \geqslant 0$’ и ‘целое $k < 0$’. Подобные ограничения будут приводиться во всех рассматриваемых соотношениях с тем, чтобы была ясна область их применимости. Вообще-то, чем меньше ограничений, тем лучше: самое лучшее — соотношение без ограничений; но уж если они присутствуют, то составляют

важную часть соотношения. При манипуляциях с биномиальными коэффициентами проще на некоторое время забыть о трудных для запоминания ограничениях, а затем проверить, не были ли они нарушены. Но о проверке забывать нельзя.

Так, практически всякий раз, когда мы сталкиваемся с коэффициентом $\binom{n}{n}$, он оказывается равным 1, а потому можно впасть в заблуждение, что он всегда равен 1. Но внимательное рассмотрение определения (5.1) показывает, что $\binom{n}{n}$ равен 1 только при $n \geqslant 0$ (при условии, что n целое); если же $n < 0$, то $\binom{n}{n} = 0$. И такие ловушки могут (и будут) подстерегать нас на каждом шагу.

Прежде чем приступить к тождествам, которыми мы будем пользоваться для укрощения строптивых биномиальных коэффициентов, бросим взгляд на несколько их начальных значений. Числа в табл. 180 образуют начало *треугольника Паскаля*, названного так по имени Блеза Паскаля (1623–1662), написавшего о них основополагающий трактат [233]. Пустые места в этой таблице на самом деле означают 0 из-за нуля в числителе (5.1); к примеру, $\binom{1}{2} = (1 \cdot 0)/(2 \cdot 1) = 0$. Эти места оставлены пустыми просто для того, чтобы выделить остальную часть таблицы.

Таблица 180 Треугольник Паскаля

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Биномиальные коэффициенты были хорошо известны в Азии за много веков до того, как Паскаль родился [361], но он никоим образом не мог знать об этом.

Не мешает запомнить формулы для первых трех колонок:

$$\binom{r}{0} = 1, \qquad \binom{r}{1} = r, \qquad \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}; \qquad (5.2)$$

они справедливы при любом вещественном r. (Вспомните, что $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$ — это формула для треугольных чисел, которую мы вывели в гл. 1; эти числа сразу же бросаются в глаза в колонке $\binom{n}{2}$ табл. 180.) Неплохо также запомнить около пяти первых рядов треугольника Паскаля: если в какой-нибудь задаче встретится набор чисел 1, 4, 6, 4, 1, то мы можем предположить, что где-то поблизости притаились биномиальные коэффициенты.

В Италии он называется треугольником Тартальи.

(А сам Паскаль называл его triangle arithmétique — арифметическим треугольником. — Перев.)

„C'est une chose éstrange combien il est fertile en proprietez." — Б. Паскаль [233]

Числа в треугольнике Паскаля удовлетворяют практически бесконечному числу тождеств, так что неудивительно, если при его внимательном рассмотрении мы обнаружим ряд удивительных закономерностей. Вот, например, любопытное „свойство шестиугольника", которое иллюстрируется шестью числами 56, 28, 36, 120, 210, 126, окружающими число 84 в нижней правой части табл. 180. Два варианта перемножения чисел из этого шестиугольника через одно дают одинаковый результат: $56 \cdot 36 \cdot 210 = 28 \cdot 120 \cdot 126 = 423360$. То же самое справедливо, если выделить подобный шестиугольник из любой другой части треугольника Паскаля.

А теперь — собственно тождества. Наша цель в этом разделе — выучить сравнительно небольшое число простых правил, с помощью которых можно решать подавляющее большинство практически важных задач с биномиальными коэффициентами.

В обычном случае, когда верхним индексом r является некоторое целое n, большее или равное нижнему индексу k, определению (5.1) может быть придана иная форма — в виде факториалов:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad \text{целые } n \geqslant k \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Для того чтобы получить эту формулу, просто умножаем числитель и знаменатель (5.1) на $(n-k)!$. Порой бывает полезно выразить биномиальный коэффициент в подобной факториальной форме (скажем, при доказательстве „свойства шестиугольника"). Но зачастую приходится действовать в обратном направлении, заменяя факториалы биномиальными коэффициентами.

Факториальное представление указывает на симметричность треугольника Паскаля: каждый ряд читается одинаково — как слева направо, так и справа налево. Тождество, отражающее это свойство,— *соотношение симметрии* — получается заменой k на $n-k$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0, \text{ целое } k. \tag{5.4}$$

Эта формула имеет комбинаторный смысл, ибо определяя k предметов, выбранных из n, мы тем самым определяем $n-k$ невыбранных предметов.

Ясно, почему n и k в тождестве (5.4) ограничены целыми числами — потому что всякий нижний индекс должен быть целым числом. Но почему n не может быть отрицательным? К примеру, предположим, что $n = -1$. Верно ли равенство

$$\binom{-1}{k} \stackrel{?}{=} \binom{-1}{-1-k}?$$

Увы. В частности, при $k = 0$ в левой части получается 1, а в правой — 0. На самом деле при всяком целом $k \geqslant 0$ левая часть

равна

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\ldots(-k)}{k!} = (-1)^k,$$

т. е. либо 1, либо -1, но правая часть равна 0, так как нижний индекс отрицателен. А при отрицательном k левая часть равна 0, но правая часть равна

$$\binom{-1}{-1-k} = (-1)^{-1-k},$$

т. е. либо 1, либо -1. Так что равенство '$\binom{-1}{k} = \binom{-1}{-1-k}$' всегда неверно!

Соотношение симметрии не выполняется и при прочих отрицательных целых n. Но, к сожалению, это ограничение легко забывается, поскольку выражение в верхнем индексе порой бывает отрицательным лишь при некоторых малозаметных (но существующих) значениях его переменных. Всякий, кто много раз имел дело с биномиальными коэффициентами, попадался в эту ловушку не менее трех раз.

Ну, я-то надеюсь не попасть в эту ловушку на коллоквиуме.

Однако этот недостаток соотношения симметрии компенсируется существенным его достоинством: оно выполняется при всех значениях k, даже когда $k < 0$ или $k > n$ (ибо в таких случаях обе части равны нулю). В случае же, когда $0 \leqslant k \leqslant n$, симметрия немедленно следует из (5.3):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!\;(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Следующее важное тождество допускает вынесение и внесение из/под знака биномиального коэффициента:

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, \qquad \text{целое } k \neq 0. \tag{5.5}$$

Данное ограничение на k предохраняет нас от деления на нуль. Назовем тождество (5.5) правилом *внесения*, поскольку, как правило, мы пользуемся им для внесения под знак биномиального коэффициента некоторой мешающей переменной. Это равенство вытекает из определения (5.1), так как $r^{\underline{k}} = r(r-1)^{\underline{k-1}}$ и $k! = k(k-1)!$ при $k > 0$, а при $k < 0$ обе части равны нулю.

Если умножить обе части (5.5) на k, то получим правило внесения, которое выполняется даже при $k = 0$:

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}, \qquad \text{целое } k. \tag{5.6}$$

У этого соотношения есть компаньон, который сохраняет нижний индекс в неприкосновенности:

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}, \qquad \text{целое } k. \tag{5.7}$$

Тождество (5.7) можно вывести, приготовив сэндвич из двух соотношений симметрии и одного правила внесения между ними:

$$\begin{aligned}(r-k)\binom{r}{k} &= (r-k)\binom{r}{r-k} && \text{(в силу симметрии)}\\ &= r\binom{r-1}{r-k-1} && \text{(в силу (5.6))}\\ &= r\binom{r-1}{k}. && \text{(в силу симметрии)}\end{aligned}$$

Но постойте-ка! Мы уже объявили, что данное тождество справедливо при *любом* вещественном r, а ведь проведенный вывод справедлив, только когда r — целое положительное число. (Если мы не собираемся использовать условие симметрии (5.4) себе во вред, то верхний индекс $r-1$ должен быть целым неотрицательным числом.) Может, мы смошенничали? Вовсе нет. Да, это верно, что данный вывод справедлив при целом положительном r, и, тем не менее, можно утверждать, что данное тождество выполняется при всех значениях r в силу того, что обе части (5.7) являются многочленами степени $k+1$ относительно r. Ненулевой многочлен степени d или меньшей может иметь самое большее d различных нулей — следовательно, разность двух таких многочленов, которая также является многочленом степени d или меньшей, не может обращаться в нуль более чем в d точках, если только она не равна тождественно нулю. Иначе говоря, если два многочлена степени $\leqslant d$ совпадают более чем в d точках, то они совпадают во всех точках. Нами показано, что $(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}$ является тождеством всякий раз, когда r — целое положительное число, так что эти два многочлена совпадают в бесконечном числе точек, а значит, тождественно равны.

(Ну, не здесь, так в другом месте.)

Способ доказательства из предыдущего абзаца, который мы будем называть *полиномиальной аргументацией*, полезен при перенесении многих соотношений, справедливых для целых чисел, на вещественные числа — мы неоднократно это увидим. Некоторые равенства, типа соотношения симметрии (5.4), не являются тождествами для многочленов, так что мы не всегда сможем применять этот способ. Тем не менее, многие соотношения имеют нужный вид.

Вот, к примеру, еще одно полиномиальное тождество — возможно, самое важное из всех биномиальных тождеств — известное как *формула сложения*:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, \qquad \text{целое } k. \tag{5.8}$$

Если r — целое положительное число, то формула сложения показывает, что каждое число в треугольнике Паскаля есть сумма двух чисел предыдущего ряда — того, что непосредственно над

ним, и того, что рядом слева от него. Эта формула применима также при отрицательном, вещественном или комплексном r с единственным ограничением, чтобы k было целым (с тем, чтобы биномиальные коэффициенты были определены).

Один из способов доказать формулу сложения — предположить, что r — целое положительное число, и воспользоваться комбинаторными соображениями. Вспомним, что $\binom{r}{k}$ — это число всевозможных k-элементных подмножеств, выбранных из r-элементного множества. Если у нас r яиц, среди которых одно тухлое, то имеется $\binom{r}{k}$ способов выбора k яиц. Ровно в $\binom{r-1}{k}$ случаях результатом этих выборов будут только свежие яйца, а в $\binom{r-1}{k-1}$ случаях среди них окажется тухлое яйцо, ибо результатом таких выборов будет $k-1$ из $r-1$ свежих яиц. Складывая два этих числа, получаем (5.8). В этом выводе предполагается, что r — целое положительное число и что $k \geqslant 0$. При $k < 0$ обе части данного тождества равны нулю, а во всех остальных случаях справедливость тождества (5.8) устанавливается путем полиномиальной аргументации.

Тождество (5.8) можно также вывести, складывая два правила внесения-вынесения (5.7) и (5.6):

$$(r-k)\binom{r}{k} + k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k} + r\binom{r-1}{k-1};$$

левая часть — это $r\binom{r}{k}$, следовательно, можно разделить обе части на r. Этот вывод справедлив при всех r за исключением случая $r = 0$, который легко проверить отдельно.

Те из нас, кто не склонен отыскивать столь тонкие доказательства, или те, кому это, напротив, надоело, могли бы предпочесть вывести (5.8) путем непосредственного манипулирования с исходным определением. Если $k > 0$, то

$$\begin{aligned}\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} &= \frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!}\\ &= \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}\,(r-k)}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}\,k}{k!}\\ &= \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}\,r}{k!} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \binom{r}{k}.\end{aligned}$$

И опять случаи при $k \leqslant 0$ легко проверить отдельно.

Мы только что познакомились с тремя весьма различными доказательствами формулы сложения. И это не удивительно: биномиальные коэффициенты обладают большим разнообразием свойств, различие которых обязано приводить к различным доказательствам интересующего нас соотношения.

В сущности, формула сложения — это рекуррентность для чисел из треугольника Паскаля, и мы еще увидим, что она особенно полезна при доказательстве других тождеств по индукции.

А можно и немедленно получить новое тождество, развертывая данную рекуррентность. Так,

$$\begin{aligned}\binom{5}{3} &= \binom{4}{3} + \binom{4}{2}\\ &= \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\\ &= \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0}\\ &= \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0} + \binom{1}{-1}.\end{aligned}$$

Поскольку $\binom{1}{-1} = 0$, последний член пропадает и можно остановиться. Этот метод дает общую формулу:

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant n}\binom{r+k}{k} &= \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+n}{n}\\ &= \binom{r+n+1}{n}, \qquad \text{целое } n. \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Обратите внимание, что нет необходимости ограничивать индекс суммирования снизу, поскольку все члены суммы при $k < 0$ равны нулю.

Эта формула выражает один биномиальный коэффициент в виде суммы других, верхний и нижний индексы которых остаются „равноудаленными“. Мы нашли ее путем последовательного разложения биномиальных коэффициентов с наименьшим нижним индексом: вначале коэффициента $\binom{5}{3}$, затем коэффициента $\binom{4}{2}$, потом коэффициента $\binom{3}{1}$ и, наконец, коэффициента $\binom{2}{0}$. А что случится, если развернуть другим способом — последовательно разлагая коэффициенты с наибольшим нижним индексом? Посмотрим:

$$\begin{aligned}\binom{5}{3} &= \binom{4}{3} + \binom{4}{2}\\ &= \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}\\ &= \binom{2}{3} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}\\ &= \binom{1}{3} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}\\ &= \binom{0}{3} + \binom{0}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}.\end{aligned}$$

Теперь коэффициент $\binom{0}{3}$ равен нулю (так же, как $\binom{0}{2}$ и $\binom{1}{2}$, хотя они и придают данному соотношению некоторую привлекательность), и можно уловить общую закономерность:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{m} = \binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\cdots+\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \qquad \text{целые } m,n \geqslant 0. \tag{5.10}$$

Это тождество, которое мы назовем *формулой суммирования по верхнему индексу*, выражает один биномиальный коэффициент в виде суммы других, нижние индексы которых не изменяются. В данном случае сумма нуждается в нижней границе $k \geqslant 0$, так как члены суммы с $k < 0$ *не* нули. К тому же m и n вообще не могут быть отрицательными.

Тождество (5.10) допускает интересную комбинаторную трактовку. Если нужно выбрать $m+1$ из $n+1$ билетов, пронумерованных числами от 0 до n, то это можно сделать $\binom{k}{m}$ способами, если наибольший номер выбранного билета равен k.

Как соотношение (5.9), так и соотношение (5.10) можно доказать по индукции, используя формулу сложения, но можно также получить одно соотношение из другого. Давайте, например, получим (5.9) из (5.10): доказательство послужит иллюстрацией некоторых стандартных операций с биномиальными коэффициентами. В общих чертах план действия таков: сначала преобразовать левую часть $\sum\binom{r+k}{k}$ соотношения (5.9) таким образом, чтобы она выглядела как левая часть $\sum\binom{k}{m}$ соотношения (5.10); затем прибегнуть к помощи последнего соотношения, заменив всю сумму одним-единственным биномиальным коэффициентом; наконец, привести этот коэффициент к виду правой части (5.9).

Для удобства предположим, что r и n — целые неотрицательные числа; в общем случае соотношение (5.9) будет получаться из этого частного случая в соответствии с полиномиальной аргументацией. Условимся писать m вместо r потому, что эта переменная больше напоминает целое неотрицательно число. Теперь можно приступить к систематическому воплощению нашего плана:

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant n}\binom{m+k}{k} &= \sum_{-m\leqslant k\leqslant n}\binom{m+k}{k}\\ &= \sum_{-m\leqslant k\leqslant n}\binom{m+k}{m} = \sum_{0\leqslant k\leqslant m+n}\binom{k}{m}\\ &= \binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n+1}{n}.\end{aligned}$$

Шаг за шагом проследим за этим выводом. Решающий шаг сделан во второй строке, где мы применяем правило симметрии (5.4),

чтобы заменить $\binom{m+k}{k}$ на $\binom{m+k}{m}$. А это можно сделать только при $m+k \geqslant 0$, так что первый шаг ограничивает область изменения k, отбрасывая члены суммы с $k < -m$ (что законно, поскольку отброшенные члены равны нулю). Теперь мы почти готовы применить (5.10): третья строчка готовит почву для этого, заменяя k на $k-m$ и приводя в порядок диапазон суммирования. Этот шаг, подобно первому,— просто заигрывание с $\sum$-обозначением. Но теперь k собственной персоной появляется в верхнем индексе, да и пределы суммирования приведены в надлежащий вид, так что в четвертой строчке применяется (5.10). В завершение всего еще раз используется правило симметрии.

Некоторые суммы, с которыми мы имели дело в гл. 1 и 2, на самом деле являются либо частными случаями соотношения (5.10), либо скрытыми вариантами этого соотношения. К примеру, случай $m=1$ доставляет сумму неотрицательных целых чисел до n включительно:

$$\binom{0}{1}+\binom{1}{1}+\cdots+\binom{n}{1} = 0+1+\cdots+n = \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

А общий случай эквивалентен правилу

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^{\underline{m}} = \frac{(n+1)^{\underline{m+1}}}{m+1}, \qquad \text{целые } m,n \geqslant 0,$$

из гл. 2, если разделить обе части этой формулы на $m!$. И в самом деле, формула сложения (5.8) указывает, что

$$\Delta\left(\binom{x}{m}\right) = \binom{x+1}{m} - \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1},$$

если заменить r и k соответственно на $x+1$ и m. Следовательно, методы из гл. 2 обеспечивают нас удобной формулой неопределенного суммирования:

$$\sum \binom{x}{m}\delta x = \binom{x}{m+1} + C. \tag{5.11}$$

„Когда ему [Мориарти] исполнился двадцать один год, он написал трактат о биномиальной теореме, принесший ему европейскую известность. Это позволило ему получить кафедру математики в одном из наших провинциальных университетов.“
— Ш. Холмс [163]

Своим названием биномиальные коэффициенты обязаны *биномиальной теореме*, которая имеет дело со степенями бинома $x+y$. Вот простейшие случаи этой теоремы:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1x^0y^0,\\
(x+y)^1 &= 1x^1y^0 + 1x^0y^1,\\
(x+y)^2 &= 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2,\\
(x+y)^3 &= 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3,\\
(x+y)^4 &= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4.
\end{aligned}$$

Нетрудно понять, почему эти коэффициенты совпадают с числами треугольника Паскаля. Когда мы расписываем произведение

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}^{n\ \text{сомножителей}},$$

каждый его член сам является произведением n сомножителей x и y. Число таких членов с k сомножителями x и $n-k$ сомножителями y после приведения подобных членов становится коэффициентом при $x^k y^{n-k}$. А это в точности равно числу способов выбора k из n двучленов, из которых в произведение войдет x, т. е. это $\binom{n}{k}$.

В некоторых учебниках величину 0^0 оставляют неопределенной, объясняя это тем, что функции x^0 и 0^x имеют различные пределы, когда x стремится к 0. Но это заблуждение. Необходимо определить

$$x^0 = 1 \qquad \text{при любом } x,$$

с тем чтобы биномиальная теорема была верна при $x=0$, $y=0$ и/или $x=-y$. Эта теорема слишком важна, чтобы ее произвольно ограничивать! И, напротив, функция 0^x совсем не важна. (См. дальнейшие обсуждения в [152].)

А что именно представляет собой биномиальная теорема? Во всем своем великолепии она выступает в обличии следующего тождества:

$$(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}, \qquad \begin{array}{l}\text{целое } r \geqslant 0\\ \text{или } |x/y| < 1.\end{array} \tag{5.12}$$

Это сумма по всем целым k, но в действительности при целом неотрицательном r это конечная сумма, поскольку все ее члены равны нулю, за исключением членов с $0 \leqslant k \leqslant r$. С другой стороны, биномиальная теорема верна и при отрицательном r и даже при произвольном вещественном или комплексном r. В таких случаях данная сумма действительно бесконечна и требуется, чтобы $|x/y| < 1$ для гарантии абсолютной сходимости суммы.

Два частных случая биномиальной теоремы заслуживают особого внимания, несмотря на то, что они исключительно просты. Если $x = y = 1$ и $r = n$ неотрицательно, то

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Это равенство показывает, что сумма чисел n-го ряда треугольника Паскаля равна 2^n. А если x вместо $+1$ равен -1, то

$$0^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

К примеру, $1-4+6-4+1=0$; если снабдить элементы n-го ряда чередующимися знаками, то их сумма равна нулю, за исключением верхнего ряда (когда $n=0$ и $0^0=1$).

Таблица 189 Продолженный вверх треугольник Паскаля.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
−4	1	−4	10	−20	35	−56	84	−120	165	−220	286
−3	1	−3	6	−10	15	−21	28	−36	45	−55	66
−2	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9	−10	11
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Если r не является неотрицательным целым, то биномиальная теорема чаще всего используется в частном случае $y = 1$. Сформулируем этот частный случай явно, заменив x на z, чтобы подчеркнуть тот факт, что здесь может присутствовать произвольное комплексное число:

$$(1+z)^r = \sum_k \binom{r}{k} z^k, \qquad |z| < 1. \qquad (5.13)$$

Если подставить сюда $z = x/y$ и умножить обе части на y^r, то из этой формулы вытекает общая формула (5.12).

Мы доказали, исходя из комбинаторной интерпретации, биномиальную теорему только для целого неотрицательного r. Мы лишены возможности вывести формулу для общего случая из случая целого неотрицательного r, используя полиномиальную аргументацию, ибо в общем случае сумма бесконечна. Однако в случае произвольного r можно воспользоваться теоремой Тейлора из анализа:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f(0)}{0!}z^0 + \frac{f'(0)}{1!}z^1 + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k . \end{aligned}$$

Производные функции $f(z) = (1+z)^r$ легко вычисляются: в самом деле, $f^{(k)}(z) = r^{\underline{k}}(1+z)^{r-k}$. А подстановка $z = 0$ дает (5.13).

Кроме того, нужно доказать, что бесконечная сумма сходится при $|z| < 1$. И это действительно так, поскольку $\binom{r}{k} = O(k^{-1-r})$ согласно равенству (5.83), которое приводится ниже.

(Смысл O-обозначения разъясняется в гл. 9.)

А теперь займемся вплотную величинами $\binom{n}{k}$ при целом отрицательном n. Один из способов подступиться к этим величинам состоит в том, чтобы использовать правило сложения (5.8) для заполнения табл. 180 элементами, которые лежат выше имеющихся чисел, получая тем самым табл. 189. К примеру, $\binom{-1}{0} = 1$, так как $\binom{0}{0} = \binom{-1}{0} + \binom{-1}{-1}$ и $\binom{-1}{-1} = 0$; затем $\binom{-1}{1} = -1$, так как $\binom{0}{1} = \binom{-1}{1} + \binom{-1}{0}$; и т. д.

Все эти числа нам уже знакомы. Действительно, ряды и колонки из табл. 189 оказываются колонками из табл. 180 (за выче-

том знака „минус"). Так что между величинами $\binom{n}{k}$ при отрицательных и положительных n должна существовать некая связь. Общее правило таково:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}, \qquad \text{целое } k, \tag{5.14}$$

что легко доказать, поскольку

$$\begin{aligned} r^{\underline{k}} &= r(r-1)\ldots(r-k+1) \\ &= (-1)^k(-r)(1-r)\ldots(k-1-r) = (-1)^k(k-r-1)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

при $k \geqslant 0$, а при $k < 0$ обе части равны нулю.

Особенно ценно то, что соотношение (5.14) выполняется без всяких ограничений. (Разумеется, нижний индекс должен быть целым с тем, чтобы были определены биномиальные коэффициенты.) Преобразование (5.14) называется *обращением верхнего индекса*, или просто „верхним обращением".

Но как запомнить эту важную формулу? Если все соотношения, с которыми мы уже имели дело,— соотношения симметрии, внесения, сложения и т. п.— были довольно бесхитростны, то это соотношение выглядит весьма замысловато. Тем не менее, существует мнемоническое правило, что само по себе не так уж и плохо. Обращение верхнего индекса начинается с записи $(-1)^k$, где k — нижний индекс. (Нижний индекс не должен изменяться.) Затем мы сразу же снова записываем k дважды: на места верхнего и нижнего индексов. Потом обращается исходный верхний индекс путем его *вычитания* из нового верхнего индекса. И в завершение *вычитается* еще 1 (всегда вычитая, а не прибавляя, ибо это процесс обращения).

Вы называете это правило мнемоническим? Я бы назвал его пневматическим — одно сотрясение воздуха. Хотя оно действительно помогает запомнить.

Для закрепления материала два раза подряд обратим верхний индекс. Имеем

(Самое время размяться упр. 4.)

$$\begin{aligned} \binom{r}{k} &= (-1)^k \binom{k-r-1}{k} \\ &= (-1)^{2k} \binom{k-(k-r-1)-1}{k} = \binom{r}{k}, \end{aligned}$$

и мы вернулись к тому, с чего начали. Вряд ли это то, к чему мы стремились, воссоздав данное соотношение,— но приятно сознавать, что мы не сбились с пути.

Но и неприятно, если мы собирались попасть в другое место.

Разумеется, имеются более полезные применения соотношения (5.14), чем это. Так, верхнее обращение можно использовать для перемещения величин из верхнего на место нижнего индекса и наоборот. Соответствующее соотношение имеет симметричную форму:

$$(-1)^m \binom{-n-1}{m} = (-1)^n \binom{-m-1}{n}, \qquad \text{целые } m, n \geqslant 0, \tag{5.15}$$

ибо обе части равны $\binom{m+n}{n}$.

Кроме того, верхнее обращение может быть использовано для вывода следующей интересной формулы суммирования:

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{r}{k}(-1)^k = \binom{r}{0}-\binom{r}{1}+\cdots+(-1)^m\binom{r}{m}$$
$$= (-1)^m\binom{r-1}{m}, \qquad \text{целое } m. \tag{5.16}$$

Идея вывода этой формулы состоит в том, чтобы сперва обратить верхний индекс, затем применить формулу (5.9), а потом снова обратить индекс:

(Здесь двойное обращение оказывается содержательным, поскольку мы поместили между ними другую операцию.)

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{r}{k}(-1)^k = \sum_{k\leqslant m}\binom{k-r-1}{k}$$
$$= \binom{-r+m}{m}$$
$$= (-1)^m\binom{r-1}{m}.$$

Эта формула дает частичную сумму r-го ряда треугольника Паскаля, при условии что элементам данного ряда приписаны чередующиеся знаки. Так, при $r = 5$ и $m = 2$ эта формула дает $1-5+10=6=(-1)^2\binom{4}{2}$.

Обратите внимание, что при $m \geqslant r$ формула (5.16) дает знакочередующуюся сумму элементов всего ряда, а такая сумма равна нулю при целом положительном r. Это уже было доказано при разложении $(1-1)^r$ в соответствии с биномиальной теоремой — интересно то, что частичные суммы такого разложения могут быть вычислены в замкнутой форме.

А как насчет более простой частичной суммы

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{m}\,? \tag{5.17}$$

Если мы умеем вычислять соответствующую знакочередующуюся сумму, то наверняка должны суметь вычислить и эту. А вот и нет: для частичной суммы элементов ряда треугольника Паскаля не существует замкнутого выражения. Мы умеем вычислять суммы элементов в колонках — это формула (5.10),— но не в рядах. Любопытно, однако, что можно вычислить частичные суммы элементов ряда, если умножить их на расстояние от центра:

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{r}{k}\Bigl(\frac{r}{2}-k\Bigr) = \frac{m+1}{2}\binom{r}{m+1}, \qquad \text{целое } m. \tag{5.18}$$

(Эта формула легко проверяется индукцией по m.) Взаимосвязь между этими частичными суммами — имеющими и не имеющи-

ми множитель $(r/2-k)$ в общем члене — аналогична взаимосвязи между интегралами

$$\int_{-\infty}^{\alpha} xe^{-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-\alpha^2} \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Явно более сложный интеграл слева с множителем x выражается в замкнутой форме, в то время как более простой на вид интеграл справа без такого множителя — не выражается. Внешность бывает обманчивой.

(Ну, на самом деле он равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(1+\operatorname{erf}\alpha)$ — константе плюс величина, кратная „функции ошибок“ от α,— если мы согласимся считать это замкнутой формой.)

В конце этой главы мы разберем метод, с помощью которого можно определить, выражаются или нет в замкнутой форме частичные суммы некоторого заданного ряда с биномиальными коэффициентами — в достаточно общей постановке. Данный метод в состоянии обнаружить формулы (5.16) и (5.18), а также позволяет выяснить, что нахождение формулы для (5.17) — гиблое дело.

Частичные суммы биномиального ряда приводят к другого рода любопытному соотношению:

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m+r}{k}x^k y^{m-k} = \sum_{k\leqslant m}\binom{-r}{k}(-x)^k(x+y)^{m-k}, \quad \text{целое } m. \tag{5.19}$$

Не составляет труда доказать это соотношение по индукции: при $m<0$ обе части равны нулю, а при $m=0$ равны 1. Если обозначить сумму в левой части через S_m, то, воспользовавшись формулой сложения (5.8), легко показать, что

$$S_m = \sum_{k\leqslant m}\binom{m-1+r}{k}x^k y^{m-k} + \sum_{k\leqslant m}\binom{m-1+r}{k-1}x^k y^{m-k},$$

и

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m-1+r}{k}x^k y^{m-k} = yS_{m-1} + \binom{m-1+r}{m}x^m,$$

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m-1+r}{k-1}x^k y^{m-k} = xS_{m-1}$$

при $m>0$. Следовательно,

$$S_m = (x+y)S_{m-1} + \binom{-r}{m}(-x)^m,$$

а правая часть (5.19) также удовлетворяет этому рекуррентному соотношению. По индукции, обе части должны быть равны — чтд.

Но есть более тонкое доказательство. Если r — целое число из промежутка $0\geqslant r\geqslant -m$, то биномиальная теорема показывает, что обе части (5.19) равны $(x+y)^{m+r}y^{-r}$. А поскольку обе части

представляют собой многочлены относительно r степени m или меньшей, то совпадения их только в $m+1$ различных точках достаточно (но только-только!) для установления равенства в общем случае.

Вроде бы глупо обзаводиться соотношением, где одна сумма равна другой. Тем более, что ни одна из них не выражается в замкнутой форме. Но иногда вычислить одну сумму оказывается проще, чем другую. К примеру, если положить $x=-1$ и $y=1$, то получим альтернативную форму соотношения (5.16):

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m+r}{k}(-1)^k=\binom{-r}{m},\qquad \text{целое } m\geqslant 0.$$

А если положить $x=y=1$ и $r=m+1$, то получим

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{2m+1}{k}=\sum_{k\leqslant m}\binom{m+k}{k}2^{m-k}.$$

В левой части просуммирована только половина биномиальных коэффициентов с верхним индексом $2m+1$, а эти коэффициенты равны своим двойникам в правой половине, поскольку треугольник Паскаля обладает лево-правосторонней симметрией. Следовательно, левая часть — это просто $\frac{1}{2}2^{2m+1}=2^{2m}$, и мы получаем формулу, которую никак не ожидали получить:

(Имеется красивое комбинаторное доказательство этой формулы [192].)

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m+k}{k}2^{-k}=2^m,\qquad \text{целое } m\geqslant 0. \tag{5.20}$$

Проверим ее при $m=2$: $\binom{2}{0}+\frac{1}{2}\binom{3}{1}+\frac{1}{4}\binom{4}{2}=1+\frac{3}{2}+\frac{6}{4}=4$. Поразительно, но факт.

До сих пор мы рассматривали либо отдельные биномиальные коэффициенты, либо суммы, в члены которых входило только по одному биномиальному коэффициенту. Но многие из бросающих нам вызов задач включают в себя произведения двух и более биномиальных коэффициентов, поэтому оставшуюся часть этого раздела мы посвятим рассмотрению именно таких случаев.

Вот удобное правило, которое зачастую помогает упростить произведение двух биномиальных коэффициентов:

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k},\qquad \text{целые } m,\ k. \tag{5.21}$$

Мы уже встречались с частным случаем $k=1$ — правилом внесения (5.6). Хотя как одна, так и другая части (5.21) суть произведения биномиальных коэффициентов, зачастую одну из них просуммировать проще, чем другую, благодаря взаимодействию с другими частями формулы. Так, m встречается в левой части дважды, а в правой — лишь однажды. Поэтому при суммировании по m мы, естественно, предпочитаем заменить $\binom{r}{m}\binom{m}{k}$ на $\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

Равенство (5.21) справедливо исключительно по причине взаимного сокращения $m!$ в факториальных представлениях $\binom{r}{m}$ и $\binom{m}{k}$. Если все переменные — целые числа и $r \geqslant m \geqslant k \geqslant 0$, то

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \frac{r!}{m!\,(r-m)!}\,\frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{r!}{k!\,(m-k)!\,(r-m)!} = \frac{r!}{k!\,(r-k)!}\,\frac{(r-k)!}{(m-k)!\,(r-m)!} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

Здесь не было ничего сложного. К тому же, если $m < k$ или $k < 0$, то обе части (5.21) равны нулю, так что данное соотношение выполняется при любых целых m и k. Наконец, посредством полиномиальной аргументации его можно распространить на все вещественные r.

Истинно так.

Биномиальный коэффициент вида $\binom{r}{k} = r!/(r-k)!\,k!$ можно переписать в виде $(a+b)!/a!\,b!$ после соответствующего переобозначения переменных. Аналогично, величину $r!/k!\,(m-k)!\,(r-m)!$ в середине предыдущей выкладки можно переписать в виде $(a+b+c)!/a!\,b!\,c!$. Это „триномиальный коэффициент", который возникает в „триномиальной теореме":

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0\leqslant a,b,c\leqslant n\\ a+b+c=n}} \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}x^a y^b z^c = \sum_{\substack{0\leqslant a,b,c\leqslant n\\ a+b+c=n}} \binom{a+b+c}{b+c}\binom{b+c}{c}x^a y^b z^c.$$

Таким образом, $\binom{r}{m}\binom{m}{k}$ — это на самом деле триномиальный коэффициент в другом обличии. Время от времени триномиальные коэффициенты возникают в приложениях, и их обычно записывают как

$$\binom{a+b+c}{a,\,b,\,c} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!},$$

чтобы подчеркнуть наличие симметрии.

Обобщением биномиальных и триномиальных коэффициентов служат *мультиномиальные коэффициенты*, которые всегда выражаются в виде произведения биномиальных коэффициентов:

$$\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1,a_2,\ldots,a_m} = \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)!}{a_1!\,a_2!\,\ldots\,a_m!} = \binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_2+\cdots+a_m}\cdots\binom{a_{m-1}+a_m}{a_m}.$$

„Excogitavi autem olim mirabilem regulam pro numeris coefficientibus potestatum, non tantum a binomio $x+y$, sed et a trinomio $x+y+z$, imo a polynomio quocunque, ut data potentia gradus cujuscunque v. gr. decimi, et potentia in ejus valore comprehensa, ut $x^5y^3z^2$, possim statim assignare numerum coefficientem, quem habere debet, sine ulla Tabula jam calculata."
— Г. Лейбниц [187]

Таблица 195 Суммы произведений биномиальных коэффициентов.

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}, \qquad \text{целые } m,n. \qquad (5.22)$$

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}, \qquad \text{целое } l \geqslant 0, \text{ целые } m,n. \qquad (5.23)$$

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}, \qquad \text{целое } l \geqslant 0, \text{ целые } m,n. \qquad (5.24)$$

$$\sum_{k \leqslant l} \binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m-1}{l-m-n}, \qquad \text{целые } l,m,n \geqslant 0. \qquad (5.25)$$

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant l} \binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}, \qquad \text{целые } l,m \geqslant 0, \text{ целые } n \geqslant q \geqslant 0. \qquad (5.26)$$

А потому, при встрече с подобным страшилищем, нам поможет наше испытанное оружие.

Вот мы и добрались до табл. 195, в которой перечислены наиболее важные из числа испытанных нами тождеств. Это те тождества, на которые мы опираемся в противоборстве с суммой, включающей в себя произведение двух биномиальных коэффициентов. Каждое из этих тождеств представляет собой сумму по k с одним k в каждом биномиальном коэффициенте; помимо этого, в нее входит по четыре почти не зависящих друг от друга параметра, обозначаемых через m, n, r и т. д.,— по одному на месте каждого индекса. В зависимости от того, входит или нет k в верхний или нижний индекс, а также от того, с каким знаком он входит, мы имеем дело с разными случаями. А в некоторых случаях имеется и дополнительный множитель $(-1)^k$, необходимый для того, чтобы сумма вычислялась в замкнутой форме.

Загните уголок этой странички, чтобы потом быстренько найти данную таблицу. Она вам еще пригодится!

Таблица 195 слишком уж сложна для запоминания; она предназначена только для справок. Однако первое тождество из этой таблицы запоминается гораздо легче остальных и его не следует забывать. Оно устанавливает, что сумма (по всем целым k) произведения двух биномиальных коэффициентов, в которых верхние индексы постоянны порознь, а нижние индексы постоянны в сумме при любом k, равна биномиальному коэффициенту, полученному путем сложения как верхних, так и нижних индексов. Данное тождество известно как *свертка Вандермонда*, поскольку Александр Вандермонд написал по этому поводу в конце 18-го века важную статью [45]; однако еще в 1303 г. оно было известно Чжу Ши-цзе из Китая. Все остальные тождества в табл. 195 можно получить из свертки Вандермонда, аккуратно выполняя преобразования обращения верхнего индекса, применяя правило

симметрии и т. п.,— следовательно, свертка Вандермонда является „самым основным“ из всех основных тождеств.

Правило свертки Вандермонда можно доказать, исходя из замечательной комбинаторной интерпретации. Если заменить k на $k-m$, а n на $n-m$, то можно считать, что $m=0$; следовательно, требуется доказать тождество

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \qquad \text{целое } n. \tag{5.27}$$

Пусть r и s — целые неотрицательные числа (общий случай получается посредством полиномиальной аргументации). В правой части $\binom{r+s}{n}$ — это число способов выбрать n человек из r мужчин и s женщин. В левой части каждый член суммы — это число способов выбрать k человек из r мужчин и $n-k$ человек из s женщин. А суммирование по всем k учитывает каждую возможность ровно по одному разу.

Женоненавистники! Вы упомянули мужчин первыми.

Как правило, эти тождества применяются слева направо, так как упрощение идет именно в этом направлении. Но иногда оправданно движение в обратном направлении, даже если приходится временно идти на усложнение. При этом обычно образуется двойная сумма, в которой можно изменить порядок суммирования и потом упростить.

Перед тем как двинуться дальше, посмотрим, как доказываются еще два тождества из табл. 195. Тождество (5.23) доказать легко: нужно всего лишь заменить первый биномиальный коэффициент на $\binom{l}{l-m-k}$, а потом применить свертку Вандермонда (5.22).

Следующее тождество, (5.24), несколько сложнее. Путем последовательных преобразований его можно свести к свертке Вандермонда, но можно доказать его столь же просто, если прибегнуть к старому испытанному методу математической индукции. Зачастую индукция — это первое, к чему мы прибегаем, если в голову не приходит ничего другого, но здесь индукция по l подходит как нельзя лучше.

Действительно, при $l=0$ все члены суммы равны нулю, за исключением члена с $k=-m$; так что обе части данного равенства равны $(-1)^m\binom{s-m}{n}$. А теперь предположим, что данное тождество справедливо при всех значениях, меньших некоторого фиксированного l, где $l>0$. Можно воспользоваться формулой сложения для замены $\binom{l}{m+k}$ на $\binom{l-1}{m+k}+\binom{l-1}{m+k-1}$; тогда первоначальная сумма распадается на две суммы, каждую из которых можно вычислить, исходя из предположения

$$\sum_k \binom{l-1}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k + \sum_k \binom{l-1}{m+k-1}\binom{s+k}{n}(-1)^k$$
$$= (-1)^{l-1+m}\binom{s-m}{n-l+1} + (-1)^{l+m}\binom{s-m+1}{n-l+1}.$$

А если еще раз применить формулу сложения, то это упрощается и получается правая часть (5.24).

В этом выводе заслуживают внимания две вещи. Во-первых, мы вновь убеждаемся в огромном преимуществе суммирования по всем целым k, а не по k в определенных пределах, поскольку не нужно беспокоиться по поводу граничных условий. Во-вторых, формула сложения чудесно стыкуется с математической индукцией, поскольку она представляет рекуррентную зависимость для биномиальных коэффициентов. Биномиальный коэффициент, верхний индекс которого есть l, выражается в виде суммы двух коэффициентов, верхние индексы которых суть $l-1$, а это именно то, что требуется для предположения индукции.

Пожалуй, хватит о табл. 195. А что можно сказать о суммах с тремя и более биномиальными коэффициентами? Если индекс суммирования разбросан по всем коэффициентам, то шансы отыскать сумму в замкнутой форме невелики: известно лишь несколько сумм такого рода, которые выражаются в замкнутой форме, и нужная нам сумма вполне могла не соответствовать предъявленным требованиям. Одна из таких редкостей, доказанная в упр. 43, это сумма

$$\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n} = \binom{r}{m}\binom{s}{n}, \qquad \text{целые } m,n \geqslant 0. \tag{5.28}$$

А вот другой, более симметричный экземпляр:

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}(-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}, \qquad \text{целые } a,b,c \geqslant 0. \tag{5.29}$$

У него есть двойник с двумя коэффициентами:

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+a}{b+k}(-1)^k = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}, \quad \text{целые } a,b \geqslant 0, \tag{5.30}$$

который, между прочим, не фигурирует в табл. 195. Аналогичная сумма с четырьмя коэффициентами не выражается в замкнутой форме, зато выражается другая подобная ей сумма:

$$\sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+d}{c+k}\binom{d+a}{d+k} \Big/ \binom{2a+2b+2c+2d}{a+b+c+d+k} = \frac{(a+b+c+d)!\,(a+b+c)!\,(a+b+d)!\,(a+c+d)!\,(b+c+d)!}{(2a+2b+2c+2d)!\,(a+c)!\,(b+d)!\,a!\,b!\,c!\,d!},$$

$$\text{целые } a,b,c,d \geqslant 0.$$

Это было обнаружено Джоном Дуголом [111] в начале двадцатого столетия.

Является ли тождество Дугола самой лохматой из известных сумм биномиальных коэффициентов? Вовсе нет! Чемпионом такого рода до сих пор остается сумма

$$\sum_{k_{ij}}(-1)^{\sum_{i<j}k_{ij}}\left(\prod_{1\leqslant i<j<n}\binom{a_i+a_j}{a_j+k_{ij}}\right)\left(\prod_{1\leqslant j<n}\binom{a_j+a_n}{a_n+\sum_{i<j}k_{ij}-\sum_{i>j}k_{ji}}\right)$$

$$=\binom{a_1+\cdots+a_n}{a_1,a_2,\ldots,a_n},\quad \text{целые } a_1,a_2,\ldots,a_n\geqslant 0. \qquad (5.31)$$

Это сумма по $\binom{n-1}{2}$ переменным индексам k_{ij} при $1\leqslant i<j<n$. Равенство (5.29) — всего лишь ее частный случай при $n=3$; в случае $n=4$ ее можно переписать следующим образом, если воспользоваться обозначениями (a,b,c,d) вместо (a_1,a_2,a_3,a_4) и (i,j,k) вместо (k_{12},k_{13},k_{23}):

$$\sum_{i,j,k}(-1)^{i+j+k}\binom{a+b}{b+i}\binom{a+c}{c+j}\binom{b+c}{c+k}\binom{a+d}{d-i-j}\binom{b+d}{d+i-k}\binom{c+d}{d+j+k}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)!}{a!b!c!d!},\qquad \text{целые } a,b,c,d\geqslant 0.$$

Левая часть (5.31) — это коэффициент при $z_1^0z_2^0\ldots z_n^0$, получающийся после полного разложения произведения $n(n-1)$ дробей

$$\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)^{a_i}$$

по положительным и отрицательным степеням z. Предположение о виде правой части (5.31) было высказано Фримэном Дайсоном в 1962 г. и вскоре после этого было доказано сразу несколькими людьми. В упр. 95 приводится „простое“ доказательство (5.31).

Заслуживает внимания еще одно тождество, включающее в себя массу биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{j,k}(-1)^{j+k}\binom{j+k}{j}\binom{r}{j}\binom{n}{k}\binom{m+n-j-k}{m-j}$$

$$=\binom{n+r}{n}\binom{m-r}{m-n},\qquad \text{целые } l,m,n;\ n\geqslant 0. \quad (5.32)$$

У данного тождества, доказанного в упр. 83, даже есть шансы встретиться в практических приложениях. Впрочем, мы уже отклоняемся от нашей темы „основные тождества“, так что лучше остановиться и подвести итог пройденному материалу.

Мы убедились, что биномиальные коэффициенты удовлетворяют такому разнообразию тождеств, которое способно сбить

Таблица 199 Десять самых главных тождеств с биномиальными коэффициентами.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$,	целые $n \geqslant k \geqslant 0$.	*факториальное представление*
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,	целое $n \geqslant 0$, целое k.	*свойство симметрии*
$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$,	целое $k \neq 0$.	*внесение/ вынесение*
$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$,	целое k.	*сложение/ разложение*
$\binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k}$,	целое k.	*верхнее обращение*
$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$,	целые m, k.	*триномиальный вариант*
$\sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k} = (x+y)^r$,	целое $r \geqslant 0$, или $\lvert x/y \rvert < 1$.	*биномиальная теорема*
$\sum_{k \leqslant n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$,	целое n.	*суммирование по обоим индексам*
$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$,	целые $m, n \geqslant 0$.	*суммирование по верхнему индексу*
$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$,	целое n.	*свертка Вандермонда*

с толку. К счастью, некоторые из них легко запоминаются, и мы можем воспользоваться этим обстоятельством для выведения большинства других всего за несколько шагов. В табл. 199 сведены десять наиболее полезных формул. Это именно те тождества, которые следует хорошенько запомнить.

5.2 НЕОБХОДИМЫЕ НАВЫКИ

В предыдущем разделе мы вывели кучу тождеств, манипулируя с одними суммами и подключая другие тождества. Их вывод не составлял особого труда — мы знали, что намерены доказать, так что можно было без особых хлопот сформулировать

общий план и наполнить его конкретным содержанием. Однако в „реальной действительности“ мы обычно сталкиваемся не с необходимостью доказать некоторое тождество — сталкиваемся с необходимостью упростить некоторую сумму. К тому же мы не знаем, как могла бы выглядеть сумма в упрощенной форме (и существует ли таковая вообще). Разобравшись с множеством подобных сумм в этом и следующем разделах, отшлифуем свое мастерство в обращении с биномиальными коэффициентами.

Для начала испытаем свои силы на нескольких суммах, содержащих по одному биномиальному коэффициенту.

Задача 1: сумма отношений

Нам хотелось бы выразить в замкнутой форме сумму

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Big/ \binom{n}{k}, \qquad \text{целые } n \geqslant m \geqslant 0.$$

С первого взгляда эта сумма вызывает замешательство, поскольку нам еще не приходилось иметь дело с какими-либо тождествами, которые бы содержали отношения биномиальных коэффициентов. (Более того, данная сумма содержит два биномиальных коэффициента, что вроде бы противоречит утверждению, предшествующему этой задаче.) Однако точно так же, как мы использовали факториальные представления, для того чтобы переписать одно произведение биномиальных коэффициентов в виде другого произведения — именно так было получено тождество (5.21),— так же можно поступить и с их отношением. На самом деле мы можем избежать факториальных представлений, положив $r = n$ и разделив обе части равенства (5.21) на $\binom{n}{k}\binom{n}{m}$, что дает

$$\binom{m}{k} \Big/ \binom{n}{k} = \binom{n-k}{m-k} \Big/ \binom{n}{m}.$$

Таким образом, мы заменяем отношение слева на отношение справа, и сумма приобретает вид

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} \Big/ \binom{n}{m}.$$

Отношение по-прежнему остается, но биномиальный коэффициент в знаменателе уже не содержит индекса суммирования k, так что его можно удалить из суммы. (Мы его восстановим потом.)

Можно также упростить граничные условия, суммируя по всем $k \geqslant 0$: при $k > m$ члены суммы равны нулю. Оставшаяся сумма уже не столь страшна:

$$\sum_{k \geqslant 0} \binom{n-k}{m-k}.$$

Она аналогична сумме из тождества (5.9), ибо индекс k присутствует в двух местах с одним и тем же знаком. Но здесь он $-k$,

Алгоритм самообучения:
1 прочитать задачу
2 попытаться решить
3 пробежать глазами решение в книге
4 if попытка неудачна goto 1 else goto следующая задача

К сожалению, этот алгоритм может привести вас к зацикливанию.

Предлагаемые „заплаты“:
0 set $c \leftarrow 0$
3a set $c \leftarrow c+1$
3b if $c = N$ goto ваш преподаватель



— Э. Дейкстра

... Но этот раздел называется НЕОБХОДИМЫЕ навыки.

а в (5.9) — наоборот. Поэтому следующий шаг напрашивается сам собой — только так и надо действовать:

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n-k}{m-k} = \sum_{m-k\geqslant 0}\binom{n-(m-k)}{m-(m-k)} = \sum_{k\leqslant m}\binom{n-m+k}{k}.$$

Теперь можно воспользоваться формулой суммирования по обоим индексам (5.9):

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{n-m+k}{k} = \binom{(n-m)+m+1}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

И в заключение мы восстанавливаем в качестве знаменателя тот самый биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$, который ранее был удален из суммы, и затем применяем соотношение (5.7) с получением суммы в желаемой замкнутой форме:

$$\binom{n+1}{m}\Big/\binom{n}{m} = \frac{n+1}{n+1-m}.$$

На самом деле этот вывод проходит при любом вещественном n, если только не происходит деления на нуль; т. е. если n не является одним из целых $0, 1, \ldots, m-1$.

Чем сложнее вывод, тем важнее проверить результат. И хотя этот вывод был не слишком сложен, все равно его проверим. При небольших значениях $m = 2$ и $n = 4$ имеем

$$\binom{2}{0}\Big/\binom{4}{0} + \binom{2}{1}\Big/\binom{4}{1} + \binom{2}{2}\Big/\binom{4}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3};$$

что превосходно согласуется с величиной $(4+1)/(4+1-2)$, вычисленной по нашей замкнутой формуле.

Задача 2: из литературы по методам сортировки

Наша следующая сумма восходит к тем давним временам (к началу 1970-х гг.), когда люди еще не приобрели навыков свободного обращения с биномиальными коэффициентами. Одна статья, в которой предлагался улучшенный метод слияния [107], заканчивается следующим замечанием: „Можно показать, что среднее число сэкономленных пересылок данных ... определяется выражением

$$T = \sum_{r=0}^{n} r\frac{{}_{m-r-1}C_{m-n-1}}{{}_{m}C_{n}},$$

Величины m и n определены выше, а символом ${}_mC_n$ обозначено число сочетаний из m элементов по n без повторений... Автор признателен рецензенту за сведение более сложного выражения для среднего числа сэкономленных пересылок к указанному виду.“

Нам предстоит убедиться, что это далеко не окончательный ответ к задаче автора статьи — это даже не ответ на коллоквиуме.

Пожалуйста, не напоминайте мне о коллоквиуме!

Сперва следует превратить эту сумму в то, с чем можно работать. Одного только ужасного обозначения ${}_{m-r-1}C_{m-n-1}$ достаточно, чтобы опустились руки у любого, за исключением полного энтузиазма рецензента (не стоит благодарности). В наших обозначениях следует записать

$$T = \sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} \Big/ \binom{m}{n}, \qquad \text{целые } m > n \geqslant 0.$$

Биномиальный коэффициент в знаменателе не содержит индекса суммирования, так что его надо удалить и иметь дело с иной суммой

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1}.$$

А дальше что? Переменная суммирования входит в верхний индекс биномиального коэффициента, но не входит в нижний. Так что если бы здесь не было другого k, то можно было бы упростить данную сумму и применить формулу суммирования по верхнему индексу (5.10). Но с дополнительным k этого сделать нельзя. Если бы нам удалось каким-либо образом внести это k под знак биномиального коэффициента, используя одно из наших правил внесения, то потом можно было бы просуммировать по верхнему индексу. К сожалению, и те правила здесь не работают. Но если бы вместо k было $m-k$, то можно было бы воспользоваться правилом внесения (5.6):

$$(m-k)\binom{m-k-1}{m-n-1} = (m-n)\binom{m-k}{m-n}.$$

Так вот где ключ к решению! Перепишем k в виде $m-(m-k)$ и разобьем сумму S на две:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} &= \sum_{k=0}^{n} (m-(m-k))\binom{m-k-1}{m-n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} m\binom{m-k-1}{m-n-1} - \sum_{k=0}^{n} (m-k)\binom{m-k-1}{m-n-1} \\ &= m\sum_{k=0}^{n} \binom{m-k-1}{m-n-1} - \sum_{k=0}^{n}(m-n)\binom{m-k}{m-n} \\ &= mA - (m-n)B,\end{aligned}$$

где

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{m-k-1}{m-n-1}, \qquad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{m-k}{m-n}.$$

Оставшиеся суммы A и B — это не что иное, как наши старые знакомые, в которых верхний индекс изменяется, в то время как нижний остается неизменным. Начнем с суммы B, ибо она выглядит попроще. Для того чтобы привести общий член данной суммы к виду левой части (5.10), достаточно ее немножко преобразовать:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{m-k}{m-n} = \sum_{0\leqslant m-k\leqslant n}\binom{m-(m-k)}{m-n}$$
$$= \sum_{m-n\leqslant k\leqslant m}\binom{k}{m-n} = \sum_{0\leqslant k\leqslant m}\binom{k}{m-n}.$$

На последнем шаге в сумму включаются члены с $0 \leqslant k < m-n$, которые все равны нулю, поскольку их верхний индекс меньше нижнего. Теперь, используя (5.10), просуммируем по верхнему индексу и получим

$$B = \sum_{0\leqslant k\leqslant m}\binom{k}{m-n} = \binom{m+1}{m-n+1}.$$

Другая сумма A почти такая же, за тем исключением, что в ней m заменено на $m-1$. Отсюда получается выражение в замкнутой форме для суммы S, которое можно еще несколько упростить:

$$S = mA-(m-n)B = m\binom{m}{m-n} - (m-n)\binom{m+1}{m-n+1}$$
$$= \left(m-(m-n)\frac{m+1}{m-n+1}\right)\binom{m}{m-n}$$
$$= \left(\frac{n}{m-n+1}\right)\binom{m}{m-n}.$$

А это дает нам выражение в замкнутой форме для исходной суммы:

$$T = S\bigg/\binom{m}{n} = \frac{n}{m-n+1}\binom{m}{m-n}\bigg/\binom{m}{n}$$
$$= \frac{n}{m-n+1}.$$

Даже рецензент не смог бы это упростить.

Для проверки результата опять воспользуемся небольшими величинами. Если $m=4$ и $n=2$, то

$$T = 0\cdot\tbinom{3}{1}/\tbinom{4}{2} + 1\cdot\tbinom{2}{1}/\tbinom{4}{2} + 2\cdot\tbinom{1}{1}/\tbinom{4}{2} = 0+\tfrac{2}{6}+\tfrac{2}{6} = \tfrac{2}{3},$$

что согласуется с полученной по нашей формуле величиной $2/(4-2+1)$.

Задача 3: из одного старого домашнего задания

Поупражняемся еще с одной суммой, содержащей один-единственный биномиальный коэффициент. Данная сумма, в отличие от предыдущей, родилась в университетских стенах: это было одно из домашних заданий. Предлагалось вычислить величину $Q_{1000000}$, если

Умрут ли когда-нибудь старые домашние задания?

$$Q_n = \sum_{k \leqslant 2^n} \binom{2^n - k}{k} (-1)^k, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Эта задача потруднее других: *ни одно* из тождеств, которые встречались до сих пор, применить нельзя. К тому же мы имеем дело с суммой из $2^{1000000}$ членов, так что их нельзя просто взять и сложить. Переменная суммирования k фигурирует в обоих индексах — верхнем и нижнем, но с разными знаками. Обращение верхнего индекса также не помогает — оно удаляет множитель $(-1)^k$, но вводит $2k$ в верхний индекс.

Как известно, если ничего хорошего не получается, то лучше всего рассмотреть крайние случаи — даже если не удастся обнаружить какую-нибудь закономерность и доказать ее по индукции, то, по крайней мере, у нас будет кое-какая информация для проверки результата. Вот все ненулевые члены и их суммы для первых четырех значений n:

n			Q_n
0	$\binom{1}{0}$	$= 1$	$= 1$
1	$\binom{2}{0} - \binom{1}{1}$	$= 1 - 1$	$= 0$
2	$\binom{4}{0} - \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$	$= 1 - 3 + 1$	$= -1$
3	$\binom{8}{0} - \binom{7}{1} + \binom{6}{2} - \binom{5}{3} + \binom{4}{4}$	$= 1 - 7 + 15 - 10 + 1$	$= 0$

За следующий случай $n = 4$ лучше и не приниматься — слишком велика опасность совершить арифметическую ошибку. (Вычисление членов суммы типа $\binom{12}{4}$ и $\binom{11}{5}$ порознь, не объединяя их с другими, оправданно лишь в безвыходной ситуации.)

Итак, значения Q_n начинаются с чисел 1, 0, -1, 0. Даже если бы нам были известны один или два следующих члена, выражение Q_n в замкнутой форме все равно бы не просматривалось. Вот если бы была возможность найти и подтвердить рекуррентное соотношение для Q_n, тогда у нас, вероятно, появилась бы возможность угадать и убедиться в правильности его решения в замкнутой форме. А для того чтобы найти рекуррентность, необходимо связать Q_n с Q_{n-1} (или с Q_{n-k} при иных k), но для этого необходимо связать член типа $\binom{128-13}{13}$, который получается при $n = 7$ и $k = 13$, с членами типа $\binom{64-13}{13}$. Это не сулит ничего хорошего: нам не известны сколько-нибудь удовлетворительные соотношения между элементами треугольника Паскаля,

отделенными друг от друга 64 рядами. Формула сложения — наш основной инструмент при доказательствах по индукции — связывает элементы, которые отделены друг от друга только одним рядом.

И тем не менее, именно это обстоятельство подводит к решающему наблюдению: на самом деле нет необходимости иметь дело с элементами, отделенными друг от друга 2^{n-1} рядами. Переменная n никогда не фигурирует сама по себе, а всегда в связи с 2^n. Так что 2^n — случай только для отвода глаз! Если заменить 2^n на m, то все, что нам нужно сделать,— это отыскать замкнутое выражение для более общей (но более простой) суммы

О коварство преподавателя, составлявшего ту контрольную!

$$R_m = \sum_{k\leqslant m} \binom{m-k}{k}(-1)^k, \qquad \text{целое } m \geqslant 0;$$

тем самым мы получим замкнутое выражение и для $Q_n = R_{2^n}$. А надежда получить рекуррентность для последовательности R_m возлагается на формулу сложения.

Значения R_m при малых m можно получить из табл. 180, если поочередно сложить и вычесть те величины, которые простираются по диагонали с юго-запада на северо-восток. Вот они:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_m	1	1	0	−1	−1	0	1	1	0	−1	−1

Судя по всему, дальше будет уйма сокращений.

А теперь обратимся к формуле для R_m и посмотрим, определяется ли оно рекуррентно. Наш замысел состоит в применении формулы сложения (5.8) и нахождении сумм, имеющих вид R_k в окончательном выражении — нечто вроде того, что проделывали в методе приведения из гл. 2:

$$\begin{aligned}
R_m &= \sum_{k\leqslant m} \binom{m-k}{k}(-1)^k \\
&= \sum_{k\leqslant m} \binom{m-1-k}{k}(-1)^k + \sum_{k\leqslant m} \binom{m-1-k}{k-1}(-1)^k \\
&= \sum_{k\leqslant m} \binom{m-1-k}{k}(-1)^k + \sum_{k+1\leqslant m} \binom{m-2-k}{k}(-1)^{k+1} \\
&= \sum_{k\leqslant m-1} \binom{m-1-k}{k}(-1)^k + \binom{-1}{m}(-1)^m \\
&\qquad - \sum_{k\leqslant m-2} \binom{m-2-k}{k}(-1)^k - \binom{-1}{m-1}(-1)^{m-1} \\
&= R_{m-1} + (-1)^{2m} - R_{m-2} - (-1)^{2(m-1)} \\
&= R_{m-1} - R_{m-2}\,.
\end{aligned}$$

(На предпоследнем шаге мы воспользовались формулой $\binom{-1}{m} = (-1)^m$, которая, как мы знаем, верна при $m \geqslant 0$.) А сам вывод справедлив при $m \geqslant 2$.

Это знает всякий, кто выполнил разминочное упр. 4.

С помощью этой рекуррентности можно быстро получать значения R_m и столь же быстро убедиться, что получающаяся последовательность периодична. Действительно,

$$R_m = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{если } m \bmod 6 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}.$$

Доказательство по индукции есть простая проверка. Но если требуется дать более высоконаучное доказательство, то можно развернуть данную рекуррентность на один шаг, получая

$$R_m = (R_{m-2} - R_{m-3}) - R_{m-2} = -R_{m-3},$$

когда $m \geqslant 3$. Следовательно, $R_m = R_{m-6}$, когда $m \geqslant 6$.

И, наконец, поскольку $Q_n = R_{2^n}$, можно установить Q_n, определяя $2^n \bmod 6$ и используя замкнутое выражение для R_m. Если $n = 0$, то $2^0 \bmod 6 = 1$, а продолжая умножать на 2 $(\bmod 6)$, получаем повторения чисел 2 и 4. Таким образом,

$$Q_n = R_{2^n} = \begin{cases} R_1 = 1, & \text{если } n = 0, \\ R_2 = 0, & \text{если } n > 0 \text{ нечетно}, \\ R_4 = -1, & \text{если } n > 0 \text{ четно}. \end{cases}$$

Это замкнутое выражение для Q_n согласуется с теми первыми четырьмя значениями, которые мы вычислили, начав решать данную задачу. Отсюда следует вывод, что $Q_{1000000} = R_4 = -1$.

Задача 4: сумма с двумя биномиальными коэффициентами

Наше следующее задание — найти замкнутое выражение для суммы

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1}, \qquad \text{целые } m > n \geqslant 0.$$

Минуточку. А где же второй биномиальный коэффициент, обещанный в названии этой задачи? И зачем нужно упрощать сумму, которую мы уже упрощали? (Ведь это сумма S из задачи 2.)

Ну, это сумма, упростить которую проще, если рассматривать ее общий член как произведение двух биномиальных коэффициентов, а затем воспользоваться одним из основных тождеств,

составляющих табл. 195. Второй биномиальный коэффициент материализуется, если переписать k в виде $\binom{k}{1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{1}\binom{m-k-1}{m-n-1}.$$

Тем тождеством, которым нужно воспользоваться, является тождество (5.26), поскольку в нем переменная суммирования входит в оба верхних индекса, причем с разными знаками.

Однако наша сумма еще не совсем в нужном виде. Если нужно полное соответствие формуле (5.26), то верхним пределом суммирования должно быть $m-1$. Нет проблем: при $n < k \leqslant m-1$ все члены суммы равны нулю, так что можно произвести подстановку $(l, m, n, q) \leftarrow (m-1, m-n-1, 1, 0)$ и ответом будет

$$S = \binom{m}{m-n+1}.$$

Это аккуратнее по сравнению с ранее полученной формулой. А воспользовавшись правилом (5.7), эту формулу можно превратить в выведенную ранее:

$$\binom{m}{m-n+1} = \frac{n}{m-n+1}\binom{m}{m-n}.$$

Аналогичным образом можно получить интересные результаты путем подстановки определенных значений в другие известные нам тождества. Подставим, например, $m = n = 1$ и $q = 0$ в (5.26). Тогда данное тождество принимает вид

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant l}(l-k)k = \binom{l+1}{3}.$$

Здесь левая часть есть $l\bigl((l+1)l/2\bigr)-(1^2+2^2+\cdots+l^2)$, что дает нам еще один „фирменный“ способ решения задачи о сумме квадратов, которую мы до смерти замучили в гл. 2.

Мораль сей басни такова. Специальные случаи самых важных сумм лучше всего сводить к общему виду. Изучив суммы в общем виде, имеет смысл рассмотреть их простые специализации.

„Прибегая к специализации, мы стараемся выделить отдельную часть задачи; прибегая к обобщению, мы пытаемся объединить результаты, полученные при решении отдельных задач.“
— Д. Пойа [240]*

Задача 5: сумма с тремя сомножителями

А вот другая сумма, с которой неплохо разобраться. Желательно упростить сумму

$$\sum_{k}\binom{n}{k}\binom{s}{k}k, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Переменная суммирования k встречается в обоих нижних индексах с одним и тем же знаком, так что тождество (5.23) из табл. 195 весьма похоже на то, в чем мы нуждаемся. После небольших манипуляций, мы должны бы суметь им воспользоваться.

Самое существенное различие между (5.23) и тем, чем располагаем мы, это наличие дополнительного k в нашей сумме. Но это k можно внести в один из биномиальных коэффициентов, если воспользоваться одним из правил внесения:

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{s}{k}k = \sum_k \binom{n}{k}\binom{s-1}{k-1}s = s\sum_k \binom{n}{k}\binom{s-1}{k-1}.$$

Нас не волнует, что когда исчезает k, то вылезает s, поскольку это константа. Теперь пришло время воспользоваться соотношением (5.23) и получить сумму в замкнутой форме:

$$s\sum_k \binom{n}{k}\binom{s-1}{k-1} = s\binom{n+s-1}{n-1}.$$

Если бы на первом шаге мы предпочли внести k в коэффициент $\binom{n}{k}$, а не в $\binom{s}{k}$, то тем самым лишились бы возможности воспользоваться тождеством (5.23) непосредственно, ибо величина $n-1$ могла бы оказаться отрицательной: данное тождество требует наличия неотрицательной величины по крайней мере в одном из верхних индексов.

Задача 6: сумма со многими трудностями

Следующая сумма выглядит более вызывающе. Требуется выразить в замкнутой форме сумму

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Одним из наглядных показателей степени трудности той или иной суммы служит число вхождений в нее переменной суммирования. Но здесь этот показатель повергает нас в глубокий траур — индекс k встречается в шести местах! Более того, решающий шаг, который оправдал себя в предыдущей задаче — внесение чего-нибудь, находящегося за скобками биномиальных коэффициентов, в один из них,— в данном случае себя не оправдывает. Если внести $k+1$, то вместо него все равно явится другое k. И дело не только в этом: индекс k входит дважды с коэффициентом 2 в биномиальные коэффициенты. А мультипликативные постоянные, как правило, удалять труднее, чем аддитивные.

А может, похороним эту сумму шесть раз?

И тем не менее, на этот раз нам повезло: переменные $2k$ находятся именно там, где требуется, для того чтобы, воспользовавшись тождеством (5.21), получить

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Две двойки исчезают, а с ними и одно k. Итак, одно k пропало, пять — осталось.

Из всех оставшихся затруднений наибольшее неудобство причиняет $k+1$ в знаменателе, но теперь эту величину можно внести в биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$, используя тождество (5.6):

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k\,.$$

(Напомним, что $n\geqslant 0$.) Два k пропало, четыре — осталось.

Есть два перспективных варианта удаления еще одного k: можно воспользоваться симметрией коэффициента $\binom{n+k}{k}$ или же обратить верхний индекс $n+k$, тем самым удалив k, а заодно и множитель $(-1)^k$. Рассмотрим обе возможности, начав с варианта с симметрией:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k\,.$$

Три k пропало, три — осталось, и у нас появляется возможность добиться большего успеха, подключив к делу (5.24). Заменяя (l,m,n,s) на $(n+1,1,n,n)$, получаем

Минуточку, я думаю, пора делать ставки.

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{n+1}(-1)^n\binom{n-1}{-1}=0\,.$$

Как нуль? И это после такой работы? Давайте-ка проверим это при $n=2$: $\binom{2}{0}\binom{0}{0}\frac{1}{1}-\binom{3}{2}\binom{2}{1}\frac{1}{2}+\binom{4}{4}\binom{4}{2}\frac{1}{3}=1-\frac{6}{2}+\frac{6}{3}=0$. В самом деле нуль.

Просто ради интереса испробуем другой возможный вариант — с обращением верхнего индекса $\binom{n+k}{k}$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{-n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}.$$

А теперь воспользуемся тождеством (5.23) с заменой $(l,m,n,s)\leftarrow(n+1,1,0,-n-1)$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{-n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\binom{0}{n}\,.$$

Подождите-ка! Это нуль при $n>0$, но при $n=0$ это единица. А ведь при другом подходе к решению данная сумма равнялась нулю во всех случаях! В чем же дело? На самом деле искомая

сумма оказывается равной 1 при $n = 0$, так что правильное решение '$[n=0]$'. Мы, должно быть, сделали ошибку в предыдущем выводе.

Теперь быстренько переиграем этот вывод при $n = 0$ с тем, чтобы понять, где впервые возникает подобное расхождение. Ну да — мы попались в старую ловушку, упоминавшуюся ранее: опрометчиво воспользовались симметрией, в то время как верхний индекс мог быть отрицательным! Мы не имели права заменять $\binom{n+k}{k}$ на $\binom{n+k}{n}$, когда k пробегает целые числа, поскольку это превращает нулевую величину в ненулевую при $k < -n$. (Простите нас за это.)

Попробуйте бинарный поиск: вначале переиграйте формулу в середине, чтобы выяснить, раньше или позже была допущена ошибка.

Другой множитель в данной сумме, $\binom{n+1}{k+1}$, оказывается равным нулю при $k < -n$, кроме $n = 0$ и $k = -1$. Вот почему допущенная нами ошибка не была выявлена при проверке случая $n = 2$. В упр. 6 объясняется, как следовало поступить.

Задача 7: новое затруднение

Эта задача еще труднее: надо вычислить в замкнутой форме сумму

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}, \qquad \text{целые } m, n > 0.$$

Если бы m было равным 0, то получили бы сумму из задачи, с которой только что покончили. Но это не так, и мы оказываемся в затруднительном положении — ничего из того, что использовалось в задаче 6, здесь не годится (особенно решающий первый шаг.)

Однако если бы удалось каким-то образом избавиться от m, то можно было бы воспользоваться только что полученным результатом. Так что наш план действий таков: заменить $\binom{n+k}{m+2k}$ суммой членов вида $\binom{l+k}{2k}$ при некотором целом неотрицательном l; тогда общий член суммы будет выглядеть как общий член суммы из задачи 6, и можно изменить порядок суммирования.

Но чем же заменить $\binom{n+k}{m+2k}$? Скрупулезный перебор выведенных ранее в этой главе тождеств выявляет только одну подходящую кандидатуру, а именно равенство (5.26) из табл. 195. При этом один из способов воспользоваться им состоит в замене параметров (l, m, n, q, k) соответственно на $(n+k-1, 2k, m-1, 0, j)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\\
&\quad=\sum_{k\geqslant 0}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant n+k-1}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{j}{m-1}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\\
&\quad=\sum_{j\geqslant 0}\binom{j}{m-1}\sum_{\substack{k\geqslant j-n+1\\ k\geqslant 0}}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.
\end{aligned}$$

На последнем шаге мы изменили порядок суммирования, манипулируя граничными условиями под знаками $\sum$ в соответствии с правилами из гл. 2.

Мы не можем просто так заменить полученную внутреннюю сумму на результат решения задачи 6, поскольку в ней имеется дополнительное условие $k \geqslant j-n+1$. Но данное дополнительное условие не является излишним, только если $j-n+1>0$, т. е. если $j \geqslant n$. А если $j \geqslant n$, то первый биномиальный коэффициент внутренней суммы равен нулю, ибо верхний индекс изменяется от 0 до $k-1$ и, таким образом, строго меньше нижнего индекса $2k$. Следовательно, на внешнюю сумму может быть наложено дополнительное ограничение $j<n$, не оказывающее влияния на то, какие ненулевые члены в нее включены. Тем самым ограничение $k \geqslant j-n+1$ становится излишним, и можно воспользоваться решением задачи 6. Полученная двойная сумма распадается на две суммы:

$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{j}{m-1}\sum_{\substack{k\geqslant j-n+1\\ k\geqslant 0}}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$
$$=\sum_{0\leqslant j<n}\binom{j}{m-1}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$
$$=\sum_{0\leqslant j<n}\binom{j}{m-1}[n-1-j=0]=\binom{n-1}{m-1}.$$

Внутренняя сумма обращается в нуль при всех j, кроме $j=n-1$, так что в качестве ответа мы получаем простое выражение в замкнутой форме.

Задача 8: еще одно затруднение

Расширим задачу 6 по-другому, рассмотрев сумму

$$S_m=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1+m},\qquad \text{целые } m,n\geqslant 0.$$

Если $m=0$, снова получаем сумму, с которой имели дело раньше, но теперь m появляется в другом месте. И хотя эта задача немного труднее, чем задача 7, мы (к счастью) уже гораздо лучше освоились с нахождением решений. Начать можно так же, как и в задаче 6:

$$S_m=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1+m}.$$

Теперь (как и в задаче 7), попробуем разложить ту часть, которая зависит от m, на члены, с которыми мы знаем, как обращаться. Когда m равнялось нулю, мы вносили $k+1$ в $\binom{n}{k}$; при $m>0$ можно проделать то же самое, если разложить $1/(k+1+m)$ на

допускающие такое внесение члены. Удача по-прежнему сопутствует нам: в задаче 1 было получено подходящее тождество:

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{r}{j}^{-1} = \frac{r+1}{r+1-m}, \qquad \begin{matrix}\text{целое } m \geqslant 0,\\ r \notin \{0,1,\ldots,m-1\}.\end{matrix} \qquad (5.33)$$

Замена r на $-k-2$ дает желаемое разложение

$$S_m = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j\geqslant 0}\binom{m}{j}\binom{-k-2}{j}^{-1}.$$

А теперь, как и планировалось, величину $(k+1)^{-1}$ можно внести в $\binom{n}{k}$. В сущности, она могла быть внесена и в $\binom{-k-2}{j}^{-1}$. Два варианта внесения наводят на мысль, что за кулисами могло спрятаться даже большее упрощение. Так оно и есть: представление всего, что входит в наш новый общий член в виде факториалов и возвращение к биномиальным коэффициентам дает выражение, которое можно просуммировать по k:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\binom{m+n+1}{n+1+j} \\ &\quad\times\sum_{k}\binom{n+1+j}{k+j+1}\binom{-n-1}{k} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\binom{m+n+1}{n+1+j}\binom{j}{n}. \end{aligned}$$

Они полагают, что мы проверим это на клочке бумаги.

А согласно (5.24), сумма по всем целым j равна нулю. Следовательно, $-S_m$ это сумма по $j<0$.

Для вычисления $-S_m$ по $j<0$ заменим j на $-k-1$ и просуммируем по $k\geqslant 0$:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m+n+1}{n-k}\binom{-k-1}{n} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\sum_{k\leqslant n}(-1)^{n-k}\binom{m+n+1}{k}\binom{k-n-1}{n} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\sum_{k\leqslant n}(-1)^k\binom{m+n+1}{k}\binom{2n-k}{n} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\sum_{k\leqslant 2n}(-1)^k\binom{m+n+1}{k}\binom{2n-k}{n}. \end{aligned}$$

Наконец, применяем (5.25) и получаем ответ:

$$S_m = (-1)^n\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\binom{m}{n} = (-1)^n m^{\underline{n}} m^{\underline{-n-1}}.$$

Ну и ну — это надо бы проверить! При $n = 2$ находим, что

$$S_m = \frac{1}{m+1} - \frac{6}{m+2} + \frac{6}{m+3} = \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}.$$

Наш вывод требует, чтобы m было целым, однако полученный результат справедлив при вещественных m, поскольку $(m+1)^{\overline{n+1}} S_m$ — это многочлен относительно m степени $< n$.

5.3 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ

Теперь рассмотрим три технических приема, представляющих собой существенное развитие методов, изученных ранее.

На самом деле это следовало бы назвать „приемом 1/2".

Прием 1: выполовинивание

Многие из наших тождеств включают в себя произвольное вещественное число r. Если же r имеет специальный вид типа „целое минус половина", то биномиальный коэффициент $\binom{r}{k}$ может быть записан в виде совершенно непохожего произведения биномиальных коэффициентов. Это приводит к новому семейству тождеств, с которыми можно обращаться с поразительной легкостью.

Один из способов понять, как это делается,— начать с *формулы удвоения*:

$$r^{\underline{k}}(r - \tfrac{1}{2})^{\underline{k}} = (2r)^{\underline{2k}}/2^{2k}, \qquad \text{целое } k \geqslant 0. \tag{5.34}$$

Это соотношение становится очевидным, если разложить убывающие степени и расположить в левой части множители в чередующемся порядке:

$$r(r - \tfrac{1}{2})(r-1)(r - \tfrac{3}{2}) \ldots (r-k+1)(r-k+\tfrac{1}{2}) \\ = \frac{(2r)(2r-1)\ldots(2r-2k+1)}{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}.$$

Теперь можно разделить обе части на $k!^2$, получая

$$\binom{r}{k}\binom{r-1/2}{k} = \binom{2r}{2k}\binom{2k}{k}\Big/2^{2k}, \qquad \text{целое } k. \tag{5.35}$$

Если положить $k = r = n$, где n — целое, то это дает

$$\binom{n-1/2}{n} = \binom{2n}{n}\Big/2^{2n}, \qquad \text{целое } n. \tag{5.36}$$

А обращение верхнего индекса доставляет еще одну полезную формулу:

$$\binom{-1/2}{n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}, \qquad \text{целое } n. \tag{5.37}$$

Так, при $n = 4$ получаем

... половиним...

$$\binom{-1/2}{4} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{4!}$$
$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^4 \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$= \left(\frac{-1}{4}\right)^4 \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = \left(\frac{-1}{4}\right)^4 \binom{8}{4}.$$

Обратите внимание, как мы заменили произведение нечетных чисел на факториал.

Тождество (5.35) приводит к занятному следствию. Положим $r = \frac{1}{2}n$ и возьмем сумму по всем целым k. Тогда, согласно (5.23), получим следующий результат:

$$\sum_k \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}2^{-2k} = \sum_k \binom{n/2}{k}\binom{(n-1)/2}{k}$$
$$= \binom{n-1/2}{\lfloor n/2\rfloor}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0, \qquad (5.38)$$

поскольку либо $n/2$, либо $(n-1)/2$ равно $\lfloor n/2\rfloor$ — целому неотрицательному числу!

Можно также воспользоваться сверткой Вандермонда (5.27) и получить формулу

$$\sum_k \binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k} = \binom{-1}{n} = (-1)^n, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Подстановка значений из (5.37) дает

$$\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k} = \left(\frac{-1}{4}\right)^k\binom{2k}{k}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-k}\binom{2(n-k)}{n-k}$$
$$= \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k},$$

что в сумме равно $(-1)^n$. Следовательно, установлено замечательно свойство „средних“ элементов треугольника Паскаля:

$$\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (5.39)$$

Например, $\binom{0}{0}\binom{6}{3}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{1}+\binom{6}{3}\binom{0}{0} = 1\cdot20+2\cdot6+6\cdot2+20\cdot1 = 64 = 4^3$.

Эти иллюстрации к нашему первому приему показывают, что имеет смысл попробовать заменить биномиальные коэффициенты вида $\binom{2k}{k}$ на биномиальные коэффициенты вида $\binom{n-1/2}{k}$, где n — некоторое подходящее целое число (обычно 0, 1 или k): получающаяся формула может оказаться гораздо проще.

Прием 2: разности высших порядков

Ранее мы убедились в том, что частичные суммы ряда с общим членом $\binom{n}{k}(-1)^k$ вычислить можно, а ряда с общим членом $\binom{n}{k}$ — нельзя. Оказывается, что существует много важных приложений биномиальных коэффициентов с чередованием знаков — коэффициентов $\binom{n}{k}(-1)^k$. Одна из причин этого заключается в том, что подобные коэффициенты тесно связаны с разностным оператором Δ, определенным в разд. 2.6.

Разность Δf функции f в точке x есть

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x);$$

если же применить оператор Δ еще раз, то получим вторую разность:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+1) - \Delta f(x)\\ &= \big(f(x+2) - f(x+1)\big) - \big(f(x+1) - f(x)\big)\\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x),\end{aligned}$$

которая подобна второй производной. Действуя аналогичным образом, получим

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(x) &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x),\\ \Delta^4 f(x) &= f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + f(x),\end{aligned}$$

и т. д. В эти формулы биномиальные коэффициенты входят с чередующимися знаками.

В общем случае n-я разность есть

$$\Delta^n f(x) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(x+k), \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \tag{5.40}$$

Данная формула легко доказывается по индукции, однако имеется красивый способ ее прямого доказательства с использованием элементарной теории операторов. Вспомним, что в разд. 2.6 оператор сдвига E определялся по правилу

$$Ef(x) = f(x+1);$$

следовательно, оператор Δ есть $E - 1$, где 1 — тождественный оператор, определяемый по правилу $1f(x) = f(x)$. По биномиальной теореме

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k}.$$

Это равенство, элементами которого являются операторы, эквивалентно (5.40), поскольку E^k — это оператор, который переводит $f(x)$ в $f(x+k)$.

Интересный и важный случай возникает при рассмотрении отрицательных убывающих степеней. Пусть $f(x) = (x-1)^{\underline{-1}} = 1/x$.

Тогда по правилу (2.45) имеем $\Delta f(x) = (-1)(x-1)^{\underline{-2}}$, $\Delta^2 f(x) = (-1)(-2)(x-1)^{\underline{-3}}$, а в общем случае

$$\Delta^n\big((x-1)^{\underline{-1}}\big) = (-1)^{\underline{n}}(x-1)^{\underline{-n-1}} = (-1)^n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Итак, равенство (5.40) указывает, что

$$\sum_k \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$
$$= x^{-1}\binom{x+n}{n}^{-1}, \quad x \notin \{0,-1,\dots,-n\}. \qquad (5.41)$$

Например,

$$\frac{1}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{6}{x+2} - \frac{4}{x+3} + \frac{1}{x+4}$$
$$= \frac{4!}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = 1\Big/x\binom{x+4}{4}\,.$$

Сумма в (5.41) представляет собой разложение $n!/\big(x(x+1)\dots(x+n)\big)$ на элементарные дроби.

Важные результаты могут быть также получены из рассмотрения положительных убывающих степеней. Если $f(x)$ — некоторый многочлен степени d, то разность $\Delta f(x)$ — это некоторый многочлен степени $d-1$; следовательно, величина $\Delta^d f(x)$ — это константа, и $\Delta^n f(x) = 0$ при $n > d$. Этот исключительно важный факт упрощает многие формулы.

Более детальное рассмотрение дает дополнительную информацию. Пусть

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

— некоторый многочлен степени d. В гл. 6 мы увидим, что обычные степени могут быть выражены в виде сумм убывающих степеней (скажем, $x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$); следовательно, существуют коэффициенты b_d, b_{d-1}, …, b_1, b_0, такие, что

$$f(x) = b_d x^{\underline{d}} + b_{d-1}x^{\underline{d-1}} + \dots + b_1 x^{\underline{1}} + b_0 x^{\underline{0}}.$$

(Оказывается, что $b_d = a_d$ и $b_0 = a_0$, но находящиеся между ними коэффициенты связаны более сложным образом.) Пусть $c_k = k!\,b_k$ при $0 \leqslant k \leqslant d$. Тогда

$$f(x) = c_d\binom{x}{d} + c_{d-1}\binom{x}{d-1} + \dots + c_1\binom{x}{1} + c_0\binom{x}{0}\,;$$

таким образом, любой многочлен может быть представлен в виде суммы величин, кратных биномиальным коэффициентам. Подобное разложение называется *рядом Ньютона* для $f(x)$ в силу того, что оно широко использовалось Исааком Ньютоном.

Ранее в этой главе мы отмечали, что из формулы сложения вытекает формула

$$\Delta\left(\binom{x}{k}\right) = \binom{x}{k-1}.$$

Поэтому n-я разность ряда Ньютона очень просто определяется по индукции:

$$\Delta^n f(x) = c_d\binom{x}{d-n} + c_{d-1}\binom{x}{d-1-n} + \cdots + c_1\binom{x}{1-n} + c_0\binom{x}{-n}.$$

Если теперь подставить $x = 0$, то все члены $c_k\binom{x}{k-n}$ в правой части обращаются в нуль, за исключением члена с $k - n = 0$; следовательно,

$$\Delta^n f(0) = \begin{cases} c_n\,, & \text{если } n \leqslant d, \\ 0\,, & \text{если } n > d. \end{cases}$$

Поэтому рядом Ньютона для $f(x)$ является

$$f(x) = \Delta^d f(0)\binom{x}{d} + \Delta^{d-1} f(0)\binom{x}{d-1} + \cdots + \Delta f(0)\binom{x}{1} + f(0)\binom{x}{0}.$$

Например, предположим, что $f(x) = x^3$. Легко вычислить, что

$$\begin{array}{c} f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = 8, \qquad f(3) = 27; \\ \Delta f(0) = 1, \qquad \Delta f(1) = 7, \qquad \Delta f(2) = 19; \\ \Delta^2 f(0) = 6, \qquad \Delta^2 f(1) = 12; \\ \Delta^3 f(0) = 6. \end{array}$$

Таким образом, в этом случае ряд Ньютона имеет вид $x^3 = 6\binom{x}{3} + 6\binom{x}{2} + 1\binom{x}{1} + 0\binom{x}{0}$.

Используя (5.40) с $x = 0$, можно переписать формулу $\Delta^n f(0) = c_n$ следующим образом:

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k\left(c_0\binom{k}{0} + c_1\binom{k}{1} + c_2\binom{k}{2} + \cdots\right) = (-1)^n c_n\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Здесь $\langle c_0, c_1, c_2, \ldots\rangle$ — произвольная последовательность коэффициентов, однако бесконечная сумма $c_0\binom{k}{0} + c_1\binom{k}{1} + c_2\binom{k}{2} + \cdots$ на самом деле является конечной при любом $k \geqslant 0$, так что вопрос о сходимости не стоит. В частности, можно получить важное тождество

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(a_0 + a_1 k + \cdots + a_n k^n) = (-1)^n n!\, a_n\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0, \tag{5.42}$$

ибо многочлен $a_0 + a_1 k + \cdots + a_n k^n$ всегда может быть записан в виде ряда Ньютона $c_0\binom{k}{0} + c_1\binom{k}{1} + \cdots + c_n\binom{k}{n}$ с $c_n = n!\, a_n$.

Многие суммы, которые на первый взгляд кажутся безнадежными, в действительности могут быть просуммированы почти тривиальным образом, если воспользоваться понятием n-х разностей. Например, рассмотрим соотношение

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{r-sk}{n}(-1)^k = s^n, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \tag{5.43}$$

Оно выглядит весьма необычно, поскольку совершенно отлично от всего того, с чем мы встречались до сих пор. Но на самом деле понять его просто, как только мы обратим внимание на проясняющий дело множитель $\binom{n}{k}(-1)^k$ в общем члене, ибо функция

$$f(k) = \binom{r-sk}{n} = \frac{1}{n!}(-1)^n s^n k^n + \cdots = (-1)^n s^n \binom{k}{n} + \cdots$$

представляет собой многочлен степени n относительно k со старшим коэффициентом $(-1)^n s^n/n!$. Таким образом, (5.43) — это не более чем одно из применений соотношения (5.42).

Ряд Ньютона обсуждался в предположении, что $f(x)$ — многочлен. Но, как мы видели, бесконечный ряд Ньютона

$$f(x) = c_0\binom{x}{0} + c_1\binom{x}{1} + c_2\binom{x}{2} + \cdots$$

также имеет смысл, поскольку подобные суммы всегда конечны, если x — целое неотрицательное число. Наш вывод формулы $\Delta^n f(0) = c_n$ проходит для бесконечной суммы точно так же, как и для конечной, так что общее соотношение таково:

$$f(x) = f(0)\binom{x}{0} + \Delta f(0)\binom{x}{1} + \Delta^2 f(0)\binom{x}{2} + \Delta^3 f(0)\binom{x}{3} + \cdots, \qquad \text{целое } x \geqslant 0. \tag{5.44}$$

Эта формула справедлива для любой функции $f(x)$, которая определена при целых неотрицательных x. Более того, если правая часть этого соотношения сходится при других значениях x, то она определяет некоторую функцию, которая „приближает“ $f(x)$ в некотором естественном смысле. (Существует бесконечное число способов приближения значений функции, так что нельзя утверждать, что соотношение (5.44) справедливо при всех значениях x, которые делают бесконечный ряд сходящимся. Так, если положить $f(x) = \sin(\pi x)$, то $f(x) = 0$ во всех целых точках, поэтому правая часть (5.44) тождественно равна нулю; однако левая часть отлична от нуля при всех нецелых x.)

Ряд Ньютона является конечно-разностным аналогом ряда Тейлора из исчисления бесконечно малых. Точно так же, как ряд Тейлора может быть записан в виде

$$g(a+x) = \frac{g(a)}{0!}x^0 + \frac{g'(a)}{1!}x^1 + \frac{g''(a)}{2!}x^2 + \frac{g'''(a)}{3!}x^3 + \cdots,$$

(Поскольку $E = 1 + \Delta$, $E^x = \sum_k \binom{x}{k}\Delta^k$; и $E^x g(a) = g(a+x)$.)

так и ряд Ньютона для $f(x) = g(a+x)$ может быть записан в виде

$$g(a+x) = \frac{g(a)}{0!}x^{\underline{0}} + \frac{\Delta g(a)}{1!}x^{\underline{1}} + \frac{\Delta^2 g(a)}{2!}x^{\underline{2}} + \cdots. \qquad (5.45)$$

(Это то же самое, что и (5.44), ибо $\Delta^n f(0) = \Delta^n g(a)$ при любом $n \geqslant 0$, если $f(x) = g(a+x)$.) Как ряд Тейлора, так и ряд Ньютона являются конечными, если g — многочлен или же $x = 0$; кроме того, ряд Ньютона конечен, если x — целое положительное число. В остальных случаях эти суммы могут сходиться или расходиться при определенных значениях x. Если ряд Ньютона сходится, когда x не является целым неотрицательным числом, то он может в действительности сходиться к величине, *отличной* от $g(a+x)$, потому что ряд Ньютона (5.45) зависит только от дискретных значений функции $g(a)$, $g(a+1)$, $g(a+2)$, ...

Один из примеров сходящегося ряда Ньютона доставляет биномиальная теорема. Пусть $g(x) = (1+z)^x$, где z — фиксированное комплексное число, такое, что $|z| < 1$. Тогда $\Delta g(x) = (1+z)^{x+1} - (1+z)^x = z(1+z)^x$, следовательно, $\Delta^n g(x) = z^n(1+z)^x$. В данном случае бесконечный ряд Ньютона

$$g(a+x) = \sum_n \Delta^n g(a)\binom{x}{n} = (1+z)^a \sum_n \binom{x}{n} z^n$$

сходится к „нужной“ величине $(1+z)^{a+x}$ при любом x.

Джеймс Стирлинг пытался использовать ряд Ньютона для распространения факториальной функции на нецелые числа. Сначала он нашел коэффициенты S_n, такие, что

$$x! = \sum_n S_n\binom{x}{n} = S_0\binom{x}{0} + S_1\binom{x}{1} + S_2\binom{x}{2} + \cdots \qquad (5.46)$$

„Постольку, поскольку эти члены возрастают очень быстро, их разности будут образовывать расходящуюся прогрессию, что препятствует приближению ординаты параболы, поэтому в этом и подобных ему случаях я интерполирую логарифмы данных членов, разности которых составляют быстро сходящийся ряд.“ — Дж. Стирлинг [286]

является тождеством при $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ и т.д. Однако он обнаружил, что полученный ряд не сходится, за исключением случаев, когда x является целым неотрицательным числом. Тогда он предпринял новую попытку, записав на этот раз

$$\ln x! = \sum_n s_n\binom{x}{n} = s_0\binom{x}{0} + s_1\binom{x}{1} + s_2\binom{x}{2} + \cdots. \qquad (5.47)$$

Поскольку $\Delta(\ln x!) = \ln(x+1)! - \ln x! = \ln(x+1)$, то согласно (5.40)

$$\begin{aligned} s_n &= \Delta^n(\ln x!)\big|_{x=0} \\ &= \Delta^{n-1}(\ln(x+1))\big|_{x=0} \\ &= \sum_k \binom{n-1}{k}(-1)^{n-1-k}\ln(k+1). \end{aligned}$$

Итак, искомые коэффициенты суть $s_0 = s_1 = 0$, $s_2 = \ln 2$, $s_3 = \ln 3 - 2\ln 2 = \ln\frac{3}{4}$, $s_4 = \ln 4 - 3\ln 3 + 3\ln 2 = \ln\frac{32}{27}$ и т.д. На этом

пути Стирлинг получил ряд, который действительно сходится (хотя он и не доказал этого); на самом деле найденный им ряд сходится для всех $x > -1$. Тем самым он оказался в состоянии благополучно вычислить $\frac{1}{2}!$. Окончание этой истории — в упр. 88.

(До девятнадцатого века доказывать сходимость не было принято.)

Прием 3: обращение

Частный случай только что выведенного правила (5.45) для ряда Ньютона может быть переписан следующим образом:

$$g(n) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k f(k) \iff f(n) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k g(k). \quad (5.48)$$

Это соотношение двойственности между f и g называется *формулой обращения* — она весьма похожа на формулы обращения Мёбиуса (4.56) и (4.61), с которыми мы сталкивались в гл. 4. Формулы обращения позволяют разрешать „неявные рекуррентности“, в которых подлежащая определению последовательность упрятана в сумму.

Обратите: 'zınb ppo'.

(А потом загляните в словарь. — Ред.)

Так, известной могла бы оказаться функция $g(n)$, а неизвестной — функция $f(n)$, и можно было бы умудриться показать, что $g(n) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k f(k)$. Тогда формула (5.48) позволяет выразить $f(n)$ в виде суммы известных величин.

Формулу (5.48) можно доказать непосредственно, с помощью основных методов из начала этой главы. Если при любом $n \geqslant 0$ справедливо $g(n) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k f(k)$, то

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k g(k) &= \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k \sum_j \binom{k}{j}(-1)^j f(j) \\
&= \sum_j f(j) \sum_k \binom{n}{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j} \\
&= \sum_j f(j) \sum_k \binom{n}{j}(-1)^{k+j}\binom{n-j}{k-j} \\
&= \sum_j f(j)\binom{n}{j} \sum_k (-1)^k \binom{n-j}{k} \\
&= \sum_j f(j)\binom{n}{j}[n-j=0] \;=\; f(n).
\end{aligned}$$

Доказательство в другую сторону, разумеется, такое же, поскольку связь между f и g симметрична.

Проиллюстрируем формулу (5.48), применив ее к „задаче о победе футбольной команды“. Группа из n фанатов выигрывающей футбольной команды на радостях бросает свои шляпы в воздух. Шляпы возвращаются в случайном порядке — по одной к каждому из n болельщиков. Сколько возможностей $h(n,k)$ того, что ровно k болельщиков получат назад свои собственные шляпы?

Так, если $n = 4$ и если шляпы и болельщики обозначены буквами A, B, C, D, то $4! = 24$ возможных варианта приземления

шляп дают следующие количества их законных владельцев:

ABCD	4	BACD	2	CABD	1	DABC	0
ABDC	2	BADC	0	CADB	0	DACB	1
ACBD	2	BCAD	1	CBAD	2	DBAC	1
ACDB	1	BCDA	0	CBDA	1	DBCA	2
ADBC	1	BDAC	0	CDAB	0	DCAB	0
ADCB	2	BDCA	1	CDBA	0	DCBA	0

Следовательно, $h(4,4) = 1$, $h(4,3) = 0$, $h(4,2) = 6$, $h(4,1) = 8$, $h(4,0) = 9$.

Определить $h(n,k)$ можно, заметив, что это число способов выбора k счастливых обладателей шляп, а именно $\binom{n}{k}$, помноженное на число способов упорядочения оставшихся $n-k$ шляп так, что ни одна из них не попадает к законному владельцу, а именно на $h(n-k,0)$. Перестановка называется *беспорядком*, если в ней переставлен каждый предмет, а само число беспорядков из n предметов иногда обозначается символом '$n¡$', произносимым как „n субфакториал". Таким образом, $h(n-k,0) = (n-k)¡$, а общая формула выглядит так:

$$h(n,k) = \binom{n}{k}h(n-k,0) = \binom{n}{k}(n-k)¡\,.$$

(Стандартного обозначения для субфакториала не существует, и не ясно, насколько удачно наше; тем не менее, пока попробуем использовать его — там будет видно, понравится ли оно нам. Если '$n¡$' нас не устроит, то всегда можно прибегнуть к 'D_n' или чему-нибудь в этом роде.)

Задача оказалась бы решенной, если бы у нас было выражение в замкнутой форме для $n¡$, так что посмотрим, как его можно найти. Поскольку сумма $h(n,k)$ по всем k — это общее число перестановок из n шляп, то можно легко получить рекуррентность:

$$\begin{aligned} n! = \sum_k h(n,k) &= \sum_k \binom{n}{k}(n-k)¡ \\ &= \sum_k \binom{n}{k}k¡\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

(На последнем шаге k заменяется на $n-k$, а $\binom{n}{n-k}$ — на $\binom{n}{k}$.) С помощью этой неявной рекуррентности можно вычислить все $h(n,k)$, какие пожелаем:

n	$h(n,0)$	$h(n,1)$	$h(n,2)$	$h(n,3)$	$h(n,4)$	$h(n,5)$	$h(n,6)$
0	1						
1	0	1					
2	1	0	1				
3	2	3	0	1			
4	9	8	6	0	1		
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

Вот, например, как можно вычислить строку для $n = 4$. Два крайних справа элемента очевидны — имеется только один вариант того, что все шляпы попадут к своим владельцам, и ни одного варианта того, что только три болельщика получат назад свои собственные шляпы. (Чью шляпу поймал бы тогда четвертый болельщик?) Если $k = 2$ и $k = 1$, то можно воспользоваться нашим уравнением для $h(n,k)$ и получить $h(4,2) = \binom{4}{2}h(2,0) = 6 \cdot 1 = 6$, и $h(4,1) = \binom{4}{1}h(3,0) = 4 \cdot 2 = 8$. Этим уравнением нельзя воспользоваться для вычисления $h(4,0)$ — вернее, можно, но тогда получим $h(4,0) = \binom{4}{0}h(4,0)$, что правильно, но бесполезно. Перестроившись, можно воспользоваться соотношением $h(4,0)+8+6+0+1 = 4!$ с выяснением того, что $h(4,0) = 9$ — это и есть значение $4¡$. Аналогичным образом $n¡$ зависит от других значений $k¡$ при $k < n$.

Искусство математики, как и жизни, состоит в том, чтобы узнать, какие истины бесполезны.

Но как разрешить рекуррентность типа (5.49)? Ну, это просто: она имеет вид (5.48) с $g(n) = n!$ и $f(k) = (-1)^k k¡$. Следовательно, ее решением является

$$n¡ = (-1)^n \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k k!\,.$$

Однако это, на самом деле, еще не решение, а сумма, которую следует выразить в замкнутой форме, если это возможно. Тем не менее, это все же лучше, чем рекуррентность. Данную сумму можно упростить, поскольку $k!$ сокращается с $k!$, спрятанным в $\binom{n}{k}$, так что попробуем это сделать:

$$n¡ = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^{n+k} = n! \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k!}\,. \qquad (5.50)$$

Оставшаяся часть суммы быстро сходится к числу $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k/k! = e^{-1}$. Действительно, остальные члены в сумме дают

$$n! \sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+n+1)!}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \cdots\right),$$

где заключенная в скобки величина лежит между 1 и $1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$. Следовательно, абсолютная величина разности $n¡$ и $n!/e$ равна приблизительно $1/n$ — точнее, она лежит между $1/(n+1)$ и $1/(n+2)$. Но $n¡$ — целое число, поэтому оно должно быть равно числу, которое мы получаем при округлении $n!/e$ до ближайшего целого при $n > 0$. Итак, получено искомое решение в замкнутой форме:

$$n¡ = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor + [n=0]\,. \qquad (5.51)$$

Это число вариантов того, что ни один из болельщиков не получит назад свою собственную шляпу. При большом n более существенно знать *вероятность*, с которой это происходит. Если предположить, что каждый из $n!$ исходов равновероятен — ибо все шляпы взлетели очень высоко,— то данная вероятность равна

Бейсбольные болельщики: .367 — это также коэффициент бэттера Тая Кобба за всю его спортивную карьеру — никем не превзойденный рекорд. Неужели это просто совпадение?

$$\frac{n¡}{n!} = \frac{n!/e + O(1)}{n!} \sim \frac{1}{e} = .367\ldots.$$

Так что когда число n становится большим, вероятность того, что все шляпы будут перепутаны, составляет почти 37%.

(Подождите-ка, вы что-то путаете. Коэффициент Кобба был 4191/11429 ≈ .366699, тогда как 1/e ≈ .367879. Вот если бы Уэйд Боггс провел несколько по-настоящему удачных сезонов...)

Между прочим, рекуррентность (5.49) для субфакториалов точно такая же, как и (5.46) — первая рекуррентность, рассмотренная Стирлингом, когда он пытался обобщить факториальную функцию. Следовательно, $S_k = k¡$. А эти коэффициенты настолько велики, что неудивительно, что бесконечный ряд (5.46) расходится при нецелом x.

Прежде чем покончить с этой задачей, рассмотрим вкратце две интересные закономерности, которые так и смотрят на нас из таблицы начальных значений $h(n, k)$. Во-первых, судя по всему, числа 1, 3, 6, 10, 15, ..., расположенные под диагональю из нулей, являются треугольными числами. Это наблюдение легко проверяется, поскольку данные элементы таблицы суть числа $h(n, n-2)$, а

$$h(n, n-2) = \binom{n}{n-2} 2¡ = \binom{n}{2}.$$

Кроме того, похоже, что числа в первых двух колонках отличаются друг от друга на ± 1. Всегда ли это справедливо? Да, поскольку

$$\begin{aligned} h(n,0) - h(n,1) &= n¡ - n(n-1)¡ \\ &= \left(n! \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - \left(n(n-1)! \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\ &= n! \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Другими словами, $n¡ = n(n-1)¡ + (-1)^n$. Это гораздо более простая рекуррентность для числа беспорядков, чем та, с которой мы имели дело раньше.

Теперь применим инверсию к чему-нибудь еще. Если применить инверсию к формуле

Но инверсия — это источник смога.

$$\sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} \binom{x+n}{n}^{-1},$$

которая была выведена нами в (5.41), то выяснится, что

$$\frac{x}{x+n} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k} (-1)^k \binom{x+k}{k}^{-1}.$$

Это интересно, но в действительности не ново: если обратить верхний индекс в $\binom{x+k}{k}$, то мы просто-напросто снова получим тождество (5.33).

5.4 ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Вот мы и добрались до самого важного — понятия *производящей функции.* Представляющую для нас интерес бесконечную последовательность $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ удобно выразить в виде *степенного ряда* относительно вспомогательной переменной z,

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k. \tag{5.52}$$

Использование буквы z для обозначения вспомогательной переменной объясняется тем, что зачастую под z подразумевается комплексное число. Теория комплексного переменного традиционно использует 'z' в своих формулах, а степенные ряды (известные также как аналитические или голоморфные функции) занимают в этой теории одно из центральных мест.

„Производящая функция является устройством, отчасти напоминающим мешок. Вместо того чтобы нести отдельно много предметов, что могло бы оказаться затруднительным, мы собираем их вместе, и тогда нам нужно нести лишь один предмет — мешок.“
— Д. Пойа, [242, с. 123]. (Добавл. перев.)

В последующих главах мы будем постоянно сталкиваться с производящими функциями; в частности, им будет полностью посвящена гл. 7. А пока наша цель состоит всего лишь в том, чтобы ввести основные понятия и продемонстрировать уместность использования производящих функций при изучении биномиальных коэффициентов.

Главное достоинство производящей функции заключается в том, что одной ею можно представить всю бесконечную последовательность. Зачастую при решении тех или иных задач можно сначала обратиться к производящим функциям, а затем изрядно с ними повозившись и выудив массу информации, вновь вернуться к их коэффициентам. При известной доле везения мы узнаем о функции достаточно, для того чтобы выяснить все, что нам требуется знать о ее коэффициентах.

Если $A(z)$ — некоторый степенной ряд $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$, то нам будет удобно записать его в виде

(В [155] рассматривается история и обсуждается польза этого понятия.)

$$[z^n]\, A(z) = a_n\,; \tag{5.53}$$

другими словами, $[z^n]\, A(z)$ означает коэффициент при z^n в разложении $A(z)$.

Пусть $A(z)$ — производящая функция для последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ как в (5.52), и пусть $B(z)$ — производящая функция

для другой последовательности $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$. Тогда произведением $A(z)B(z)$ является степенной ряд

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \cdots$$

с коэффициентами при z^n

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Следовательно, если нужно вычислить сумму, которая имеет общий вид

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \qquad (5.54)$$

и если известны производящие функции $A(z)$ и $B(z)$, то

$$c_n = [z^n]\, A(z)B(z).$$

Последовательность $\langle c_n \rangle$, определенная по правилу (5.54), называется *сверткой* последовательностей $\langle a_n \rangle$ и $\langle b_n \rangle$ — две последовательности „свертываются", образуя суммы произведений всех тех элементов последовательностей, нижние индексы которых при сложении дают некоторую определенную величину. Суть предыдущего абзаца состоит в том, что свертка последовательностей соответствует умножению их производящих функций.

Производящие функции обеспечивают нас действенными средствами обнаружения и/или подтверждения тождеств. Так, биномиальная теорема указывает на то, что $(1+z)^r$ — это производящая функция для последовательности $\langle \binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots \rangle$:

$$(1+z)^r = \sum_{k \geqslant 0} \binom{r}{k} z^k.$$

Аналогично,

$$(1+z)^s = \sum_{k \geqslant 0} \binom{s}{k} z^k.$$

Если перемножить эти производящие функции, то получим другую производящую функцию:

$$(1+z)^r (1+z)^s = (1+z)^{r+s}.$$

А теперь наступает кульминационный момент: приравнивание коэффициентов при z^n в обеих частях этого равенства дает

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$$

(5.27)! = (5.27)(4.27)(3.27)(2.27)(1.27)(0.27)!.

и мы переоткрыли правило свертки Вандермонда (5.27)!

Так просто и славно — давайте попробуем еще. На этот раз воспользуемся выражением $(1-z)^r$, которое для последовательности

$\langle(-1)^n\binom{r}{n}\rangle = \langle\binom{r}{0}, -\binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots\rangle$ является производящей функцией. Умножение на $(1+z)^r$ дает другую производящую функцию, коэффициенты которой нам известны:

$$(1-z)^r(1+z)^r = (1-z^2)^r .$$

Приравнивание коэффициентов при z^n приводит теперь к равенству

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{r}{n-k}(-1)^k = (-1)^{n/2}\binom{r}{n/2}[n \text{ четное}] . \qquad (5.55)$$

Не мешало бы проверить это на одном-двух простых случаях. Так, при $n = 3$ получаем

$$\binom{r}{0}\binom{r}{3} - \binom{r}{1}\binom{r}{2} + \binom{r}{2}\binom{r}{1} - \binom{r}{3}\binom{r}{0} = 0 .$$

Каждый положительный член сокращается с соответствующим отрицательным членом. То же самое происходит всякий раз, когда n — нечетное число; в таком случае данная сумма не представляет особого интереса. Однако, когда n — четное, скажем $n = 2$, получаем нетривиальную сумму, отличную от свертки Вандермонда:

$$\binom{r}{0}\binom{r}{2} - \binom{r}{1}\binom{r}{1} + \binom{r}{2}\binom{r}{0} = 2\binom{r}{2} - r^2 = -r .$$

Таким образом, при $n = 2$ равенство (5.55) подтверждается как нельзя лучше. Оказывается, что (5.30) — это частный случай нового тождества (5.55).

Биномиальные коэффициенты появляются также и в некоторых других производящих функциях — особенно примечательны следующие важные соотношения, в которых нижний индекс остается фиксированным, а верхний — изменяется:

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{n}z^k , \qquad \text{целое } n \geqslant 0, \qquad (5.56)$$

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{k}{n}z^k , \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (5.57)$$

Если у вас есть маркер, то эти два равенства заслуживают того, чтобы их выделили.

Здесь второе соотношение — это всего лишь первое, умноженное на z^n, т. е. „сдвинутое вправо“ на n. А первое соотношение — это всего слегка замаскированный частный случай биномиальной теоремы: если в соответствии с (5.13) разложить $(1-z)^{-n-1}$, то коэффициентом при z^k является $\binom{-n-1}{k}(-1)^k$, который может быть переписан в виде $\binom{k+n}{k}$ или в виде $\binom{n+k}{n}$ после обращения верхнего индекса. Эти частные случаи заслуживают явного упоминания, поскольку они довольно часто возникают в приложениях.

... несчастного случая...

При $n = 0$ получаем частный случай этого частного случая — геометрический ряд

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{k \geqslant 0} z^k .$$

Это производящая функция для последовательности $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$, и она особенно полезна потому, что свертка любой другой последовательности с данной представляет собой последовательность сумм: если $b_k = 1$ при любом k, то (5.54) сводится к

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Поэтому, если $A(z)$ — производящая функция для членов суммы $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$, то $A(z)/(1-z)$ — производящая функция для их сумм $\langle c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$.

Задачу о беспорядках, связанную с футбольными болельщиками и их шляпами, которую мы решили путем обращения, можно решить с помощью производящих функций еще одним интересным способом. Основная в этой задаче рекуррентность

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} (n-k)¡$$

может быть представлена в виде свертки, если выразить $\binom{n}{k}$ через факториалы и разделить обе части на $n!$:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k)¡}{(n-k)!} .$$

Производящая функция для последовательности $\langle \frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots \rangle$ есть e^z; следовательно, если положить

$$D(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{k¡}{k!} z^k ,$$

то данная свертка/рекуррентность указывает на то, что

$$\frac{1}{1-z} = e^z D(z) .$$

Разрешая это относительно $D(z)$, получаем

$$D(z) = \frac{1}{1-z} e^{-z} = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{0!} z^0 - \frac{1}{1!} z^1 + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots \right) .$$

Приравнивание коэффициентов при z^n показывает теперь, что

$$\frac{n¡}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} ,$$

а это является той самой формулой, которая была выведена ранее путем обращения.

До сих пор наши упражнения с производящими функциями приводили к тонким доказательствам того, что мы и так умели получать более грубыми методами — мы не получили никаких новых результатов, за исключением (5.55). Теперь мы намерены установить нечто новое и даже удивительное. Существуют два семейства степенных рядов, которые порождают особенно обширный класс тождеств с биномиальными коэффициентами. Определим *обобщенный биномиальный ряд* $\mathcal{B}_t(z)$ и *обобщенный экспоненциальный ряд* $\mathcal{E}_t(z)$ следующим образом:

$$\mathcal{B}_t(z) = \sum_{k\geqslant 0}(tk)^{\underline{k-1}}\frac{z^k}{k!}, \qquad \mathcal{E}_t(z) = \sum_{k\geqslant 0}(tk+1)^{k-1}\frac{z^k}{k!}. \qquad (5.58)$$

Мы покажем в разд. 7.5, что данные функции удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{B}_t(z)^{1-t} - \mathcal{B}_t(z)^{-t} = z, \qquad \mathcal{E}_t(z)^{-t}\ln\mathcal{E}_t(z) = z. \qquad (5.59)$$

В частном случае $t = 0$ имеем

$$\mathcal{B}_0(z) = 1+z, \qquad \mathcal{E}_0(z) = e^z;$$

это объясняет, почему ряды с произвольным параметром t называются „обобщенными" биномиальным и экспоненциальным рядами.

Следующие пары соотношений справедливы при любом вещественном r:

Обобщенный биномиальный ряд открыл в 1750 г. Дж. Х. Ламберт [178, §38], который несколькими годами позже заметил [179], что его степени удовлетворяют первому тождеству в (5.60). В упр. 84 объясняется, как из (5.61) получить (5.60).

$$\mathcal{B}_t(z)^r = \sum_{k\geqslant 0}\binom{tk+r}{k}\frac{r}{tk+r}z^k,$$

$$\mathcal{E}_t(z)^r = \sum_{k\geqslant 0} r\frac{(tk+r)^{k-1}}{k!}z^k; \qquad (5.60)$$

$$\frac{\mathcal{B}_t(z)^r}{1-t+t\mathcal{B}_t(z)^{-1}} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{tk+r}{k}z^k;$$

$$\frac{\mathcal{E}_t(z)^r}{1-zt\mathcal{E}_t(z)^t} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(tk+r)^k}{k!}z^k. \qquad (5.61)$$

(Если $tk + r = 0$, то нужно проявить некоторую осторожность относительно того, как интерпретировать коэффициент при z^k — каждый такой коэффициент является многочленом относительно r. К примеру, постоянным членом ряда $\mathcal{E}_t(z)^r$ является $r(0+r)^{-1}$, а это равно 1 даже при $r = 0$.)

Поскольку уравнения (5.60) и (5.61) справедливы при любом r, то можно получить весьма общие соотношения, если перемножить ряды, которые соответствуют различным степеням r и s.

Таблица 229 Общие соотношения свертки, справедливые при целом $n \geqslant 0$.

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r} = \binom{tn+r+s}{n}. \qquad (5.62)$$

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r}\cdot\frac{s}{tn-tk+s} = \binom{tn+r+s}{n}\frac{r+s}{tn+r+s}. \qquad (5.63)$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(tk+r)^k(tn-tk+s)^{n-k}\frac{r}{tk+r} = (tn+r+s)^n. \qquad (5.64)$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(tk+r)^k(tn-tk+s)^{n-k}\frac{r}{tk+r}\cdot\frac{s}{tn-tk+s} = (tn+r+s)^n\frac{r+s}{tn+r+s}. \qquad (5.65)$$

Так,

$$\mathcal{B}_t(z)^r\frac{\mathcal{B}_t(z)^s}{1-t+t\mathcal{B}_t(z)^{-1}} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{tk+r}{k}\frac{r}{tk+r}z^k\sum_{j\geqslant 0}\binom{tj+s}{j}z^j = \sum_{n\geqslant 0}z^n\sum_{k\geqslant 0}\binom{tk+r}{k}\frac{r}{tk+r}\binom{t(n-k)+s}{n-k}.$$

Этот степенной ряд должен быть равен

$$\frac{\mathcal{B}_t(z)^{r+s}}{1-t+t\mathcal{B}_t(z)^{-1}} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{tn+r+s}{n}z^n,$$

следовательно, можно приравнять коэффициенты при z^n и получить тождество

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{t(n-k)+s}{n-k}\frac{r}{tk+r} = \binom{tn+r+s}{n}, \quad \text{целое } n,$$

справедливое при любых вещественных r, s и t. При $t=0$ это тождество сводится к свертке Вандермонда. (Если же в этой формуле $tk+r$ случайно обращается в нуль, то множитель $tk+r$ в знаменателе следует рассматривать как сокращающийся с $tk+r$ в числителе биномиального коэффициента. Обе части данного соотношения являются многочленами относительно r, s, и t.) Аналогичные соотношения имеют место при умножении $\mathcal{B}_t(z)^r$ на $\mathcal{B}_t(z)^s$ и т. д.— их сводка представлена в табл. 229.

Мы уже научены тому, что вообще-то неплохо рассмотреть частные случаи общих результатов. Например, что случится, если положить $t = 1$? Обобщенный биномиальный ряд $\mathcal{B}_1(z)$ весьма прост — это всего лишь

$$\mathcal{B}_1(z) = \sum_{k\geqslant 0} z^k = \frac{1}{1-z},$$

так что $\mathcal{B}_1(z)$ ничего не добавляет к тому, что нам уже известно из свертки Вандермонда. Но $\mathcal{E}_1(z)$ — это важная функция

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)^{k-1}\frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{125}{24}z^4 + \cdots, \qquad (5.66)$$

которая еще не встречалась,— она удовлетворяет основному соотношению

$$\mathcal{E}(z) = e^{z\mathcal{E}(z)}. \qquad (5.67)$$

Ага! Это итерированная степенная функция $\mathcal{E}(\ln z) = z^{z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, о которой мне давно хотелось узнать.

Zzzzzz...

Эта функция, впервые изученная Эйлером [381] и Эйзенштейном [362], возникает во многих приложениях [401, 229].

Частные случаи $t = 2$ и $t = -1$ обобщенного биномиального ряда представляют особенный интерес, поскольку их коэффициенты то и дело встречаются в задачах, имеющих рекурсивную структуру. Поэтому имеет смысл воспроизвести эти ряды непосредственно — для последующих ссылок на них:

Степенной ряд для $\mathcal{B}_{1/2}(z)^r = (\sqrt{z^2+4}+z)^{2r}/4^r$ тоже поучителен.

$$\mathcal{B}_2(z) = \sum_k \binom{2k}{k}\frac{z^k}{1+k} = \sum_k \binom{2k+1}{k}\frac{z^k}{1+2k} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}. \qquad (5.68)$$

$$\mathcal{B}_{-1}(z) = \sum_k \binom{1-k}{k}\frac{z^k}{1-k} = \sum_k \binom{2k-1}{k}\frac{(-z)^k}{1-2k} = \frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}. \qquad (5.69)$$

$$\mathcal{B}_2(z)^r = \sum_k \binom{2k+r}{k}\frac{r}{2k+r}z^k. \qquad (5.70)$$

$$\mathcal{B}_{-1}(z)^r = \sum_k \binom{r-k}{k}\frac{r}{r-k}z^k. \qquad (5.71)$$

$$\frac{\mathcal{B}_2(z)^r}{\sqrt{1-4z}} = \sum_k \binom{2k+r}{k} z^k. \qquad (5.72)$$

$$\frac{\mathcal{B}_{-1}(z)^{r+1}}{\sqrt{1+4z}} = \sum_k \binom{r-k}{k} z^k. \qquad (5.73)$$

Коэффициенты $\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ в $\mathcal{B}_2(z)$ называются *числами Каталана* C_n, по имени Эжена Каталана, написавшего о них основополагающую работу в 30-х годах прошлого столетия [127]. Последовательность этих чисел начинается следующим образом:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Коэффициенты в $\mathcal{B}_{-1}(z)$ по существу те же самые, за исключением дополнительной 1 в начале и чередования знаков у всех остальных чисел: $\langle 1, 1, -1, 2, -5, 14, \ldots \rangle$. Таким образом, $\mathcal{B}_{-1}(z) = 1 + z\mathcal{B}_2(-z)$ или же $\mathcal{B}_{-1}(z) = \mathcal{B}_2(-z)^{-1}$.

Завершим этот раздел выводом важного следствия из (5.72) и (5.73) — соотношения, выявляющего дополнительные связи между функциями $\mathcal{B}_{-1}(z)$ и $\mathcal{B}_2(-z)$:

$$\frac{\mathcal{B}_{-1}(z)^{n+1} - (-z)^{n+1}\mathcal{B}_2(-z)^{n+1}}{\sqrt{1+4z}} = \sum_{k\leqslant n} \binom{n-k}{k} z^k.$$

Данное соотношение справедливо потому, что в случае $k > n$ коэффициенты при z^k в разложении $(-z)^{n+1}\mathcal{B}_2(-z)^{n+1}/\sqrt{1+4z}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
[z^k]\,\frac{(-z)^{n+1}\mathcal{B}_2(-z)^{n+1}}{\sqrt{1+4z}} &= (-1)^{n+1}[z^{k-n-1}]\,\frac{\mathcal{B}_2(-z)^{n+1}}{\sqrt{1+4z}} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{k-n-1}[z^{k-n-1}]\,\frac{\mathcal{B}_2(z)^{n+1}}{\sqrt{1-4z}} \\
&= (-1)^k\binom{2(k-n-1)+n+1}{k-n-1} \\
&= (-1)^k\binom{2k-n-1}{k-n-1} \\
&= (-1)^k\binom{2k-n-1}{k} \\
&= \binom{n-k}{k} = [z^k]\,\frac{\mathcal{B}_{-1}(z)^{n+1}}{\sqrt{1+4z}}.
\end{aligned}$$

Все члены чудненько сокращаются друг с дружкой. Теперь можно воспользоваться соотношениями (5.68) и (5.69), чтобы выразить сумму в замкнутой форме:

$$\sum_{k\leqslant n}\binom{n-k}{k}z^k = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1}\right),$$

целое $n \geqslant 0$. (5.74)

(Частный случай $z = -1$ возникал в задаче 3 из разд. 5.2. Поскольку числа $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}\,)$ являются корнями шестой степени из единицы, то суммы вида $\sum_{k\leqslant n}\binom{n-k}{k}(-1)^k$ обнаруживают периодическое поведение, что наблюдалось нами в той задаче.) Аналогично можно объединить (5.70) и (5.71), с тем чтобы избавиться от громоздких коэффициентов, получая

$$\sum_{k<n}\binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k}z^k = \left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n},$$

целое $n > 0$. (5.75)

5.5 ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

„Так как этот гипергеометрический язык еще отталкивает от себя многие серьезные умы, я буду употреблять его редко.“
— А. Пуанкаре (Добавл. перев.)

Методы, которые мы применяли к биномиальным коэффициентам, весьма эффективны в тех случаях, когда они работают, но необходимо иметь в виду, что зачастую они оказываются довольно специфичными — это скорее приемы, нежели методы. Занимаясь какой-нибудь задачей, мы часто движемся к решению по многим направлениям, а порой можем обнаружить себя двигающимися по кругу. Биномиальные коэффициенты подобны хамелеонам, с легкостью изменяющим свою внешность. Поэтому естественно задаться вопросом: а нет ли какого-нибудь унифицирующего принципа, который бы систематизировал сразу все многообразие методов суммирования биномиальных коэффициентов. К счастью, ответ положительный. Сей унифицирующий принцип основан на теории определенных бесконечных сумм, называемых *гипергеометрическими рядами*.

Они еще более изменчивы, чем хамелеоны: их можно расчленить, а затем сочленить разными способами.

Начало изучению гипергеометрических рядов было положено много лет назад Эйлером, Гауссом и Риманом, и до сих пор подобные ряды остаются предметом обширных исследований. Однако гипергеометрическая форма записи выглядит довольно устрашающе — требуется некоторое время, чтобы к ней привыкнуть.

То, что пережив века, сохранило такую страшную форму записи, наверняка должно быть полезным.

Обобщенный гипергеометрический ряд — это степенной ряд относительно z с $m + n$ параметрами, который выражается че-

рез возрастающие факториальные степени следующим образом:

$$F\left({a_1, \ldots, a_m \atop b_1, \ldots, b_n} \middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_1^{\overline{k}} \ldots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \ldots b_n^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}. \tag{5.76}$$

Чтобы избежать деления на нуль, ни одно из b не может быть нулем или целым отрицательным числом. В остальном a и b могут быть какими угодно числами. В качестве альтернативы двухстрочной форме записи (5.76) используется также запись '$F(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; z)$', поскольку запись в одну строку иногда более удобна из типографских соображений. Величины a называются *верхними параметрами* — они входят в числитель членов суммы F. Величины b называются *нижними параметрами* — они входят в их знаменатель. Последняя величина z называется *аргументом*.

В стандартных руководствах для обозначения гипергеометрического ряда с m верхними параметрами и n нижними параметрами вместо 'F' часто используется '${}_mF_n$'. Однако дополнительные нижние индексы имеют тенденцию загромождать формулы и отнимать у нас время, поскольку приходится без конца их переписывать. Проще подсчитать количество параметров, так что зачастую нет необходимости в излишней никому не нужной писанине.

Многие важные функции получаются как частные случаи обобщенной гипергеометрической — вот чем так сильны гипергеометрические функции. Так, простейший случай получается при $m = n = 0$: в этом случае параметры вообще отсутствуют, и мы получаем знакомый ряд

$$F\left(\middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

На самом деле, когда m или n равны нулю, эта запись выглядит несколько обескураживающе. Для того чтобы этого избежать, можно ввести дополнительно верхнюю и нижнюю единицы:

$$F\left({1 \atop 1} \middle| z\right) = e^z.$$

И вообще, данная функция не изменится, если мы удалим параметр, который входит как в числитель, так и в знаменатель, или же добавим два одинаковых параметра.

Следующий простейший случай — это $m = 1$, $a_1 = 1$ и $n = 0$, но мы заменим параметры на $m = 2$, $a_1 = a_2 = 1$, $n = 1$ и $b_1 = 1$, так, чтобы было $n > 0$. Этот ряд также оказывается знакомым, ибо $1^{\overline{k}} = k!$:

$$F\left({1, 1 \atop 1} \middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$

Это наш старый знакомый — геометрический ряд: функция $F(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; z)$ названа гипергеометрической потому, что она включает геометрический ряд $F(1, 1; 1; z)$ в качестве своего весьма частного случая.

Важный случай $m = 1$ и $n = 0$ в действительности легко суммируем в замкнутой форме, если использовать (5.56):

$$F\left({a, 1 \atop 1} \middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} a^{\overline{k}} \frac{z^k}{k!} = \sum_k \binom{a+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^a}. \quad (5.77)$$

А если заменить a на $-a$ и z на $-z$, то получаем биномиальный ряд

$$F\left({-a, 1 \atop 1} \middle| -z\right) = (1+z)^a.$$

Целое отрицательное число в качестве верхнего параметра делает конечным бесконечный ряд, поскольку $(-a)^{\overline{k}} = 0$ всякий раз, когда $k > a \geqslant 0$ и a — целое.

Важный случай $m = 0$, $n = 1$ доставляет другой знаменитый ряд, хотя он и не столь известен в литературе по дискретной математике:

$$F\left({1 \atop b, 1} \middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(b-1)!}{(b-1+k)!} \frac{z^k}{k!} = I_{b-1}(2\sqrt{z}) \frac{(b-1)!}{z^{(b-1)/2}}. \quad (5.78)$$

Функция I_{b-1} называется „модифицированной бесселевой функцией“ порядка $b-1$. В частности, при $b = 1$ получается функция $F\left({1 \atop 1,1} \middle| z\right) = I_0(2\sqrt{z})$, которая интересна своим рядом $\sum_{k \geqslant 0} z^k/k!^2$.

Специальный случай $m = n = 1$ носит название „конфлюэнтного“ (вырожденного) гипергеометрического ряда и зачастую обозначается буквой M:

$$F\left({a \atop b} \middle| z\right) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a^{\overline{k}}}{b^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!} = M(a, b, z). \quad (5.79)$$

Эта функция, имеющая важные применения в технике, была введена Эрнстом Куммером.

Некоторых из нас, возможно, беспокоит вопрос, почему до сих пор не обсуждалась сходимость бесконечного ряда (5.76). Дело в том, что сходимостью можно пренебречь, если рассматривать z просто как некий формальный символ. Нетрудно убедиться, что формальные бесконечные суммы вида $\sum_{k \geqslant n} \alpha_k z^k$ образуют поле, если их коэффициенты α_k лежат в некотором поле. Подобные формальные суммы можно складывать, вычитать, умножать, делить, дифференцировать и устраивать их композицию, не беспокоясь о сходимости: любые соотношения, которые мы выводим, формально справедливы. Так, гипергеометрический ряд

Так ведь сходимость (5.56), (5.57), (5.58), … тоже не обсуждалась.

$F\binom{1,1,1}{1}\big|z) = \sum_{k\geqslant 0} k!\,z^k$ не сходится при любом отличном от нуля z — тем не менее в гл. 7 мы увидим, что этот ряд вполне можно использовать для решения задач. С другой стороны, всякий раз, когда z заменяется определенным числовым значением, у нас должна быть уверенность в том, что данная бесконечная сумма определена надлежащим образом.

Следующим по возрастанию степени сложности является самый знаменитый из всех гипергеометрический ряд. В действительности он был *собственно* гипергеометрическим рядом примерно до 1870 г., когда все было обобщено на произвольные m и n. Этот же ряд имеет два верхних параметра и один нижний:

$$F\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,z\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^{\overline{k}}\,b^{\overline{k}}\,z^k}{c^{\overline{k}}\,k!}\,. \qquad (5.80)$$

Его часто называют гауссовым гипергеометрическим, поскольку многие из его тонких свойств впервые были доказаны Гауссом в докторской диссертации 1812 г. [68], хотя уже Эйлеру [382] и Пфаффу [249] были известны некоторые замечательные свойства этого ряда. Одним из его важных случаев является ряд

„Пожалуй 95% (если не все 100%) функций, изучаемых в настоящее время во многих университетах студентами-физиками, инженерами и даже математиками, могут быть охвачены одним-единственным символом $F(a, b; c; x)$.*“*
— У. У. Сойер [277]

$$\ln(1+z) = zF\left(\begin{matrix}1, 1\\ 2\end{matrix}\,\middle|\,-z\right) = z\sum_{k\geqslant 0}\frac{k!\,k!}{(k+1)!}\frac{(-z)^k}{k!}$$
$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\,.$$

Заметим, что $z^{-1}\ln(1+z)$ представляет собой гипергеометрическую функцию, но сама функция $\ln(1+z)$ таковой не является, поскольку величина гипергеометрического ряда всегда равна 1 при $z = 0$.

До сих пор гипергеометрические ряды фактически ничего нам не дали, кроме повода для упоминания ряда громких имен. Но мы увидели, что несколько весьма различных функций могут рассматриваться как гипергеометрические ряды — вот что будет основным предметом нашего интереса в дальнейшем. Мы увидим, что обширный класс сумм может быть записан в виде гипергеометрического ряда некоторым „каноническим“ способом — следовательно, мы будем располагать удобной системой учета фактов о биномиальных коэффициентах.

Какие же ряды являются гипергеометрическими? На этот вопрос легко ответить, если рассмотреть отношение последовательных членов ряда

$$F\left(\begin{matrix}a_1, \ldots, a_m\\ b_1, \ldots, b_n\end{matrix}\,\middle|\,z\right) = \sum_{k\geqslant 0} t_k, \qquad t_k = \frac{a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}\,z^k}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}\,k!}\,.$$

Первый член — это $t_0 = 1$, а другие члены определяются отношениями

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{a_1^{\overline{k+1}} \ldots a_m^{\overline{k+1}}}{a_1^{\overline{k}} \ldots a_m^{\overline{k}}} \, \frac{b_1^{\overline{k}} \ldots b_n^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k+1}} \ldots b_n^{\overline{k+1}}} \, \frac{k!}{(k+1)!} \, \frac{z^{k+1}}{z^k}$$

$$= \frac{(k+a_1)\ldots(k+a_m)z}{(k+b_1)\ldots(k+b_n)(k+1)}. \qquad (5.81)$$

Это *рациональная функция* по k, т. е. отношение двух многочленов относительно k. По основной теореме алгебры любая рациональная по k функция может быть разложена на множители над полем комплексных чисел и приведена к подобному виду. Величины a в числителе — противоположны корням одного многочлена, а величины b в знаменателе — суть противоположные величины к корням другого многочлена. Если только в знаменатель уже не входит отдельный множитель $(k+1)$, то его можно ввести как в числитель, так и в знаменатель. Остается постоянный множитель, который можно обозначить через z. Таким образом, гипергеометрические ряды — это в точности такие ряды, первым членом которых является 1, а отношение членов t_{k+1}/t_k является некоторой рациональной функцией от k.

Предположим, например, что бесконечный ряд задан с отношением членов

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k^2+7k+10}{4k^2+1},$$

являющимся рациональной по k функцией. Многочлен в числителе чудно распадается на два множителя $(k+2)(k+5)$, а знаменатель представляет собой произведение $4(k+i/2)(k-i/2)$. Поскольку в знаменателе отсутствует необходимый множитель $(k+1)$, записываем отношение членов в виде

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+2)(k+5)(k+1)(1/4)}{(k+i/2)(k-i/2)(k+1)},$$

и можно считывать результат: заданный ряд — это

$$\sum_{k\geqslant 0} t_k = t_0\, F\left({2, 5, 1 \atop i/2, -i/2} \middle| 1/4\right).$$

Таким образом, установлен общий метод нахождения гипергеометрического представления некоторой заданной величины S, если такое представление возможно. Вначале S записывается в виде бесконечного ряда, первый член которого отличен от нуля. Выберем такие обозначения, чтобы это был ряд $\sum_{k\geqslant 0} t_k$ с $t_0 \neq 0$. Затем вычисляется t_{k+1}/t_k. Если отношение членов не является рациональной функцией, нам не повезло. В противном случае выразим его в виде (5.81), что дает параметры $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ и аргумент z, такой, что $S = t_0\, F(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; z)$.

(Сейчас самое время размяться упр. 11.)

Гауссов гипергеометрический ряд может быть записан и в рекурсивной форме

$$F\left({a,b \atop c}\middle| z\right) = 1 + \frac{a}{1}\frac{b}{c}z\left(1 + \frac{a+1}{2}\frac{b+1}{c+1}z\left(1 + \frac{a+2}{3}\frac{b+2}{c+2}z(1+\cdots)\right)\right),$$

если требуется подчеркнуть важность отношения членов.

А теперь попробуем переформулировать гипергеометрически те тождества с биномиальными коэффициентами, которые были выведены ранее в этой главе. К примеру, давайте выясним, как выглядит правило суммирования по диагонали

$$\sum_{k\leqslant n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}, \qquad \text{целое } n,$$

в гипергеометрической записи. Для этого надо записать данную сумму в виде бесконечного ряда, который начинается с $k = 0$, поэтому заменим k на $n - k$:

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{r+n-k}{n-k} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(r+n-k)!}{r!\,(n-k)!} = \sum_{k\geqslant 0} t_k\,.$$

Формально этот ряд бесконечный, а фактически — конечный, ибо наличие $(n-k)!$ в знаменателе сделает $t_k = 0$ при $k > n$. (Позднее мы увидим, что $1/x!$ определено при любом x и что $1/x! = 0$ при целом отрицательном x. А пока махнем рукой на подобные формальности до тех пор, пока не наберемся побольше гипергеометрического опыта.) В данном случае отношение членов имеет вид

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(r+n-k-1)!\,r!\,(n-k)!}{r!\,(n-k-1)!\,(r+n-k)!} = \frac{n-k}{r+n-k} = \frac{(k+1)(k-n)(1)}{(k-n-r)(k+1)}\,.$$

При этом $t_0 = \binom{r+n}{n}$. Следовательно, интересующее нас правило суммирования эквивалентно гипергеометрическому тождеству

$$\binom{r+n}{n} F\left({1,\,-n \atop -n-r}\middle| 1\right) = \binom{r+n+1}{n}.$$

Деление обеих частей на $\binom{r+n}{n}$ приводит к несколько более простому варианту:

$$F\left({1,\,-n \atop -n-r}\middle| 1\right) = \frac{r+n+1}{r+1}, \qquad \text{если } \binom{r+n}{n} \neq 0. \tag{5.82}$$

Давайте попробуем еще. В тождестве (5.16),

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^m\binom{r-1}{m}, \qquad \text{целое } m,$$

после замены k на $m-k$ отношение членов принимает вид $(k-m)/(r-m+k+1) = (k+1)(k-m)(1)/(k-m+r+1)(k+1)$; следовательно, (5.16) выражает в замкнутой форме функцию

$$F\left(\begin{matrix}1,\,-m\\ -m+r+1\end{matrix}\,\middle|\,1\right).$$

В сущности, это совпадает с гипергеометрической функцией в левой части (5.82), но с m вместо n и $r+1$ вместо $-r$. Поэтому тождество (5.16) могло бы быть выведено из (5.82)— гипергеометрического варианта соотношения (5.9). (Не удивительно, что (5.16) оказалось легко доказать, воспользовавшись (5.9).)

Прежде чем двинуться дальше, следует обсудить вырожденные случаи, поскольку гипергеометрические функции не определены, когда нижний параметр равен нулю или целому отрицательному числу. Тождество, соответствующее правилу суммирования по диагонали, обычно применяется при целых положительных r и n — но тогда $-n-r$ есть целое отрицательное число и гипергеометрический ряд (5.76) не определен. Как тогда можно считать законным тождество (5.82)? Ответ в том, что мы можем перейти к пределу $F\left({1,\,-n \atop -n-r+\epsilon}\,\middle|\,1\right)$ при $\epsilon \to 0$.

Сперва беспорядки, теперь вырождение!

Позднее в этой главе подобные вещи будут рассмотрены более обстоятельно, а пока просто отдадим себе отчет в том, что некоторые знаменатели могут быть „взрывоопасны". Интересно, однако, что самая первая сумма, которую мы пытались выразить гипергеометрически, оказалась вырожденной.

Возможно, другим больным местом в выводе (5.82) является то, что мы представляли $\binom{r+n-k}{n-k}$ в виде $(r+n-k)!/r!\,(n-k)!$. Подобное представление не проходит при целом отрицательном r, поскольку $(-m)!$ должно быть равным ∞, если следовать правилу

$$0! = 0\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-m+1)\cdot(-m)!$$

И вновь для достижения целочисленных значений необходимо рассматривать предел $r+\epsilon$ при $\epsilon \to 0$.

(Сначала мы доказывали тождества для целого r и использовали полиномиальную аргументацию, чтобы показать их справедливость в общем случае. А теперь они доказываются сперва для иррационального r и используется предельная аргументация, чтобы показать их справедливость для целых чисел!)

Однако факториальное представление $\binom{r}{k} = r!/k!\,(r-k)!$ определено только для целого r. Если же мы хотим эффективно работать с гипергеометрическими представлениями, то необходима такая факториальная функция, которая была бы определена при всех комплексных числах. К счастью, такая функция имеется и может быть определена несколькими способами. Вот одно из наиболее подходящих определений $z!$, точнее, определение $1/z!$:

$$\frac{1}{z!} = \lim_{n\to\infty}\binom{n+z}{n}n^{-z}. \qquad (5.83)$$

(См. упр. 21. Эйлер [363, 364, 102] обнаружил это определение, когда ему было 22 года.) Можно показать, что данный предел существует при любом комплексном z и что он равен нулю только тогда, когда z — целое отрицательное число. Другое употребительное определение:

$$z! = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt\,, \qquad \text{если } \Re z > -1. \tag{5.84}$$

Этот интеграл существует только тогда, когда вещественная часть больше -1, но можно воспользоваться формулой

$$z! = z\,(z-1)!\,, \tag{5.85}$$

чтобы распространить(5.84) на все комплексные z (за исключением целых отрицательных). Еще одно определение следует из приближения Стирлинга для $\ln z!$ из (5.47). Все эти подходы приводят к одной и той же обобщенной факториальной функции.

Имеется весьма похожая функция, называемая *гамма-функцией*, которая связана с обычными факториалами примерно так же, как возрастающие степени связаны с убывающими степенями. В стандартных справочниках факториалы и гамма-функция часто используются совместно, и при необходимости удобно переходить от одних к другим, исходя из следующих формул:

$$\Gamma(z+1) = z!\,, \tag{5.86}$$

$$(-z)!\ \Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,. \tag{5.87}$$

Эти обобщенные факториалы могут быть использованы для определения обобщенных факториальных степеней, когда z и w — произвольные комплексные числа:

Как вы записываете z в степени $\overline{w}$, если $\overline{w}$ — комплексно-сопряженное с w?

Как $z^{(\overline{w})}$.

$$z^{\underline{w}} = \frac{z!}{(z-w)!}\,; \tag{5.88}$$

$$z^{\overline{w}} = \frac{\Gamma(z+w)}{\Gamma(z)}\,. \tag{5.89}$$

Единственная оговорка состоит в том, что необходимо воспользоваться соответствующими пределами, если эти формулы дают ∞/∞. (Данные формулы никогда не дают $0/0$, поскольку факториалы и гамма-функции никогда не обращаются в нуль.) Биномиальный коэффициент можно представить в виде

Понятно, вторая переменная достигает своего предела первой. Вот почему $\binom{z}{w}$ обращается в нуль при целом отрицательном w.

$$\binom{z}{w} = \lim_{\zeta\to z}\ \lim_{\omega\to w}\ \frac{\zeta!}{\omega!\,(\zeta-\omega)!}\,, \tag{5.90}$$

где z и w — какие угодно комплексные числа.

Это значение бесконечно, когда z — отрицательное целое, а w не является целым.

Вооружившись такими инструментами, как обобщенные факториалы, можно вернуться к нашему намерению выявить гипергеометрическую сущность выведенных ранее тождеств. Биномиальная теорема (5.13), как и следовало ожидать, оказывается ни

чем иным, как суммой (5.77). Так что следующее наиболее интересное для испытания соотношение — это свертка Вандермонда (5.27):

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \qquad \text{целое } n.$$

Здесь k-й член —

$$t_k = \frac{r!}{(r-k)!\,k!}\,\frac{s!}{(s-n+k)!\,(n-k)!},$$

и больше нет нужды избегать использования в этих выражениях обобщенных факториалов. Всякий раз, когда t_k содержит множитель типа $(\alpha+k)!$ со знаком плюс перед k, то в соответствии с (5.85) в отношении t_{k+1}/t_k мы получаем $(\alpha+k+1)!/(\alpha+k)! = k+\alpha+1$; это дает '$\alpha+1$' в соответствующем гипергеометрическом представлении — в качестве верхнего параметра, если $(\alpha+k)!$ был в числителе t_k, или же в качестве нижнего параметра в противном случае. Аналогично, множитель типа $(\alpha-k)!$ приводит к $(\alpha-k-1)!/(\alpha-k)! = (-1)/(k-\alpha)$; это дает '$-\alpha$' в другой совокупности параметров (с измененными ролями верхнего и нижнего параметров) и меняет знак аргумента гипергеометрической функции. Множители типа $r!$, которые не зависят от k, появляются в t_0, но исчезают из отношений. Используя такие уловки, можно без дальнейших вычислений предсказать, что отношением членов в (5.27) будет

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k-r}{k+1}\,\frac{k-n}{k+s-n+1},$$

помноженное на $(-1)^2 = 1$, и правило свертки Вандермонда приобретает вид

$$\binom{s}{n} F\left(\left.{-r,\,-n \atop s-n+1}\right|1\right) = \binom{r+s}{n}. \tag{5.91}$$

Это равенство может быть использовано для определения $F(a,b;c;z)$ в общем случае, когда $z=1$ и b — целое отрицательное число.

Перепишем (5.91) в такой форме, которая облегчит нам просмотр таблицы в том случае, если потребуется вычислить некоторую новую сумму. В результате окажется, что

$$F\left(\left.{a,b \atop c}\right|1\right) = \frac{\Gamma(c-a-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}; \qquad \text{целое } b \leqslant 0 \text{ или } \Re c > \Re a + \Re b. \tag{5.92}$$

Свертка Вандермонда (5.27) охватывает только тот случай, когда один из верхних параметров, скажем b, является целым неполо-

Всего несколько недель тому назад мы изучали то, что Гаусс доказал в детсадовском возрасте. А теперь нам дают материал, выходящий за рамки его диссертации. Нас хотят деморализовать.

жительным числом, но Гаусс доказал, что (5.92) справедливо и тогда, когда a, b, c — комплексные числа, вещественные части которых удовлетворяют неравенству $\Re c > \Re a + \Re b$. В остальных случаях бесконечный ряд $F\bigl({a,b \atop c}\big|1\bigr)$ не сходится. Если $b = -n$, то это соотношение может быть переписано в более удобном виде — с факториалами вместо гамма-функций:

$$F\left({a,\,-n \atop c}\,\middle|\,1\right) = \frac{(c-a)^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}} = \frac{(a-c)^{\underline{n}}}{(-c)^{\underline{n}}}, \quad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (5.93)$$

Оказывается, что все пять соотношений из табл. 195 представляют собой частные случаи свертки Вандермонда — все они охватываются формулой (5.93), если уделить должное внимание вырожденным случаям.

Обратите внимание, что (5.82) — это всего лишь частный случай соотношения (5.93) при $a = 1$. Поэтому на самом деле нет необходимости запоминать соотношение (5.82); более того, нам совсем не нужно тождество (5.9), которое привело нас к (5.82), несмотря на то, что в табл. 199 его предлагалось запомнить. Машинная программа для формульных преобразований, столкнувшись с задачей вычисления суммы $\sum_{k\leqslant n}\binom{r+k}{k}$, могла бы преобразовать данную сумму в гипергеометрическую форму и подставить в общее выражение для свертки Вандермонда.

В задаче 1 из разд. 5.2 спрашивалось о величине суммы

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{m}{k}\Big/\binom{n}{k}.$$

Для этой задачи естественно гипергеометрическое представление, и, немного попрактиковавшись, любой гипергеометр сможет тотчас же выразить данную сумму в виде $F(1,-m;-n;1)$. Ну да, та задача была еще одним жалким подражанием Вандермонду!

Точно так же сумма из задачи 2 и из задачи 4 дает функцию $F(2,1-n;2-m;1)$. (Сначала нужно заменить k на $k+1$.) А „трудная“ сумма из задачи 6 оказывается всего лишь функцией $F(n+1,-n;2;1)$. Так что же, помимо скрытых версий всесильной свертки Вандермонда и суммировать больше нечего?

Положим, есть — задача 3 уже несколько иная. Она имеет дело с частным случаем суммы общего вида $\sum_k\binom{n-k}{k}z^k$, рассмотренной в (5.74), и приводит к выражению в замкнутой форме для

$$F\left({1+2\lceil n/2\rceil,\,-n \atop 1/2}\,\middle|\,-z/4\right).$$

Нечто новое было получено также в (5.55), когда мы рассматривали коэффициенты функции $(1-z)^r(1+z)^r$:

$$F\left({1-c-2n,\,-2n \atop c}\,\middle|\,-1\right) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{(c-1)!}{(c+n-1)!},$$

целое $n \geqslant 0$.

Будучи обобщенной на комплексные числа, эта формула называется *формулой Куммера*:

$$F\left({a, b \atop 1+b-a} \middle| -1\right) = \frac{(b/2)!}{b!}(b-a)^{\underline{b/2}}. \qquad (5.94)$$

(Эрнст Куммер [170] получил ее в 1836 г.)

Интересно сравнить две эти формулы. Заменив c на $1-2n-a$, выясняем, что данные результаты согласуются тогда и только тогда, когда

$$(-1)^n\frac{(2n)!}{n!} = \lim_{b\to-2n}\frac{(b/2)!}{b!} = \lim_{x\to-n}\frac{x!}{(2x)!} \qquad (5.95)$$

при целом положительном n. Так, предположим, что $n=3$: тогда должно быть $-6!/3! = \lim_{x\to-3} x!/(2x)!$. Нам известно, что $(-3)!$ и $(-6)!$ равны ∞, но мы могли бы предпочесть проигнорировать это затруднение и сделать вид, что $(-3)! = (-3)(-4)(-5)(-6)!$, так что два этих $(-6)!$ сократятся. Однако таким соблазнам нельзя поддаваться, поскольку они приводят к неправильному решению! Согласно (5.95), пределом $x!/(2x)!$ при $x\to-3$ является не $(-3)(-4)(-5)$, а $-6!/3! = (-4)(-5)(-6)$.

Правильный способ вычисления предела в (5.95) заключается в использовании уравнения (5.87), которое связывает факториалы с отрицательным аргументом и гамма-функции с положительным аргументом. Если заменить x на $-n-\epsilon$ и положить $\epsilon\to 0$, то применение формулы (5.87) дважды дает

$$\frac{(-n-\epsilon)!}{(-2n-2\epsilon)!}\,\frac{\Gamma(n+\epsilon)}{\Gamma(2n+2\epsilon)} = \frac{\sin(2n+2\epsilon)\pi}{\sin(n+\epsilon)\pi}.$$

Поскольку $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$, то полученное отношение синусов приводится к виду

$$\frac{\cos 2n\pi\,\sin 2\epsilon\pi}{\cos n\pi\,\sin\epsilon\pi} = (-1)^n\bigl(2+O(\epsilon)\bigr)$$

с помощью методов из гл. 9. Следовательно, согласно (5.86),

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(-n-\epsilon)!}{(-2n-2\epsilon)!} = 2(-1)^n\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = 2(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$
$$= (-1)^n\frac{(2n)!}{n!},$$

как и требовалось.

Завершим наш обзор тем, что установим заново все те соотношения, с которыми мы до сих пор имели дело в этой главе, облачив их в гипергеометрические одежды. Сумма с тремя биномиальными коэффициентами из (5.29) может быть записана

в виде

$$F\left({1-a-2n,\ 1-b-2n,\ -2n \atop a,\ b}\middle|\,1\right) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{(a+b+2n-2)^{\overline{n}}}{a^{\overline{n}}\,b^{\overline{n}}}\,,\qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

Если обобщить это на комплексные числа, то получится так называемая *формула Диксона*:

$$F\left({a,\ b,\ c \atop 1+c-a,\ 1+c-b}\middle|\,1\right) = \frac{(c/2)!}{c!}\frac{(c-a)^{\underline{c/2}}(c-b)^{\underline{c/2}}}{(c-a-b)^{\underline{c/2}}}\,,$$

$$\Re a + \Re b < 1 + \Re c/2. \qquad (5.96)$$

Одной из наиболее общих формул из числа встречавшихся нам является сумма (5.28) с тремя биномиальными коэффициентами, которая приводит к *тождеству Заальшютца*:

$$F\left({a,\ b,\ -n \atop c,\ a+b-c-n+1}\middle|\,1\right) = \frac{(c-a)^{\overline{n}}\,(c-b)^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}\,(c-a-b)^{\overline{n}}}$$

$$= \frac{(a-c)^{\underline{n}}\,(b-c)^{\underline{n}}}{(-c)^{\underline{n}}\,(a+b-c)^{\underline{n}}}\,,\quad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (5.97)$$

Эта формула дает при $z = 1$ величину обобщенного гипергеометрического ряда с тремя верхними и двумя нижними параметрами при условии, что один из верхних параметров является целым неположительным числом и что $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + a_3 + 1$. (Если сумма нижних параметров больше суммы верхних параметров не на 1, а на 2, то при помощи формулы из упр. 25 можно выразить $F(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)$ через две гипергеометрические функции, которые удовлетворяют тождеству Заальшютца.)

Трудно давшееся нам соотношение из задачи 8 в разд. 5.2 сводится к

$$\frac{1}{1+x}F\left({x+1,\ n+1,\ -n \atop 1,\ x+2}\middle|\,1\right) = (-1)^n x^{\underline{n}}\, x^{\underline{-n-1}}.$$

Да-а..., это всего лишь частный случай при $c = 1$ соотношения Заальшютца (5.97), так что можно было бы сберечь массу усилий, перейдя непосредственно к гипергеометрическому представлению!

А как насчет задачи 7? Та сверхтрудная сумма дает формулу

$$F\left({n+1,\ m-n,\ 1,\ \frac{1}{2} \atop \frac{1}{2}m+1,\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{2},\ 2}\middle|\,1\right) = \frac{m}{n}\,,\qquad \text{целое } n \geqslant m \geqslant 0,$$

которая представляет собой первый случай, когда нам встретились три нижних параметра. Так что выглядит это довольно ново. Но на самом деле ничего нового здесь нет: если использовать

упр. 26, то левая часть может быть заменена на

$$F\left({n,\ m-n-1,\ -\frac{1}{2} \atop \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\middle|\,1\right) - 1\,,$$

и вновь получается соотношение Заальшютца.

Что ж, еще один опыт дефляции, но вместе с тем еще один повод оценить силу гипергеометрических методов.

Соотношения свертки из табл. 229 не обладают гипергеометрическими эквивалентами, ибо их отношения членов являются рациональными по k функциями только тогда, когда t — целое. Равенства (5.64) и (5.65) не являются гипергеометрическими, даже когда $t = 1$. Но можно принять во внимание (5.62) для случая, когда t принимает небольшие целочисленные значения:

(Историческая справка: исключительная уместность применения гипергеометрических рядов к тождествам с биномиальными коэффициентами впервые была отмечена Г. Эндрюсом в 1974 г. [384, разд. 5].)

$$F\left({\frac{1}{2}r,\ \frac{1}{2}r+\frac{1}{2},\ -n,\ -n-s \atop r+1,\ -n-\frac{1}{2}s,\ -n-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}\middle|\,1\right) = \binom{r+s+2n}{n}\bigg/\binom{s+2n}{n}\,;$$

$$F\left({\frac{1}{3}r,\ \frac{1}{3}r+\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}r+\frac{2}{3},\ -n,\ -n-\frac{1}{2}s,\ -n-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2} \atop \frac{1}{2}r+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}r+1,\ -n-\frac{1}{3}s,\ -n-\frac{1}{3}s+\frac{1}{3},\ -n-\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}}\middle|\,1\right) = \binom{r+s+3n}{n}\bigg/\binom{s+3n}{n}\,.$$

Первая из данных формул вновь дает решение задачи 7, если заменить величины (r, s, n) на $(1, m-2n-1, n-m)$ соответственно.

И, наконец, „неожиданная“ сумма (5.20) доставляет неожиданное гипергеометрическое соотношение, которое оказывается весьма поучительным. Рассмотрим это не спеша. Сначала превратим ее в бесконечную сумму:

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m+k}{k}2^{-k} = 2^m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k\geqslant 0}\binom{2m-k}{m-k}2^k = 2^{2m}\,.$$

Отношение членов $(2m-k)!\,2^k/m!\,(m-k)!$ есть $2(k-m)/(k-2m)$, так что получается гипергеометрическое тождество с $z = 2$:

$$\binom{2m}{m}F\left({1,\ -m \atop -2m}\middle|\,2\right) = 2^{2m}\,, \qquad \text{целое } m \geqslant 0. \tag{5.98}$$

Но взгляните на нижний параметр '$-2m$': целые отрицательные числа запрещены, так что данное тождество не определено!

Вот самое время тщательно рассмотреть подобные предельные случаи, как и было обещано ранее, поскольку гипергеометрические функции в точках „вырождения“ зачастую могут быть вычислены путем приближения к ним из ближайших „невырожденных“ точек. При этом необходимо проявлять осторожность, так как если пределы берутся разными способами, то и результаты могут получиться разные. Вот, к примеру, два предела, которые

оказываются совершенно разными, если один из верхних параметров увеличен на ϵ:

$$\lim_{\epsilon\to 0} F\left({-1+\epsilon,\,-3 \atop -2+\epsilon}\middle|\,1\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\Bigl(1 + \tfrac{(-1+\epsilon)(-3)}{(-2+\epsilon)\,1!} + \tfrac{(-1+\epsilon)(\epsilon)(-3)(-2)}{(-2+\epsilon)(-1+\epsilon)\,2!} + \tfrac{(-1+\epsilon)(\epsilon)(1+\epsilon)(-3)(-2)(-1)}{(-2+\epsilon)(-1+\epsilon)(\epsilon)\,3!}\Bigr)$$

$$= 1 - \tfrac{3}{2} + 0 + \tfrac{1}{2} = 0;$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} F\left({-1,-3 \atop -2+\epsilon}\middle|\,1\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\Bigl(1 + \tfrac{(-1)(-3)}{(-2+\epsilon)\,1!} + 0 + 0\Bigr)$$

$$= 1 - \tfrac{3}{2} + 0 + 0 = -\tfrac{1}{2}.$$

Аналогично, нами определено $\binom{-1}{-1} = 0 = \lim_{\epsilon\to 0}\binom{-1+\epsilon}{-1}$, а это не то же самое, что $\lim_{\epsilon\to 0}\binom{-1+\epsilon}{-1+\epsilon} = 1$. Чтобы правильно протрактовать (5.98) как предел, следует понимать, что верхний параметр $-m$ используется для того, чтобы обратить в нуль все члены ряда $\sum_{k\geqslant 0}\binom{2m-k}{m-k}2^k$ при $k > m$; это значит, что данному соотношению надлежит придать следующую более точную формулировку:

$$\binom{2m}{m}\lim_{\epsilon\to 0} F\left({1,\,-m \atop -2m+\epsilon}\middle|\,2\right) = 2^{2m}, \qquad \text{целое } m \geqslant 0. \tag{5.99}$$

Каждый член этого предельного соотношения вполне определен, так как множитель $(-2m)^{\overline{k}}$ в знаменателе не обращается в нуль до тех пор, пока $k > 2m$. Поэтому этот предел дает именно ту сумму (5.20), с которой мы начали.

5.6 ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Теперь должно быть ясно, что база данных известных гипергеометрических представлений в замкнутой форме служит полезным инструментом для суммирования биномиальных коэффициентов. Мы просто приводим некоторую заданную сумму к ее каноническому гипергеометрическому виду, а затем ищем по таблице. Если она там есть, прекрасно — решение получено. Если же нет, ее можно добавить к имеющейся базе данных, если окажется, что данная сумма выразима в замкнутой форме. Можно было бы также включить в таблицу записи, которые гласят, что „данная сумма вообще не выражается в замкнутой форме“. Например, сумма $\sum_{k\leqslant m}\binom{n}{k}$ соответствует гипергеометрической функции

$$\binom{n}{m} F\left({1,\,-m \atop n-m+1}\middle|\,-1\right), \qquad \text{целые } n \geqslant m \geqslant 0; \tag{5.100}$$

которая выражается в простой замкнутой форме только тогда, когда m близко к 0, $\frac{1}{2}n$ или n.

Но это еще не все, так как гипергеометрические функции подчиняются и своим собственным тождествам. Это означает, что каждая замкнутая форма для гипергеометрической функции приводит к дополнительным замкнутым формам и дополнительным записям в базе данных. К примеру, тождества из упр. 25 и 26 показывают, как преобразовать одну гипергеометрическую функцию в две другие с похожими, но отличными параметрами. В свою очередь эти функции могут быть преобразованы вновь.

На самом деле, гипергеометрическую базу данных следовало бы считать „базой знаний“.

В 1797 г. И. Ф. Пфафф [249] открыл удивительный *закон симметрии*,

$$\frac{1}{(1-z)^a} F\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,\frac{-z}{1-z}\right) = F\left(\begin{matrix}a,\ c-b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,z\right), \qquad (5.101)$$

который служит примером преобразования другого типа. Это формальное тождество относительно степенных рядов, если величина $(-z)^k/(1-z)^{k+a}$ заменена бесконечным рядом $(-z)^k \times \left(1 + \binom{k+a}{1}z + \binom{k+a+1}{2}z^2 + \cdots\right)$, полученным при разложении в ряд левой части (см. упр. 50). Этот закон можно использовать для вывода новых формул из уже известных тождеств при условии, что $z \neq 1$.

Например, формула Куммера (5.94) может быть объединена с законом симметрии (5.101), если параметры выбраны так, что применимы оба тождества:

$$2^{-a} F\left(\begin{matrix}a,\ 1-a\\ 1+b-a\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right) = F\left(\begin{matrix}a, b\\ 1+b-a\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)$$
$$= \frac{(b/2)!}{b!}(b-a)^{\underline{b/2}}. \qquad (5.102)$$

Теперь можно положить $a = -n$ и перейти от этого равенства к новому тождеству относительно биномиальных коэффициентов, которое, быть может, в один прекрасный день нам понадобится:

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-n)^{\overline{k}}(1+n)^{\overline{k}}}{(1+b+n)^{\overline{k}}}\frac{2^{-k}}{k!} = \sum_k \binom{n}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k \binom{n+k}{k}\Big/\binom{n+b+k}{k}$$
$$= 2^{-n}\frac{(b/2)!\,(b+n)!}{b!\,(b/2+n)!}, \quad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (5.103)$$

К примеру, при $n = 3$ данное тождество утверждает, что

$$1 - 3\,\frac{4}{2(4+b)} + 3\,\frac{4\cdot 5}{4(4+b)(5+b)} - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{8(4+b)(5+b)(6+b)}$$
$$= \frac{(b+3)(b+2)(b+1)}{(b+6)(b+4)(b+2)}.$$

Это почти невероятно — но это так при любом b. (Кроме случаев, когда какой-нибудь сомножитель в знаменателе обращается в нуль.)

Забавно, попробуем еще. Может быть, нам удастся найти некоторую формулу, которая и в самом деле удивит наших друзей. Что нам даст закон симметрии Пфаффа, если применить его к выражению в несколько странной форме (5.99), где $z = 2$? В этом случае мы полагаем $a = -m$, $b = 1$ и $c = -2m + \epsilon$, получая

$$(-1)^m \lim_{\epsilon\to 0} F\left({-m,\,1 \atop -2m+\epsilon}\,\middle|\,2\right) = \lim_{\epsilon\to 0} F\left({-m,\,-2m-1+\epsilon \atop -2m+\epsilon}\,\middle|\,2\right)$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-m)^{\overline{k}}(-2m-1+\epsilon)^{\overline{k}}}{(-2m+\epsilon)^{\overline{k}}}\frac{2^k}{k!}$$
$$= \sum_{k\leqslant m}\binom{m}{k}\frac{(2m+1)^{\underline{k}}}{(2m)^{\underline{k}}}(-2)^k,$$

поскольку ни один из предельных членов не близок к нулю. Это приводит к другой „невероятной“ формуле,

(Истерическое замечание: если у вас получается другой результат, см. упр. 51.)

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m}{k}\frac{2m+1}{2m+1-k}(-2)^k = (-1)^m 2^{2m}\Big/\binom{2m}{m}$$
$$= 1\Big/\binom{-1/2}{m}, \qquad \text{целое } m \geqslant 0. \qquad (5.104)$$

Например, при $m = 3$ данная сумма равна

$$1 - 7 + \frac{84}{5} - 14 = -\frac{16}{5},$$

а $\binom{-1/2}{3}$ действительно равно $-\frac{5}{16}$.

Когда мы рассматривали тождества с биномиальными коэффициентами и приводили их к гипергеометрическому виду, мы не придали значения соотношению (5.19), поскольку это было соотношение между двумя суммами, а не выражение в замкнутой форме. Однако теперь (5.19) можно рассмотреть как соотношение между гипергеометрическими рядами. Если продифференцировать его n раз по y, а затем заменить k на $m - n - k$, то получим

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{m+r}{m-n-k}\binom{n+k}{n}x^{m-n-k}y^k$$
$$= \sum_{k\geqslant 0}\binom{-r}{m-n-k}\binom{n+k}{n}(-x)^{m-n-k}(x+y)^k.$$

Это приводит к следующему гипергеометрическому преобразованию:

$$F\left({a,\,-n \atop c}\,\middle|\,z\right) = \frac{(a-c)^{\underline{n}}}{(-c)^{\underline{n}}}F\left({a,\,-n \atop 1-n+a-c}\,\middle|\,1-z\right), \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (5.105)$$

Обратите внимание, что при $z = 1$ это сводится к свертке Вандермонда (5.93).

По-видимому, в дифференцировании что-то есть, если данный пример сколь-нибудь показателен,— оно оказалось полезным и в гл. 2 при суммировании $x + 2x^2 + \cdots + nx^n$. Посмотрим, что случится, если продифференцировать обобщенный гипергеометрический ряд по z:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}F\left({a_1,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|\,z\right) &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}\,z^{k-1}}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}\,(k-1)!}\\ &= \sum_{k+1\geqslant 1}\frac{a_1^{\overline{k+1}}\ldots a_m^{\overline{k+1}}\,z^{k}}{b_1^{\overline{k+1}}\ldots b_n^{\overline{k+1}}\,k!}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_1(a_1+1)^{\overline{k}}\ldots a_m(a_m+1)^{\overline{k}}z^k}{b_1(b_1+1)^{\overline{k}}\ldots b_n(b_n+1)^{\overline{k}}k!}\\ &= \frac{a_1\ldots a_m}{b_1\ldots b_n}F\left({a_1+1,\ldots,a_m+1 \atop b_1+1,\ldots,b_n+1}\middle|\,z\right). \end{aligned} \tag{5.106}$$

Параметры выносятся и увеличиваются на 1.

Дифференцирование может быть использовано также для того, чтобы „отщипнуть" только один из параметров, оставляя в покое остальные. Для этого используется оператор

Как вы произносите ϑ? ('Тета-с-приветом', однако в TEX'е она называется 'vartheta'.)

$$\vartheta = z\frac{d}{dz},$$

который действует на функцию путем ее дифференцирования с последующим умножением на z. Этот оператор дает

$$\begin{aligned}\vartheta F\left({a_1,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|\,z\right) &= z\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}\,z^{k-1}}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}\,(k-1)!}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{k\,a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}\,z^{k}}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}\,k!},\end{aligned}$$

что само по себе не представляет особой ценности. Однако если умножить F на один из его верхних параметров, скажем, a_1 и добавить ϑF, то получим

$$\begin{aligned}(\vartheta+a_1)F\left({a_1,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|\,z\right) &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+a_1)a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}\,z^{k}}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}\,k!},\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_1(a_1+1)^{\overline{k}}a_2^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}\,z^{k}}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}\,k!}\\ &= a_1F\left({a_1+1,\,a_2,\,\ldots,\,a_m \atop b_1,\,\ldots,\,b_n}\middle|\,z\right).\end{aligned}$$

При этом увеличивается на 1 лишь один параметр.

Аналогичный фокус проходит и с нижними параметрами, но в этом случае они уменьшаются на 1, а не увеличиваются:

$$(\vartheta+b_1-1)F\left({a_1,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|z\right)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+b_1-1)a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}z^k}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}k!},$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(b_1-1)\,a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}z^k}{(b_1-1)^{\overline{k}}b_2^{\overline{k}}\ldots b_n^{\overline{k}}k!}$$

$$=(b_1-1)F\left({a_1,\ \ldots,\ a_m \atop b_1-1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n}\middle|z\right).$$

„*Что это вы все время предлагаете свои шутки? — спросила Алиса.— Эта, например, вам совсем не удалась.*“
— Л. Кэррол, [174, с. 153]. (Добавл. перев.)

Теперь можно объединить все эти операции и сыграть математическую „шутку“, выразив одну и ту же величину двумя разными способами. А именно,

$$(\vartheta+a_1)\ldots(\vartheta+a_m)F=a_1\ldots a_m\ F\left({a_1+1,\ \ldots,\ a_m+1 \atop b_1,\ \ldots,\ b_n}\middle|z\right),$$

и

$$(\vartheta+b_1-1)\ldots(\vartheta+b_n-1)F$$
$$=(b_1-1)\ldots(b_n-1)F\left({a_1,\ \ldots,\ a_m \atop b_1-1,\ \ldots,\ b_n-1}\middle|z\right),$$

где $F=F(a_1,\ldots,a_m;b_1,\ldots,b_n;z)$. Но (5.106) указывает на то, что верхняя строчка является производной от нижней. Следовательно, обобщенная гипергеометрическая функция F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(\vartheta+b_1-1)\ldots(\vartheta+b_n-1)F=(\vartheta+a_1)\ldots(\vartheta+a_m)F,\qquad(5.107)$$

где D — это оператор $\frac{d}{dz}$.

Это следует подтвердить примером. Подыщем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет стандартная гипергеометрическая функция с двумя верхними и одним нижним параметрами $F(z)=F(a,b;c;z)$. В соответствии с (5.107) имеем

$$D(\vartheta+c-1)F=(\vartheta+a)(\vartheta+b)F.$$

Что это означает в обычной записи? Ну, $(\vartheta+c-1)F$ — это $zF'(z)+(c-1)F(z)$, а производная от этой величины дает левую часть,

$$F'(z)+zF''(z)+(c-1)F'(z).$$

В правой части имеем

$$(\vartheta+a)\big(zF'(z)+bF(z)\big)$$
$$=z\frac{d}{dz}\big(zF'(z)+bF(z)\big)+a\big(zF'(z)+bF(z)\big)$$
$$=zF'(z)+z^2F''(z)+bzF'(z)+azF'(z)+abF(z).$$

Приравнивание обеих частей дает

$$z(1-z)F''(z) + \bigl(c - z(a+b+1)\bigr)F'(z) - abF(z) = 0. \qquad (5.108)$$

Это уравнение эквивалентно (5.107), записанному в форме произведения.

Обратно, от дифференциального уравнения можно вернуться к степенному ряду. Допустим, что $F(z) = \sum_{k\geqslant 0} t_k z^k$ — степенной ряд, удовлетворяющий уравнению (5.107). Непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+a_1)\dots(k+a_m)}{(k+b_1)\dots(k+b_n)(k+1)};$$

следовательно, функцией $F(z)$ будет $t_0\,F(a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_n; z)$. Мы доказали, что гипергеометрический ряд (5.76) — единственный формальный степенной ряд, который удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.107) и имеет постоянный член 1.

Было бы здо́рово, если бы гипергеометрические функции позволяли решать все на свете дифференциальные уравнения, но это далеко не так. Правая часть уравнения (5.107) всегда разлагается на сумму членов вида $\alpha_k z^k F^{(k)}(z)$, где $F^{(k)}(z)$ — k-я производная $D^k F(k)$, а левая часть всегда разлагается на сумму членов вида $\beta_k z^{k-1} F^{(k)}(z)$ при $k > 0$. Так что дифференциальное уравнение (5.107) всегда имеет специальный вид

$$z^{n-1}(\beta_n - z\alpha_n)F^{(n)}(z) + \dots + (\beta_1 - z\alpha_1)F'(z) - \alpha_0 F(z) = 0.$$

Уравнение (5.108) иллюстрирует это в случае $n = 2$. И обратно, в упр. 6.13 мы покажем, что любое дифференциальное уравнение данного вида можно разложить относительно ϑ-оператора так, чтобы получить уравнение типа (5.107). Таким образом, это дифференциальные уравнения, решениями которых являются степенные ряды с рациональными отношениями членов.

Умножение обеих частей уравнения (5.107) на z позволяет обойтись без D-оператора и дает примечательное выражение с ϑ во всех сомножителях:

Функция $F(z) = (1-z)^r$ удовлетворяет $\vartheta F = z(\vartheta - r)F$. Это дает еще одно доказательство биномиальной теоремы.

$$\vartheta(\vartheta + b_1 - 1)\dots(\vartheta + b_n - 1)F = z(\vartheta + a_1)\dots(\vartheta + a_m)F. \qquad (5.109)$$

Первый сомножитель $\vartheta = (\vartheta + 1 - 1)$ слева соответствует сомножителю $(k+1)$ в отношении членов (5.81), который, в свою очередь, соответствует $k!$ в знаменателе k-го члена обобщенного гипергеометрического ряда. Все остальные сомножители $(\vartheta + b_j - 1)$ соответствуют сомножителям $(k + b_j)$ в знаменателе, которые, в свою очередь, соответствуют $b_j^{\overline{k}}$ в (5.76). Справа же z соответствует z^k, а $(\vartheta + a_j)$ соответствует $a_j^{\overline{k}}$.

Одно из применений подобной дифференциальной теории состоит в нахождении и проверке новых преобразований. Так, легко

убедиться в том, что обе гипергеометрические функции

$$F\left({2a,\,2b \atop a+b+\frac{1}{2}}\,\Big|\,z\right) \quad \text{и} \quad F\left({a,\,b \atop a+b+\frac{1}{2}}\,\Big|\,4z(1-z)\right)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z(1-z)F''(z) + (a+b+\tfrac{1}{2})(1-2z)F'(z) - 4abF(z) = 0\,;$$

следовательно, должно быть справедливо *тождество Гаусса* [68, соотношение 102]

$$F\left({2a,\,2b \atop a+b+\frac{1}{2}}\,\Big|\,z\right) = F\left({a,\,b \atop a+b+\frac{1}{2}}\,\Big|\,4z(1-z)\right). \qquad (5.110)$$

(Внимание! Мы не можем непосредственно использовать соотношение (5.110) в случае $|z| > 1/2$, если только обе части соотношения не многочлены; см. упр. 53.)

В частности,

$$F\left({2a,\,2b \atop a+b+\frac{1}{2}}\,\Big|\,\frac{1}{2}\right) = F\left({a,\,b \atop a+b+\frac{1}{2}}\,\Big|\,1\right) \qquad (5.111)$$

всякий раз, когда обе бесконечные суммы сходятся. И на самом деле эти суммы всегда сходятся, за исключением вырожденного случая, когда $a+b+\frac{1}{2}$ есть неположительное целое.

Каждое новое тождество для гипергеометрических функций влечет за собой новое тождество для биномиальных коэффициентов, и последнее соотношение не является исключением. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m-k}{n}\binom{m+n+1}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k, \qquad \text{целые } m\geqslant n\geqslant 0.$$

Ее члены отличны от нуля при $0\leqslant k\leqslant m-n$, и, соблюдая, как и ранее, известную осторожность при переходе к пределу, эту сумму можно выразить в гипергеометрической форме:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\binom{m}{n}F\left({n-m,\ -n-m-1+\alpha\epsilon \atop -m+\epsilon}\,\Big|\,\frac{1}{2}\right).$$

Величина α не влияет на предел, поскольку неположительный верхний параметр $n-m$ раньше обрывает данную сумму. Можно положить $\alpha=2$, с тем чтобы применить (5.111). Теперь данный предел можно вычислить, поскольку правая часть этого соотношения представляет собой частный случай (5.92). Результат может быть выражен в упрощенном виде

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{m-k}{n}\binom{m+n+1}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = \binom{(m+n)/2}{n}2^{n-m}[m+n\text{ — четное}], \quad \text{целые } m\geqslant n\geqslant 0, \qquad (5.112)$$

как показано в упр. 54. К примеру, если $m = 5$ и $n = 2$, то получаем $\binom{5}{2}\binom{8}{0} - \binom{4}{2}\binom{8}{1}/2 + \binom{3}{2}\binom{8}{2}/4 - \binom{2}{2}\binom{8}{3}/8 = 10 - 24 + 21 - 7 = 0$; если же $m = 4$ и $n = 2$, то обе части равны $\frac{3}{4}$.

Кроме того, можно указать случаи, когда соотношение (5.110) при $z = -1$ приводит к суммам биномиальных коэффициентов, но эти суммы, право, сверхъестественны. Если положить $a = \frac{1}{6} - \frac{n}{3}$ и $b = -n$, то получается чудовищная формула

$$F\left({\frac{1}{3}-\frac{2}{3}n,\ -2n \atop \frac{2}{3}-\frac{4}{3}n}\middle|\,-1\right) = F\left({\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n,\ -n \atop \frac{2}{3}-\frac{4}{3}n}\middle|\,-8\right).$$

Данные гипергеометрические функции являются невырожденными многочленами, если $n \not\equiv 2 \pmod 3$, а их параметры подбираются столь искусно, что левую часть выражения можно вычислить по формуле (5.94). Поэтому приходим к воистину умопомрачительному результату

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}}{k}8^k \Big/ \binom{\frac{4}{3}n-\frac{2}{3}}{k} = \binom{2n}{n}\Big/\binom{\frac{4}{3}n-\frac{2}{3}}{n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0,\ n \not\equiv 2 \pmod 3. \qquad (5.113)$$

Это самое поразительное тождество с биномиальными коэффициентами из встретившихся нам. Даже начальные случаи такого соотношения не так просты, чтобы их можно было проверить вручную. (Оказывается, обе части в действительности дают $\frac{81}{7}$ при $n = 3$.) Разумеется, данное соотношение совершенно бесполезно — наверняка оно никогда не возникнет ни в одной практической задаче.

Вероятно, единственная польза тождества (5.113) — продемонстрировать существование абсолютно бесполезных тождеств.

Таково наше представление о гипергеометрических представлениях. Мы убедились в том, что гипергеометрические ряды обеспечивают нас высоконаучным способом обращения с суммами биномиальных коэффициентов. Масса дополнительной информации содержится в классической книге Улифреда Н. Бейли [17] и ее продолжении, написанном Гаспером и Рахманом [66].

А также в обзоре Ричарда Аски [10, 33–76]. — Перев.*

5.7 ЧАСТИЧНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

Большинство сумм в этой главе вычислялось по всему промежутку изменения индекса $k \geqslant 0$, но иногда нам удавалось найти такое выражение в замкнутой форме, которое работало и для интервала общего вида $0 \leqslant k < b$. Так, из (5.16) известно, что

$$\sum_{k<m} \binom{n}{k}(-1)^k = (-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}, \qquad \text{целое } m. \qquad (5.114)$$

Изложенное в гл. 2 обеспечивает нас чудесным способом трактовки формул, подобных этой. Если $f(k) = \Delta g(k) = g(k+1) - g(k)$, то мы условились писать, что $\sum f(k)\,\delta k = g(k) + C$ и

$$\sum\nolimits_a^b f(k)\,\delta k = g(k)\Big|_a^b = g(b) - g(a)\,.$$

Кроме того, если a и b — целые числа и $a \leqslant b$, то

$$\sum\nolimits_a^b f(k)\,\delta k = \sum_{a\leqslant k<b} f(k) = g(b) - g(a)\,.$$

Поэтому тождество (5.114) соответствует формуле вычисления неопределенных сумм

$$\sum \binom{n}{k}(-1)^k\,\delta k = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} + C$$

и формуле вычисления разностей

$$\Delta\left((-1)^k\binom{n}{k}\right) = (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}\,.$$

Начав с функции $g(k)$, можно легко вычислить $\Delta g(k) = f(k)$ — функцию, суммой которой будет $g(k) + C$. Но гораздо труднее, начав с $f(k)$, выяснить ее неопределенную сумму $\sum f(k)\,\delta k = g(k) + C$ — функция g может вообще не выражаться в замкнутой форме. Так, по всей видимости, сумма $\sum \binom{n}{k}\,\delta k$ не выражается в простой форме — иначе мы умели бы вычислять суммы типа $\sum_{k\leqslant n/3}\binom{n}{k}$, перед которыми мы беспомощны. Но, может быть, все же существует простая формула для $\sum \binom{n}{k}\,\delta k$, которую мы просто еще не придумали; почему мы уверены, что ее нет?

В 1977 г. Р. У. Госпер [79] обнаружил замечательный способ вычисления неопределенной суммы $\sum f(k)\,\delta k = g(k) + C$, если только f и g принадлежат обширному классу функций, называемых гипергеометрическими членами. Обозначим через

$$F\left({a_1, \ldots, a_m \atop b_1, \ldots, b_n}\,\Big|\, z\right)_k = \frac{a_1^{\overline{k}} \ldots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \ldots b_n^{\overline{k}}}\,\frac{z^k}{k!} \qquad (5.115)$$

k-й член гипергеометрического ряда $F(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; z)$. Будем рассматривать $F(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; z)_k$ как функцию k, а не как функцию z. Оказывается, что во многих случаях существуют параметры c, A_1, …, A_M, B_1, …, B_N и Z, такие, что

$$\sum F\left({a_1, \ldots, a_m \atop b_1, \ldots, b_n}\,\Big|\, z\right)_k \delta k = c\,F\left({A_1, \ldots, A_M \atop B_1, \ldots, B_N}\,\Big|\, Z\right)_k + C \qquad (5.116)$$

при заданных a_1, …, a_m, b_1, …, b_n и z. Будем говорить, что заданная функция $F(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; z)_k$ *суммируема в гипергеометрических членах*, если такие константы c, A_1, …, A_M,

$B_1, \ldots, B_N$, Z существуют. Алгоритм Госпера либо находит такие константы, либо доказывает, что их не существует.

В общем случае мы говорим, что $t(k)$ есть *гипергеометрический член*, если $t(k+1)/t(k)$ является рациональной функцией от k, не равной тождественно нулю. Это значит, по существу, что $t(k)$ кратно с постоянным множителем члену вида (5.115). (Тут возникают некоторые технические детали, связанные с нулями, поскольку мы хотели бы, чтобы $t(k)$ имело смысл для отрицательных k, а также когда одно или более из значений в (5.115) нулевое или целое отрицательное. Строго говоря, наиболее общий гипергеометрический член получится, если умножить (5.115) на ненулевую константу и на некоторую степень 0, а затем сократить нули в числителе и знаменателе. Пример в упр. 12 поможет прояснить это общее правило.)

Предположим, что мы хотим найти $\sum f(k)\,\delta k$, где $t(k)$ — гипергеометрический член. Алгоритм Госпера состоит из двух шагов, каждый из которых достаточно прямолинеен. Шаг 1 состоит в том, чтобы выразить отношение членов в специальной форме

$$\frac{t(k+1)}{t(k)} = \frac{p(k+1)}{p(k)}\,\frac{q(k)}{r(k+1)}\,, \qquad (5.117)$$

где p, q и r суть многочлены, подчиняющиеся следующему условию:

$$(k+\alpha)\backslash q(k) \quad \text{и} \quad (k+\beta)\backslash r(k) \\ \Longrightarrow \alpha-\beta \text{ не целое положительное число.} \qquad (5.118)$$

(Делимость многочленов аналогична делимости целых чисел. Так, $(k+\alpha)\backslash q(k)$ означает, что отношение $q(k)/(k+\alpha)$ является многочленом. Ясно, что $(k+\alpha)\backslash q(k)$ тогда и только тогда, когда $q(-\alpha)=0$.)

Данное условие легко достижимо: мы начинаем, предварительно положив $p(k)=1$, а $q(k)$ и $r(k+1)$ полагаем равными числителю и знаменателю значения членов и разлагаем их на линейные множители. Если, например, $t(k)$ имеет вид (5.115), то начинаем с факторизации $q(k)=(k+a_1)\ldots(k+a_m)z$ и $r(k)=(k+b_1-1)\ldots(k+b_n-1)k$. Затем проверяем, не нарушено ли условие (5.118). Если q и r имеют сомножителями $(k+\alpha)$ и $(k+\beta)$, где $\alpha-\beta=N>0$, то выделяем их из q и r и заменяем $p(k)$ на

$$p(k)(k+\alpha-1)^{\underline{N-1}} \\ = p(k)(k+\alpha-1)(k+\alpha-2)\ldots(k+\beta+1)\,. \qquad (5.119)$$

Новые p, q и r по-прежнему удовлетворяют (5.117), и эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие (5.118). Вскоре мы поймем, почему (5.118) так важно.

Шаг 2 алгоритма Госпера завершает работу — он состоит в нахождении гипергеометрического члена $T(k)$, такого, что

$$t(k) = T(k+1)-T(k), \qquad (5.120)$$

если это возможно. Однако совсем не очевидно, как добиться этого; чтобы двигаться дальше, нам нужно развить какую-то тео-

рию. Госпер, проанализировав множество частных случаев, заметил, что разумно записать неизвестную функцию $T(k)$ в виде

$$T(k) = \frac{r(k)\,s(k)\,t(k)}{p(k)}, \tag{5.121}$$

где $s(k)$ — некоторая секретная функция, которую необходимо каким-то образом раскрыть. Подставляя (5.121) в (5.120) и применяя (5.117), получаем

(В упр. 55 объясняется, почему нам хотелось бы выполнить эту загадочную подстановку.)

$$\begin{aligned} t(k) &= \frac{r(k+1)s(k+1)t(k+1)}{p(k+1)} - \frac{r(k)s(k)t(k)}{p(k)} \\ &= \frac{q(k)s(k+1)t(k)}{p(k)} - \frac{r(k)s(k)t(k)}{p(k)}, \end{aligned}$$

так что мы должны иметь:

$$p(k) = q(k)s(k+1) - r(k)s(k). \tag{5.122}$$

Если мы сумеем найти функцию $s(k)$, удовлетворяющую этой рекуррентности, то, тем самым, мы найдем и сумму $\sum t(k)\,\delta k$; если же нет, то члена T не существует.

Мы предполагаем, что $T(k)$ — гипергеометрический член, а это значит, что $T(k+1)/T(k)$ является рациональной по k функцией. Поэтому, согласно (5.121) и (5.120), функция $r(k)s(k)/p(k) = T(k)/\big(T(k+1) - T(k)\big)$ является рациональной по k функцией, а сама функция $s(k)$ должна быть отношением многочленов:

$$s(k) = f(k)/g(k).$$

Но на самом деле можно доказать, что функция $s(k)$ сама является многочленом. Действительно, если $g(k)$ не константа и если $f(k)$ и $g(k)$ не имеют общих множителей, положим N равным наибольшему целому, такому, что как $(k+\beta)$, так и $(k+\beta+N-1)$ входят сомножителями в $g(k)$ при некотором комплексном числе β. Величина N положительна, поскольку $N = 1$ всегда удовлетворяет данному условию. Уравнение (5.122) может быть переписано как

$$p(k)g(k+1)g(k) = q(k)f(k+1)g(k) - r(k)g(k+1)f(k),$$

а если положить $k = -\beta$ и $k = -\beta - N$, то получим

$$r(-\beta)g(1-\beta)f(-\beta) = 0 = q(-\beta-N)f(1-\beta-N)g(-\beta-N).$$

Теперь $f(-\beta) \neq 0$ и $f(1-\beta-N) \neq 0$, потому что f и g не имеют общих корней. К тому же $g(1-\beta) \neq 0$ и $g(-\beta-N) \neq 0$, потому что в противном случае функция $g(k)$ содержала бы сомножитель $(k+\beta-1)$ или $(k+\beta+N)$, вопреки допущению о максимальности N. Поэтому

Теперь я понимаю, что Госпер пришел к условию (5.118), чтобы это доказательство работало.

$$r(-\beta) = q(-\beta-N) = 0.$$

Но это противоречит условию (5.118). Следовательно, функция $s(k)$ должна быть многочленом.

Теперь нам осталось найти многочлен $s(k)$, удовлетворяющий уравнению (5.122), если $p(k)$, $q(k)$ и $r(k)$ — заданные многочлены, или доказать, что такого многочлена не существует. Это легко сделать, если $s(k)$ имеет какую-либо определенную степень d, так как можно положить

$$s(k) = \alpha_d k^d + \alpha_{d-1} k^{d-1} + \cdots + \alpha_0\,, \qquad \alpha_d \neq 0\,, \tag{5.123}$$

с неизвестными коэффициентами $(\alpha_d, \ldots, \alpha_0)$ и подставить данное выражение в основное рекуррентное соотношение (5.122). Многочлен $s(k)$ будет удовлетворять данной рекуррентности тогда и только тогда, когда все α удовлетворяют линейным уравнениям, получаемым в результате приравнивания коэффициентов при каждой степени k в (5.122).

Но как установить степень s? Оказывается, что в действительности имеются самое большее две возможности. Уравнение (5.122) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}&2p(k) = Q(k)\bigl(s(k+1) + s(k)\bigr) + R(k)\bigl(s(k+1) - s(k)\bigr)\,,\\ &\text{где}\quad Q(k) = q(k) - r(k) \quad\text{и}\quad R(k) = q(k) + r(k)\,.\end{aligned} \tag{5.124}$$

Если многочлен $s(k)$ имеет степень d, то сумма $s(k+1) + s(k) = 2\alpha_d k^d + \cdots$ также имеет степень d, в то время как разность $s(k+1) - s(k) = \Delta s(k) = d\alpha_d k^{d-1} + \cdots$ имеет степень $d-1$. (Можно считать, что нулевой многочлен имеет степень -1.) Обозначим через $\deg(p)$ степень многочлена p. Если $\deg(Q) \geqslant \deg(R)$, то степенью правой части равенства (5.124) будет $\deg(Q)+d$, так что мы должны получить $d = \deg(p) - \deg(Q)$. С другой стороны, если $\deg(Q) < \deg(R) = d'$, то можно записать, что $Q(k) = \lambda' k^{d'-1} + \cdots$ и $R(k) = \lambda k^{d'} + \cdots$, где $\lambda \neq 0$, а правая часть уравнения (5.124) имеет вид

$$(2\lambda'\alpha_d + \lambda d\,\alpha_d)k^{d+d'-1} + \cdots\,.$$

Ergo, две возможности таковы: либо $2\lambda' + \lambda d \neq 0$ и $d = \deg(p) - \deg(R) + 1$; либо $2\lambda' + \lambda d = 0$ и $d > \deg(p) - \deg(R) + 1$. Второй случай необходимо проверять только тогда, когда $-2\lambda'/\lambda$ является некоторым целым числом d, большим чем $\deg(p) - \deg(R) + 1$.

Ни слова в простоте.

Итак, мы располагаем достаточным количеством фактов для того, чтобы выполнить шаг 2 алгоритма Госпера: попробовав, самое большее, два значения d, мы можем найти $s(k)$, если только уравнение (5.122) имеет полиномиальное решение. Если $s(k)$ существует, то его можно подставить в (5.121) и получить нашу функцию T. Если же нет, то тем самым доказано, что $t(k)$ не суммируемо в гипергеометрических членах.

Пора привести какой-нибудь пример: попробуем вычислить частичную сумму (5.114). Методу Госпера должно быть под силу установить величину

$$\sum \binom{n}{k} (-1)^k\,\delta k$$

при любом фиксированном n, так что мы будем искать сумму членов

$$t(k) = \binom{n}{k}(-1)^k = \frac{n!\,(-1)^k}{k!\,(n-k)!}.$$

На шаге 1 мы должны представить отношение членов в требуемом виде (5.117):

$$\frac{t(k+1)}{t(k)} = \frac{(k-n)}{(k+1)} = \frac{p(k+1)\,q(k)}{p(k)\,r(k+1)},$$

т. е. мы просто выбираем $p(k) = 1$, $q(k) = k - n$ и $r(k) = k$. Подобный выбор p, q и r удовлетворяет условию (5.118), если только n не является целым отрицательным числом: предположим, что n таковым не является.

А почему не $r(k) = k + 1$? Впрочем, понятно.

Теперь переходим к шагу 2. Согласно (5.124) нам следует рассмотреть многочлены $Q(k) = -n$ и $R(k) = 2k - n$. А поскольку R имеет степень большую, чем степень Q, то необходимо рассмотреть два случая: либо $d = \deg(p) - \deg(R) + 1$, что равно 0, либо $d = -2\lambda'/\lambda$, где $\lambda' = -n$ и $\lambda = 2$, так что $d = n$. Первый случай предпочтительнее, поскольку он не требует, чтобы n было целым положительным, так что займемся им в первую очередь; нам надо будет рассмотреть вторую возможность для d, только если первый случай не приведет к успеху. Если $d = 0$, то значение $s(k)$ есть просто α_0 и уравнение (5.122) сводится к

$$1 = (k-n)\alpha_0 - k\alpha_0 .$$

Следовательно, мы выбираем $\alpha_0 = -1/n$. Это удовлетворяет требуемым условиям и дает точно тот результат, который мы рассчитывали подтвердить:

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{r(k)\,s(k)\,t(k)}{p(k)} \\ &= k \cdot \left(\frac{-1}{n}\right) \cdot \binom{n}{k}(-1)^k \\ &= \binom{n-1}{k-1}(-1)^{k-1}, \qquad \text{если } n \neq 0. \end{aligned}$$

Если же применить тот же самый метод к вычислению неопределенной суммы $\sum \binom{n}{k}\,\delta k$ без $(-1)^k$, то все будет почти тем же самым, за исключением того, что функция $q(k)$ будет равна $n-k$; следовательно, $Q(k) = n-2k$ будет иметь степень большую, чем степень $R(k) = n$, и мы придем к заключению, что d имеет невозможное значение $\deg(p) - \deg(Q) = -1$. (Многочлен $s(k)$ не может иметь отрицательную степень, поскольку он не может быть нулем.) Значит, функция $\binom{n}{k}$ не суммируема в гипергеометрических членах.

Как бы то ни было, раз уж мы избавились от невозможного, все, что бы ни осталось, обязано быть истинным, каким бы невероятным оно не казалось (по утверждению Ш. Холмса [162]). Когда мы определяли p, q и r, то решили пренебречь возможностью того, что n могло быть целым отрицательным числом. А что, если это так? Давайте положим $n = -N$, где N — положительное число. Тогда отношение членов для $\sum \binom{n}{k} \delta k$ есть

$$\frac{t(k+1)}{t(k)} = \frac{-(k+N)}{(k+1)} = \frac{p(k+1)}{p(k)} \frac{q(k)}{r(k+1)}$$

и, согласно (5.119), его следует представлять при помощи $p(k) = (k+1)^{\overline{N-1}}$, $q(k) = -1$, $r(k) = 1$. Теперь шаг 2 метода Госпера советует поискать многочлен $s(k)$ степени $d = N - 1$ (а вдруг повезет?). Так, при $N = 2$ рекуррентность (5.122) дает следующее уравнение, которое нужно решить:

$$k + 1 = -\big((k+1)\alpha_1 + \alpha_0\big) - (k\alpha_1 + \alpha_0)\,.$$

Приравнивание коэффициентов при k и 1 показывает, что

$$1 = -\alpha_1 - \alpha_1; \qquad 1 = -\alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_0;$$

следовательно, $s(k) = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}$ является решением, а

$$T(k) = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}\right) \cdot \binom{-2}{k}}{k+1} = (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{4}\,.$$

Может ли это быть желаемой величиной суммы? Да, все получается:

„Превосходно, Холмс!“ „Элементарно, дорогой Ватсон!“

$$(-1)^k \frac{2k+3}{4} - (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{4} = (-1)^k (k+1) = \binom{-2}{k}\,.$$

Формулу суммирования можно записать в другом виде, с верхним пределом

$$\sum_{k<m} \binom{-2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{4} \bigg|_0^m$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2} \left(m + \frac{1-(-1)^m}{2}\right)$$

$$= (-1)^{m-1} \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \qquad \text{целое } m \geqslant 0.$$

В этом представлении скрыт тот факт, что биномиальный коэффициент $\binom{-2}{k}$ суммируем в гипергеометрических членах, ибо $\lceil m/2 \rceil$ не является гипергеометрическим членом. (См. упр. 12.)

Со знаменателем (5.121) могут возникнуть затруднения, если $p(k) = 0$ для некоторого целого k. Упражнение 97 помогает понять, что можно сделать в такой ситуации.

А было бы интересно взглянуть.

Заметим, что нет никакой необходимости собирать каталог гипергеометрических членов, суммируемых в неопределенном виде, подобный базе данных определенных гипергеометрических сумм, о которой мы говорили ранее в этой главе,— алгоритм Госпера дает быстрый и регулярный метод, который работает во всех суммируемых случаях.

Марко Петковшек [236] нашел замечательный способ обобщения алгоритма Госпера на более сложные задачи обращения. А именно, он показал, как найти все гипергеометрические члены $T(k)$, удовлетворяющие рекуррентности l-го порядка

$$t(k) = p_l(k)T(k+l) + \cdots + p_1(k)T(k+1) + p_0(k)T(k), \quad (5.125)$$

если даны гипергеометрический член $t(k)$ и многочлены $p_l(k)$, $\ldots$, $p_1(k)$, $p_0(k)$.

5.8 МЕХАНИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ

Алгоритм Госпера замечателен сам по себе, однако он позволяет найти выражение в замкнутом виде лишь для некоторых биномиальных сумм из числа встречающихся на практике. Дорон Зильбергер [120] сумел так расширить алгоритм Госпера, что он стал еще замечательнее и теперь справляется с куда большим числом случаев. Используя расширение Зильбергера, мы можем не только находить частные суммы, но и выполнять суммирование по всем k, так что у нас появляется альтернатива гипергеометрическим методам из разд. 5.5 и 5.6. При этом вычисления, как и в исходном методе Госпера, могут выполняться на компьютере почти механически; нам не нужно рассуждать или полагаться на удачу.

Основная идея заключается в том, чтобы рассматривать наше слагаемое как функцию $t(n,k)$ от двух переменных n и k. (В алгоритме Госпера мы писали просто $t(k)$.) Если неопределенная сумма $t(n,k)$ по k не выражается в гипергеометрических членах — и давайте считать, что так оно и есть, исключение составляют лишь немногие суммы,— то, как заметил Зильбергер, часто удается так видоизменить $t(n,k)$, чтобы получить иные слагаемые, которые уже суммируются в неопределенном виде. Например, на практике часто оказывается, что $\beta_0(n)t(n,k)+\beta_1(n)t(n+1,k)$ неопределенно суммируемо по k для подходящих многочленов $\beta_0(n)$ и $\beta_1(n)$. А вычислив сумму по k, мы получаем рекуррентное соотношение по n, которое и решает нашу задачу.

А страница 199 исчезла.

Чтобы познакомиться с общим подходом, начнем с рассмотрения простого случая. Предположим, что мы забыли биномиальную теорему и хотим вычислить $\sum_k \binom{n}{k} z^k$. Как можно было бы получить ответ, если мы не обладаем даром ясновидения и никакие догадки не приходят в голову? Ранее в этой главе, например в задаче 3 из разд. 5.2, мы научились заменять $\binom{n}{k}$ на $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

и с легкостью получать требуемый результат. Но есть и более систематический путь.

Пусть $t(n,k) = \binom{n}{k}z^k$ — суммируемая величина. Алгоритм Госпера говорит, что мы не можем вычислить частные суммы $\sum_{k\leqslant m} t(n,k)$ в гипергеометрических членах для произвольного n, кроме случая $z = -1$. Так что вместо этого рассмотрим более общее слагаемое

$$\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k). \qquad (5.126)$$

Попробуем найти значения $\beta_0(n)$ и $\beta_1(n)$, при которых алгоритм Госпера сработает успешно. Во-первых, мы хотели бы упростить (5.126), применяя соотношение между $t(n+1,k)$ и $t(n,k)$, с тем чтобы исключить $t(n+1,k)$ из выражения. Поскольку

$$\frac{t(n+1,k)}{t(n,k)} = \frac{(n+1)!\,z^k}{(n+1-k)!\,k!}\,\frac{(n-k)!\,k!}{n!\,z^k} = \frac{n+1}{n+1-k},$$

имеем

$$\hat{t}(n,k) = p(n,k)\frac{t(n,k)}{n+1-k},$$

где

$$p(n,k) = (n+1-k)\beta_0(n) + (n+1)\beta_1(n).$$

Теперь применим алгоритм Госпера к $\hat{t}(n,k)$ с фиксированным n. Сначала запишем

$$\frac{\hat{t}(n,k+1)}{\hat{t}(n,k)} = \frac{\hat{p}(n,k+1)}{\hat{p}(n,k)}\,\frac{q(n,k)}{r(n,k+1)}, \qquad (5.127)$$

как в (5.117). Метод Госпера нашел бы такое представление, начав с $\hat{p}(n,k) = 1$, но в расширении Зильбергера лучше начать с $\hat{p}(n,k) = p(n,k)$ Заметим, что если положить $\bar{t}(n,k) = \hat{t}(n,k)/p(n,k)$ и $\bar{p}(n,k) = \hat{p}(n,k)/p(n,k)$, то уравнение (5.127) будет эквивалентно

$$\frac{\bar{t}(n,k+1)}{\bar{t}(n,k)} = \frac{\bar{p}(n,k+1)}{\bar{p}(n,k)}\,\frac{q(n,k)}{r(n,k+1)}. \qquad (5.128)$$

Таким образом, мы получим $\hat{p}$, q и r, удовлетворяющие (5.127), если найдем $\bar{p}$, q, r, удовлетворяющие (5.128), начав с $\bar{p}(n,k) = 1$. Это облегчает жизнь, поскольку $\bar{t}(n,k)$ не содержит неизвестных величин $\beta_0(n)$ и $\beta_1(n)$, которые входят в $\hat{t}(n,k)$. В нашем случае $\bar{t}(n,k) = t(n,k)/(n+1-k) = n!\,z^k/(n+1-k)!\,k!$, так что

$$\frac{\bar{t}(n,k+1)}{\bar{t}(n,k)} = \frac{(n+1-k)z}{k+1}$$

Теперь я уже запомнил, почему $r(n,k)$ не равно $k+1$.

и мы можем взять $q(n,k) = (n+1-k)z$ и $r(n,k) = k$. Предполагается, что эти многочлены удовлетворяют (5.118). Если же нет, то мы должны удалить из q и r некоторые множители и включить соответствующие множители (5.119) в $\bar{p}(n,k)$; но это нужно делать, только если величина $\alpha - \beta$ в (5.118) является целой положительной константой, не зависящей от n, поскольку мы хотим, чтобы наши вычисления были справедливы для произвольного n. (Формулы, которые мы выводим, будут в действительности справедливы, даже когда n и k — не целые (при использовании обобщенных факториалов (5.83).)

Этот способ рассуждений „для произвольного n" обосновывается в самом конце этого раздела.
— Перев.

Наши начальные q и r удовлетворяют (5.118) в указанном смысле, так что можно переходить прямо к шагу 2 в алгоритме Госпера; мы хотели бы решить уравнение, аналогичное (5.122), с использованием (5.127) вместо (5.117). Так что наша задача — решить

$$\hat{p}(n,k) = q(n,k)s(n,k+1) - r(n,k)s(n,k) \qquad (5.129)$$

относительно секретного многочлена

$$s(n,k) = \alpha_d(n)k^d + \alpha_{d-1}(n)k^{d-1} + \cdots + \alpha_0(n). \qquad (5.130)$$

(Коэффициентами s могут быть не константы, а функции от n.) В нашем случае уравнение (5.129) имеет вид

$$\begin{aligned}(n+1-k)\beta_0(n) + (n+1)\beta_1(n)\\ = (n+1-k)zs(n,k+1) - ks(n,k),\end{aligned}$$

и мы рассматриваем его как полиномиальное уравнение по k, где коэффициенты зависят от n. Как и ранее, находим степень d многочлена s, рассматривая многочлены $Q(n,k) = q(n,k) - r(n,k)$ и $R(n,k) = q(n,k) + r(n,k)$. Поскольку $\deg(Q) = \deg(R) = 1$ (в предположении $z \neq \pm 1$), имеем $d = \deg(\hat{p}) - \deg(Q) = 0$ и $s(n,k) = \alpha_0(n)$ не зависит от k. Наше уравнение превращается в

Здесь степень $\deg(Q)$ означает степень по k; n считается константой.

$$(n+1-k)\beta_0(n) + (n+1)\beta_1(n) = (n+1-k)z\alpha_0(n) - k\alpha_0(n);$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, мы получаем эквивалентную систему уравнений, не содержащую k:

$$\begin{aligned}(n+1)\beta_0(n) + (n+1)\beta_1(n) - (n+1)z\alpha_0(n) &= 0,\\ -\beta_0(n) \qquad\qquad\qquad + (z+1)\alpha_0(n) &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем решение (5.129) с

$$\beta_0(n) = z+1, \qquad \beta_1(n) = -1, \qquad \alpha_0(n) = s(n,k) = 1.$$

(По случайному совпадению n исчезло.)

Итак, мы установили, пользуясь чисто механическим методом, что $\hat{t}(n,k) = (z+1)t(n,k) - t(n+1,k)$ суммируемо в гипергеометрических членах. Иными словами,

$$\hat{t}(n,k) = T(n,k+1) - T(n,k), \qquad (5.131)$$

где $T(n,k)$ — гипергеометрический член относительно k. Чему равно $T(n,k)$? В соответствии с (5.121) и (5.128) имеем

$$T(n,k) = \frac{r(n,k)s(n,k)\hat{t}(n,k)}{\bar{p}(n,k)} = r(n,k)s(n,k)\bar{t}(n,k)\,, \qquad (5.132)$$

поскольку $\bar{p}(n,k) = 1$. (На практике $\bar{p}(n,k)$ почти всегда оказывается равным 1.) Следовательно,

$$T(n,k) = \frac{k}{n+1-k}\,t(n,k) = \frac{k}{n+1-k}\binom{n}{k}z^k = \binom{n}{k-1}z^k.$$

И, несомненно, концы с концами сходятся — равенство (5.131) выполняется:

$$(z+1)\binom{n}{k}z^k - \binom{n+1}{k}z^k = \binom{n}{k}z^{k+1} - \binom{n}{k-1}z^k\,.$$

Но в действительности нам не требуется точно знать $T(n,k)$, поскольку мы собираемся суммировать $t(n,k)$ по всем целым k. Все, что нам нужно знать,— это то, что $T(n,k)$ отлично от нуля лишь для конечного множества значений k, когда n — произвольное заданное неотрицательное целое. Тогда сумма $T(n,k+1) - T(n,k)$ по всем k должна свернуться в 0.

Пусть $S_n = \sum_k t(n,k) = \sum_k \binom{n}{k}z^k$; это сумма, с которой мы начинали и теперь готовы вычислить ее, поскольку уже много знаем о $t(n,k)$. Процедура Госпера—Зильбергера установила, что

$$\sum_k \bigl((z+1)t(n,k) - t(n+1,k)\bigr) = 0\,.$$

Но эта сумма равна $(z+1)\sum_k t(n,k) - \sum_k t(n+1,k) = (z+1)S_n - S_{n+1}$. Следовательно,

$$S_{n+1} = (z+1)S_n\,. \qquad (5.133)$$

Ага! Эту рекуррентность мы умеем решать, если нам известно S_0. Очевидно, однако, что $S_0 = 1$. Поэтому мы заключаем, что $S_n = (z+1)^n$ для всех целых $n \geqslant 0$. чтд.

На самом деле $\lim_{k\to\infty} T(n,k) = 0$ при $|z| < 1$ и произвольном комплексном n. Поэтому (5.133) справедливо при всех n. В частности, $S_n = (z+1)^n$, когда n — целое отрицательное число.

Посмотрим вновь на проделанное вычисление и подытожим наши действия в такой форме, которую можно будет использовать и для других слагаемых $t(n,k)$. Алгоритм Госпера—Зильбергера записывается следующим образом (считаем, что $t(n,k)$ дано):

0 Положим $l := 0$. (Мы будем искать рекуррентность по n порядка l.)

1 Пусть $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \cdots + \beta_l(n)t(n+l,k)$, где $\beta_0(n)$, $\ldots$, $\beta_l(n)$ — неизвестные функции. Используя свойства $t(n,k)$, найдем $p(n,k)$ — линейную комбинацию $\beta_0(n)$, $\ldots$, $\beta_l(n)$, коэффициентами которой являются многочлены от n и k, такую, что $\hat{t}(n,k)$ может быть записана в форме $p(n,k)\bar{t}(n,k)$,

где $\bar{t}(n,k)$ является гипергеометрическим членом относительно k. Найдем многочлены $\bar{p}(n,k)$, $q(n,k)$, $r(n,k)$, так чтобы отношение членов $\bar{t}(n,k)$ выражалось в виде (5.128) и при этом $q(n,k)$ и $r(n,k)$ удовлетворяли условию Госпера (5.118). Положим $\hat{p}(n,k) = p(n,k)\bar{p}(n,k)$.

2a Положим $d_Q := \deg(q-r)$, $d_R := \deg(q+r)$ и

$$d := \begin{cases} \deg(\hat{p}) - d_Q, & \text{если } d_Q \geqslant d_R\,, \\ \deg(\hat{p}) - d_R + 1, & \text{если } d_Q < d_R\,. \end{cases}$$

2b Если $d \geqslant 0$, то определим $s(n,k)$ как в (5.130) и рассмотрим линейные уравнения относительно $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$, $\beta_0, \ldots, \beta_l$, получаемые приравниванием коэффициентов при степенях k в основном уравнении (5.129). Если эти уравнения имеют решение, в котором все $\beta_0, \ldots, \beta_l$ не равны одновременно нулю, то перейдем к шагу 4. Иначе, если $d_Q < d_R$ и $-2\lambda'/\lambda$ есть целое число, большее d (λ — коэффициент при k^{d_R} в $q+r$; λ' — коэффициент при k^{d_R-1} в $q-r$), то положим $d := -2\lambda'/\lambda$ и повторим шаг 2b.

3 (Слагаемое $\hat{t}(n,k)$ не суммируемо в гипергеометрических членах.) Увеличим l на 1 и вернемся к шагу 1.

4 (Успех.) Положим $T(n,k) := r(n,k)s(n,k)\bar{t}(n,k)/\bar{p}(n,k)$. Алгоритм нашел, что $\hat{t}(n,k) = T(n,k+1) - T(n,k)$.

Позднее мы докажем, что этот алгоритм завершается успешно для всех $t(n,k)$ из широкого класса выражений, называемых подходящими членами.

Биномиальную теорему можно вывести многими способами, так что наш первый пример применения алгоритма Госпера—Зильбергера был скорее поучительным, нежели впечатляющим. На этот раз попробуем справиться со сверткой Вандермонда. Смогут ли Госпер с Зильбергером вывести алгоритмически, что $\sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ имеет простой вид? Алгоритм начинает с $l = 0$, что, по сути, есть повторение исходного алгоритма Госпера, т. е. мы пытаемся проверить, суммируемо ли $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ в гипергеометрических членах. Тут нас ждет сюрприз: это слагаемое оказывается суммируемым, если $a+b$ — некоторое специальное неотрицательное целое число (см. упр. 94). Однако нас интересуют произвольные a и b, и алгоритм быстро обнаруживает, что в общем случае неопределенная сумма не является гипергеометрическим членом. Так что l увеличивается с 0 до 1 и алгоритм теперь пробует $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k)$. На следующем шаге, как в нашем выводе биномиальной теоремы, мы записываем $\hat{t}(n,k) = p(n,k)\bar{t}(n,k)$, где $p(n,k)$ получается путем сокращения дробей в $t(n+1,k)/t(n,k)$. В этом случае — мы настоятельно рекомендуем читателю проверить все наши выкладки на листке бумаги; они не такие сложные, как кажется,— все происходит почти так же, как и ранее, но с

$$p(n,k) = (n+1-k)\beta_0(n) + (b-n+k)\beta_1(n) = \hat{p}(n,k),$$
$$\bar{t}(n,k) = t(n,k)/(n+1-k) = a!\,b!/(a-k)!\,k!\,(b-n+k)!\,(n+1-k)!,$$

$$q(n,k) = (n+1-k)(a-k),$$
$$r(n,k) = (b-n+k)k.$$

Шаг 2а находит, что $\deg(q-r) < \deg(q+r)$ и $d = \deg(\hat{p}) - \deg(q+r) + 1 = 0$, так что $s(n,k)$ опять не зависит от k. Основное уравнение Госпера (5.129) оказывается эквивалентным системе двух уравнений от трех неизвестных

Принципиально важно то, что метод Госпера—Зильбергера всегда приводит к линейным уравнениям относительно неизвестных α и β, поскольку левая часть (5.129) линейна относительно β, а правая часть — относительно α.

$$(n+1)\beta_0(n) + (b-n)\beta_1(n) \quad - (n+1)a\alpha_0(n) = 0,$$
$$-\beta_0(n) \qquad + \beta_1(n) + (a+b+1)\alpha_0(n) = 0,$$

которая имеет решение

$$\beta_0(n) = a+b-n, \qquad \beta_1(n) = -n-1, \qquad \alpha_0(n) = 1.$$

Мы заключаем, что $(a+b-n)t(n,k) - (n+1)t(n+1,k)$ суммируемо по k; следовательно, если $S_n = \sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$, то имеет место рекуррентное соотношение:

$$S_{n+1} = \frac{a+b-n}{n+1} S_n$$

и, значит, $S_n = \binom{a+b}{n}$, поскольку $S_0 = 1$. Как все замечательно получилось!

А что мы сможем сделать с тождеством Заальшютца (5.28), содержащим три биномиальных коэффициента? Доказательство (5.28) в упр. 43 интересно, конечно, но оно требует некоторого озарения. Преобразуя искусство в науку, мы стремимся заменить озарение работой в поте лица; так что давайте посмотрим, в состоянии ли метод суммирования Госпера—Зильбергера обнаружить и доказать (5.28) чисто механическим путем. Для удобства сделаем подстановки $m = b+d$, $n = a$, $r = a+b+c+d$, $s = a+b+c$, так чтобы (5.28) приняло более симметричный вид

$$\sum_k \frac{(a+b+c+d+k)!}{(a-k)!\,(b-k)!\,(c+k)!\,(d+k)!\,k!}$$
$$= \frac{(a+b+c+d)!\,(a+b+c)!\,(a+b+d)!}{a!\,b!\,(a+c)!\,(a+d)!\,(b+c)!\,(b+d)!}. \qquad (5.134)$$

Чтобы сумма была конечной, будем полагать, что либо a, либо b неотрицательное целое.

Положим $t(n,k) = (n+b+c+d+k)!/(n-k)!\,(b-k)!\,(c+k)!\,(d+k)!\,k!$ и $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k)$. Двигаясь по проторенной дорожке, положим

Единственная немеханическая часть работы — выбрать, какой параметр будет называться n.

$$p(n,k) = (n+1-k)\beta_0(n) + (n+1+b+c+d+k)\beta_1(n)$$
$$= \hat{p}(n,k),$$
$$\bar{t}(n,k) = \frac{t(n,k)}{n+1-k} = \frac{(n+b+c+d+k)!}{(n+1-k)!\,(b-k)!\,(c+k)!\,(d+k)!\,k!},$$

$$q(n,k) = (n+b+c+d+k+1)(n+1-k)(b-k),$$
$$r(n,k) = (c+k)(d+k)k$$

и попытаемся решить (5.129) относительно $s(n,k)$. Снова оказывается, что $\deg(q-r) < \deg(q+r)$, но на этот раз $\deg(\hat{p}) - \deg(q+r) + 1 = -1$, так что тут мы, кажется, застопорились. Однако шаг 2b представляет на выбор для степени s важный второй вариант $d = -2\lambda'/\lambda$; не стоит отказываться от еще одной попытки, так что испытаем сейчас этот выбор. Уже $R(n,k) = q(n,k) + r(n,k) = 2k^3 + \cdots$, так что $\lambda = 2$, тогда как многочлен $Q(n,k) = q(n,k) - r(n,k)$ каким-то чудом имеет степень 1 относительно k — коэффициенты при k^2 сокращаются! Следовательно, $\lambda' = 0$; метод Госпера позволяет взять $d = 0$ и $s(n,k) = \alpha_0(n)$.

Обратите внимание, что λ' не есть старший коэффициент Q, несмотря на то что λ есть старший коэффициент R. Число λ' является коэффициентом при $k^{\deg(R)-1}$ в Q.

Уравнения, которые нам предстоит решать, выглядят так:

$$(n+1)\beta_0(n) + (n+1+b+c+d)\beta_1(n)$$
$$\quad -(n+1)(n+1+b+c+d)b\alpha_0(n) = 0,$$
$$-\beta_0(n) + \beta_1(n)$$
$$\quad -\big((n+1)b - (n+1+b)(n+1+b+c+d) - cd\big)\alpha_0(n) = 0;$$

и мы находим

$$\beta_0(n) = (n+1+b+c)(n+1+b+d)(n+1+b+c+d),$$
$$\beta_1(n) = -(n+1)(n+1+c)(n+1+d),$$
$$\alpha_0(n) = 2n+2+b+c+d,$$

Пот течет, а тождество вытекает.

пролив совсем немного пота. Отсюда немедленно вытекает тождество (5.134).

Можно получить аналогичное доказательство (5.134), если работать с $n = d$ вместо $n = a$. (См. упр. 99.)

Подход Госпера—Зильбергера помогает вычислять не только неопределенные суммы по всем k, но и определенные суммы по ограниченному диапазону. Рассмотрим, например, сумму

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} z^k. \qquad (5.135)$$

Для $z = \frac{1}{2}$ мы получили „неожиданный“ результат (5.20); может быть для Госпера и Зильбергера здесь нет ничего неожиданного? Обозначая $t(n,k) = \binom{n+k}{k} z^k$, получаем

$$p(n,k) = (n+1)\beta_0(n) + (n+1+k)\beta_1(n) = \hat{p}(n,k),$$
$$\bar{t}(n,k) = t(n,k)/(n+1) = (n+k)!\,z^k/k!\,(n+1)!,$$
$$q(n,k) = (n+1+k)z,$$
$$r(n,k) = k$$

и $\deg(s) = \deg(\hat{p}) - \deg(q-r) = 0$. Решением уравнения (5.129) будет $\beta_0(n) = 1$. Следовательно, мы находим

$$t(n,k) + (z-1)t(n+1,k) = T(n,k+1) - T(n,k), \qquad (5.136)$$

где $T(n,k) = r(n,k)s(n,k)\hat{t}(n,k)/\hat{p}(n,k) = \binom{n+k}{k-1}z^k$. Теперь можно просуммировать (5.136) для $0 \leqslant k \leqslant n+1$, получая

$$\begin{aligned} S_n(z) + t(n,n+1) + (z-1)S_{n+1}(z) &= T(n,n+2) - T(n,0) \\ &= \binom{2n+2}{n+1}z^{n+2} \\ &= 2\binom{2n+1}{n}z^{n+2}. \end{aligned}$$

Но $t(n,n+1) = \binom{2n+1}{n+1}z^{n+1} = \binom{2n+1}{n}z^{n+1}$, так что

$$S_{n+1}(z) = \frac{1}{1-z}\left(S_n(z) + (1-2z)\binom{2n+1}{n}z^{n+1}\right). \qquad (5.137)$$

Сразу ясно, что $z = \frac{1}{2}$ действительно особый случай, и $S_{n+1}(\frac{1}{2}) = 2S_n(\frac{1}{2})$. Более того, можно упростить рекуррентное соотношение (5.137), умножив обе части на суммирующий множитель $(1-z)^{n+1}$; это приводит к общему тождеству

$$\begin{aligned} &(1-z)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}z^k \\ &\qquad = 1 + \frac{1-2z}{2-2z}\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\bigl(z(1-z)\bigr)^k, \end{aligned} \qquad (5.138)$$

которое мало кто мог ожидать до появления Госпера с Зильбергером. Теперь же производство подобных тождеств — чисто рутинная работа.

А вот похожая сумма

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}z^k, \qquad (5.139)$$

встретившаяся нам в (5.74), как быть с ней? Полные уверенности, мы полагаем $t(n,k) = \binom{n-k}{k}z^k$ и затем вычисляем

$$\begin{aligned} p(n,k) &= (n+1-2k)\beta_0(n) + (n+1-k)\beta_1(n) = \hat{p}(n,k), \\ \bar{t}(n,k) &= t(n,k)/(n+1-2k) = (n-k)!\,z^k/k!\,(n+1-2k)!, \\ q(n,k) &= (n+1-2k)(n-2k)z, \\ r(n,k) &= (n+1-k)k. \end{aligned}$$

Но увы — уравнение (5.129) не решается, если $z \neq -\frac{1}{4}$, поскольку степень s должна бы быть равной $\deg(\hat{p}) - \deg(q-r) = -1$.

$S_n(-\frac{1}{4})$ равно $(n+1)/2^n$.

Никаких проблем; просто добавим еще один параметр $\beta_2(n)$ и испытаем $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) + \beta_2(n)t(n+2,k)$:

$$\begin{aligned} p(n,k) = (n+1-2k)(n+2-2k)\beta_0(n) \\ + (n+1-k)(n+2-2k)\beta_1(n) \\ + (n+1-k)(n+2-k)\beta_2(n) = \hat{p}(n,k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{t}(n,k) &= t(n,k)/(n+1-2k)(n+2-2k)\\ &= (n-k)!\,z^k/k!\,(n+2-2k)!\,,\\ q(n,k) &= (n+2-2k)(n+1-2k)z\,,\\ r(n,k) &= (n+1-k)k\,.\end{aligned}$$

Теперь можно взять $s(n,k) = \alpha_0(n)$ и (5.129) имеет решение

$$\beta_0(n) = z\,, \qquad \beta_1(n) = 1\,, \qquad \beta_2(n) = -1\,, \qquad \alpha_0(n) = 1\,.$$

Мы обнаружили, что

$$zt(n,k) + t(n+1,k) - t(n+2,k) = T(n,k+1) - T(n,k)\,,$$

где $T(n,k)$ равно $r(n,k)s(n,k)\hat{t}(n,k)/\hat{p}(n,k) = (n+1-k)k\bar{t}(n,k) = \binom{n+1-k}{k-1}z^k$. Суммирование от $k=0$ до $k=n$ дает

$$\begin{aligned} zS_n(z) + \Bigl(S_{n+1}(z) - \binom{0}{n+1}z^{n+1}\Bigr)\\ - \Bigl(S_{n+2}(z) - \binom{0}{n+2}z^{n+2} - \binom{1}{n+1}z^{n+1}\Bigr)\\ = T(n,n+1) - T(n,0)\,.\end{aligned}$$

Но $\binom{1}{n+1}z^{n+1} = \binom{0}{n}z^{n+1} = T(n,n+1)$ для любого $n \geqslant 0$, так что получаем

$$S_{n+2}(z) = S_{n+1}(z) + zS_n(z)\,, \qquad n \geqslant 0. \tag{5.140}$$

Мы будем изучать такие рекуррентности в гл. 6 и 7; методы этих глав позволяют немедленно перейти от (5.140) к замкнутой форме (5.74) при условии $S_0(z) = S_1(z) = 1$.

Еще один, знаменитый пример завершает картину. В 1978 г. французский ученый Роже Апери решил проблему, которая долго не поддавалась усилиям математиков, доказав, что число $\zeta(3) = 1 + 2^{-3} + 3^{-3} + 4^{-3} + \cdots$ иррационально [8]. Одна из важнейших частей его работы включает вычисление биномиальной суммы

$$A_n = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2. \tag{5.141}$$

Рекуррентное соотношение для этой последовательности, которое он объявил, другие математики в то время не могли проверить. (С тех пор числа A_n стали известны как числа Апери; имеем $A_0 = 1$, $A_1 = 5$, $A_2 = 73$, $A_3 = 1445$, $A_4 = 33001$.) Наконец, Дон Загиер и Генри Коэн [46] нашли доказательство предположения Апери, и это их доказательство для одной (но трудной) суммы стало впоследствии одним из важнейших соображений, приведших Зильбергера к открытию общего метода, который мы сейчас обсуждаем.

Ну вот, мы увидели достаточно примеров, чтобы сумма (5.141) стала почти тривиальной. Полагая $t(n,k) = \binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$ и $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k)+\beta_1(n)t(n+1,k)+\beta_2(n)t(n+2,k)$, попытаемся решить (5.129) с

(Сначала мы попробовали обойтись без β_2, но эта попытка провалилась.)

$$\begin{aligned} p(n,k) &= (n+1-k)^2(n+2-k)^2\beta_0(n) \\ &\quad + (n+1+k)^2(n+2-k)^2\beta_1(n) \\ &\quad + (n+1+k)^2(n+2+k)^2\beta_2(n) = \hat{p}(n,k), \\ \bar{t}(n,k) &= t(n,k)/(n+1-k)^2(n+2-k)^2 \\ &= (n+k)!^2/k!^4(n+2-k)!^2, \\ q(n,k) &= (n+1+k)^2(n+2-k)^2, \\ r(n,k) &= k^4. \end{aligned}$$

(То обстоятельство, что q имеет множитель $(k+n+1)$, а r — множитель k, можно проигнорировать; это не нарушает (5.118), поскольку мы рассматриваем n как переменную, а не как фиксированное целое.) Так как $q(n,k) - r(n,k) = -2k^3 + \cdots$, можно положить $\deg(s) = -2\lambda'/\lambda = 2$ и возьмем

$$s(n,k) = \alpha_2(n)k^2 + \alpha_1(n)k + \alpha_0(n).$$

С таким выбором s рекуррентное соотношение (5.129) превращается в пять уравнений относительно шести неизвестных $\beta_0(n)$, $\beta_1(n)$, $\beta_2(n)$, $\alpha_0(n)$, $\alpha_1(n)$, $\alpha_2(n)$. Так, например, приравнивание коэффициентов при k^0 упрощается до уравнения

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0;$$

уравнением для k^4 будет

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + (6 + 6n + 2n^2)\alpha_2 = 0.$$

Три других уравнения более сложны. Но главное здесь то, что эти линейные уравнения — как и вообще все уравнения, появляющиеся на этой стадии алгоритма Госпера—Зильбергера,— *однородны* (их правая часть равна 0). Поэтому они всегда имеют ненулевое решение, если только число неизвестных превышает число уравнений. В нашем случае решением оказывается

$$\begin{aligned} \beta_0(n) &= (n+1)^3, \\ \beta_1(n) &= -(2n+3)(17n^2+51n+39), \\ \beta_2(n) &= (n+2)^3, \\ \alpha_0(n) &= -16(n+1)(n+2)(2n+3), \\ \alpha_1(n) &= -12(2n+3), \\ \alpha_2(n) &= 8(2n+3). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 t(n,k) - (2n+3)(17n^2+51n+39)t(n+1,k) \\ + (n+2)^3 t(n+2,k) = T(n,k+1) - T(n,k), \end{aligned}$$

где $T(n,k) = k^4 s(n,k)\bar{t}(n,k) = (2n+3)(8k^2-12k-16(n+1)(n+2)) \times (n+k)!^2/(k-1)!^4(n+2-k)!^2$. Суммируя по k, получаем немыслимое рекуррентное соотношение Апери,

$$(n+1)^3 A_n + (n+2)^3 A_{n+2} = (2n+3)(17n^2+51n+39)A_{n+1}\,. \qquad (5.142)$$

„Профессор Литлвуд, случись ему использовать какое-либо алгебраическое тождество, никогда не затруднял себя его доказательством; он утверждал, что алгебраическое тождество, если оно справедливо, может быть проверено в несколько строк любым сомневающимся, который настолько туп, что нуждается в этой проверке. Моя цель на протяжении следующих страниц — опровергнуть это утверждение.“
— Ф. Дайсон [95]

Неужели метод Госпера—Зильбергера работает со всеми суммами, которые встретились нам в этой главе? Нет. Он неприменим в случае, когда $t(n,k)$ равно $\binom{n}{k}(k+1)^{k-1}(n-k+1)^{n-k-1}$ из (5.65), поскольку отношение членов $t(n,k+1)/t(n,k)$ не является рациональной функцией от k. Он также не справляется со случаями вроде $t(n,k) = \binom{n}{k}n^k$, поскольку здесь второе отношение членов $t(n+1,k)/t(n,k)$ не является рациональной функцией от k. (Мы можем, однако, получить решение в этом случае, просуммировав $\binom{n}{k}z^k$ и затем положив $z = n$.) И, наконец, этот метод терпит неудачу для удивительно простого слагаемого, наподобие $t(n,k) = 1/(nk+1)$, даже несмотря на то, что оба отношения $t(n,k+1)/t(n,k)$ и $t(n+1,k)/t(n,k)$ — рациональные функции от n и k; см. упр. 107.

Вместе с тем, алгоритм Госпера—Зильбергера с гарантией приводит к успеху в огромном числе случаев, а именно, когда слагаемое $t(n,k)$ является так называемым *подходящим членом*, т. е. может быть записано в виде

$$t(n,k) = f(n,k)\frac{(a_1n+a_1'k+a_1'')!\,\ldots\,(a_pn+a_p'k+a_p'')!}{(b_1n+b_1'k+b_1'')!\,\ldots\,(b_qn+b_q'k+b_q'')!}\,w^n z^k\,. \qquad (5.143)$$

Здесь $f(n,k)$ — многочлены от n и k; коэффициенты $a_1, a_1', \ldots, a_p, a_p', b_1, b_1', \ldots, b_q, b_q'$ — определенные целочисленные константы; параметры w и z ненулевые; остальные величины $a_1'', \ldots, a_p''$, $b_1'', \ldots, b_q''$ — произвольные комплексные числа. Мы докажем, что если $t(n,k)$ является подходящим членом, то найдутся такие многочлены $\beta_0(n), \ldots, \beta_l(n)$, не все равные нулю, и подходящий член $T(n,k)$, что

$$\beta_0(n)t(n,k) + \cdots + \beta_l(n)t(n+l,k) = T(n,k+1) - T(n,k)\,. \qquad (5.144)$$

Что произойдет, если $t(n,k)$ не зависит от n?

Следующее доказательство принадлежит Вильфу и Зильбергеру [54].

Обозначим через N оператор, увеличивающий n на 1, а через K — оператор, увеличивающий k на 1, так что, например, $N^2K^3t(n,k) = t(n+2,k+3)$. Мы будем изучать линейные разностные операторы от N, K и n, а именно операторные многочлены вида

$$H(N,K,n) = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\alpha_{i,j}(n)N^iK^j\,, \qquad (5.145)$$

где каждый коэффициент $\alpha_{i,j}(n)$ есть многочлен от n. Первое наше наблюдение состоит в том, что, если $t(n,k)$ — произвольный подходящий член и $H(N,K,n)$ — произвольный разностный оператор, то $H(N,K,n)t(n,k)$ — подходящий член. Допустим, t и H задаются, соответственно, равенствами (5.143) и (5.145); тогда мы определим „базовое слагаемое"

$$\bar{t}(n,k)_{I,J} = \frac{\prod_{i=1}^{p}\bigl(a_i n + a_i' k + a_i I[a_i<0] + a_i' J[a_i'<0] + a_i''\bigr)!}{\prod_{i=1}^{q}\bigl(b_i n + b_i' k + b_i I[b_i>0] + b_i' J[b_i'>0] + b_i''\bigr)!}\, w^n z^k .$$

Если, например, $t(n,k)$ есть $\binom{n-2k}{k} = (n-2k)!/k!\,(n-3k)!$, то базовым слагаемым, соответствующим линейному разностному оператору степеней I и J, будет $\bar{t}(n,k)_{I,J} = (n-2k-2J)!/(k+J)!\,(n-3k+I)!$. Главное то, что $\alpha_{i,j}(n)N^iK^jt(n,k)$ равно $\bar{t}(n,k)_{I,J}$, умноженному на некоторый многочлен от n и k, если $0 \leqslant i \leqslant I$ и $0 \leqslant j \leqslant J$. Конечные суммы многочленов — снова многочлены, так что $H(N,K,n)t(n,k)$ имеет требуемый вид (5.143).

На следующем шаге нам надо показать, что если $t(n,k)$ — подходящий член, то всегда найдется такой линейный разностный оператор $H(N,K,n)$, что

$$H(N,K,n)t(n,k) = 0 .$$

Если $0 \leqslant i \leqslant I$ и $0 \leqslant j \leqslant J$, то сдвинутый член $N^iK^jt(n,k)$ есть произведение $\bar{t}(n,k)_{I,J}$ и многочлена от n и k, имеющего степень по k, самое большее,

Интересно, существует ли сдвинутый подходящий гипергеометрический член?

$$D_{I,J} = \deg(f) + |a_1|I + |a_1'|J + \cdots + |a_p|I + |a_p'|J + |b_1|I + |b_1'|J + \cdots + |b_q|I + |b_q'|J.$$

Следовательно, требуемый оператор H существует, если мы сможем решить систему из $D_{I,J}+1$ однородных линейных уравнений с $(I+1)(J+1)$ переменными $\alpha_{i,j}(n)$, коэффициентами которых являются многочлены от n. Все, что нам требуется,— это выбрать настолько большие I и J, чтобы выполнялось неравенство $(I+1)(J+1) > D_{I,J}+1$. Например, можно взять $I = 2A'+1$, где

$$A = |a_1| + \cdots + |a_p| + |b_1| + \cdots + |b_q| ,$$
$$A' = |a_1'| + \cdots + |a_p'| + |b_1'| + \cdots + |b_q'| .$$

Последний шаг доказательства заключается в переходе от уравнения $H(N,K,n)t(n,k) = 0$ к решению (5.144). Пусть H выбран так, чтобы минимизировать J; иными словами, H имеет наименьшую возможную степень по K. Можно записать

$$H(N,K,n) = H(N,1,n) - (K-1)G(N,K,n)$$

Трюк, который мы здесь применим, основан на представлении H в виде многочлена от K и затем замене K на $\Delta+1$.

для некоторого линейного разностного оператора $G(N,K,n)$. Пусть $H(N,1,n) = \beta_0(n) + \beta_1(n)N + \cdots + \beta_l(n)N^l$ и $T(n,k) = G(N,K,n)t(n,k)$. Тогда $T(n,k)$ — подходящий член и (5.144) имеет место.

Доказательство почти завершено, но надо еще проверить, что $H(N, 1, n)$ не является просто нулевым оператором. Если это так, то $T(n, k)$ не зависит от k. Поэтому найдутся такие многочлены $\beta_0(n)$ и $\beta_1(n)$, что $(\beta_0(n) + \beta_1(n)N)T(n,k) = 0$. Но тогда $(\beta_0(n) + \beta_1(n)N)G(N, K, n)$ является ненулевым разностным оператором степени $J - 1$, который аннулирует $t(n, k)$; это противоречит минимальности J. Таким образом, наше доказательство (5.144) завершено.

Теперь, зная что (5.144) выполнено для некоторого подходящего члена T, мы можем быть уверены, что алгоритм Госпера успешно найдет T (или T плюс константу). Мы обосновали алгоритм Госпера только для случая гипергеометрических членов $t(k)$, зависящих от одной переменной k, однако можно распространить доказательство на случай двух переменных следующим образом. Существует бесконечно много комплексных чисел n, для которых выполнено условие (5.118), если мы разложим $q(n, k)$ и $r(n, k)$ как многочлены от k, и для которых вычисление степени d на шаге 2 дает тот же результат, что в алгоритме Госпера для одной переменной. Для всех таких n наше предыдущее доказательство устанавливает существование нужного многочлена $s(n, k)$; следовательно, существует и требуемый многочлен $s(n, k)$ от двух переменных n и k. ЧТД.

Мы доказали, что алгоритм Госпера—Зильбергера сможет найти решение (5.144) для некоторого, как можно меньшего l. Это решение дает нам рекуррентное соотношение по n для вычисления суммы по k любого подходящего члена $t(n, k)$ при условии, что $t(n, k)$ отлично от нуля лишь для конечного множества значений k. И, разумеется, можно поменять ролями n и k, поскольку определение подходящего члена (5.143) симметрично относительно n и k.

Упражнения 98–108 дают еще несколько примеров применения алгоритма Госпера—Зильбергера, иллюстрируя его разносторонность. Вильф и Зильбергер [54] существенно расширили эти результаты и получили метод, который справляется с обобщенными биномиальными коэффициентами и кратными суммами.

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Чему равно 11^4? Почему это число легко вычислить тому, кто знаком с биномиальными коэффициентами?

2 При каком значении (значениях) k величина $\binom{n}{k}$ максимальна, если n — заданное целое положительное число? Обоснуйте ваш ответ.

3 Докажите „свойство шестиугольника“, $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$.

4 Вычислите $\binom{-1}{k}$, обращая (т. е. делая положительным) верхний индекс.

5 Пусть p — простое число. Покажите, что $\binom{p}{k} \bmod p = 0$ при $0 < k < p$. Что следует отсюда относительно биномиальных коэффициентов $\binom{p-1}{k}$?

6 Подправьте решение задачи 6 в тексте разд. 5.2, правильно применив правило симметрии.

В случае, когда тождество не выполнено.

7 Справедлива ли формула (5.34) и при $k < 0$?

8 Вычислите

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-k/n)^n.$$

Какова приблизительно величина этой суммы при очень большом n? *Указание:* эта сумма есть $\Delta^n f(0)$ при некоторой функции f.

9 Покажите, что обобщенные экспоненциальные ряды из (5.58) подчиняются правилу

$$\mathcal{E}_t(z) = \mathcal{E}(tz)^{1/t}, \qquad \text{если } t \neq 0,$$

где $\mathcal{E}(z)$ служит сокращением для $\mathcal{E}_1(z)$.

10 Покажите, что $-2\big(\ln(1-z)+z\big)/z^2$ является гипергеометрической функцией.

11 Выразите обе функции

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\arcsin z = z + \frac{1\cdot z^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot z^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot z^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

через гипергеометрические ряды.

12 Какая из приведенных ниже функций от k является „гипергеометрическим членом“ в смысле разд. 5.7? Во всех случаях обоснуйте свой ответ.

a n^k.
b k^n.
c $\big(k! + (k+1)!\big)/2$.
d H_k, т. е. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$.
e $1/\binom{n}{k}$
f $t(k)T(k)$, если t и T — гипергеометрические члены.
g $t(k) + T(k)$, если t и T — гипергеометрические члены.
h $t(n-k)$, если t — гипергеометрический член.
i $a\,t(k) + b\,t(k+1) + c\,t(k+2)$, если t — гипергеометрический член.
j $\lceil k/2 \rceil$.
k $k\,[k>0]$.

(Здесь t и T не обязательно связаны так, как в (5.120).)

Обязательные упражнения

13 Установите связь между суперфакториальной функцией $P_n = \prod_{k=1}^{n} k!$ из упр. 4.55, гиперфакториальной функцией $Q_n = \prod_{k=1}^{n} k^k$ и произведением $R_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

14 Докажите тождество (5.25), обратив верхний индекс в правиле свертки Вандермонда (5.22). Затем покажите, что еще одно обращение дает тождество (5.26).

15 Чему равна сумма $\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k$? *Указание:* см. (5.29).

16 Вычислите сумму

$$\sum_k \binom{2a}{a+k}\binom{2b}{b+k}\binom{2c}{c+k}(-1)^k$$

при целых неотрицательных a, b, c.

17 Установите простую зависимость между $\binom{2n-1/2}{n}$ и $\binom{2n-1/2}{2n}$.

18 Найдите другое выражение, аналогичное (5.35), для произведения

$$\binom{r}{k}\binom{r-1/3}{k}\binom{r-2/3}{k}.$$

19 Покажите, что обобщенные биномиальные ряды из (5.58) подчиняются правилу

$$\mathcal{B}_t(z) = \mathcal{B}_{1-t}(-z)^{-1}.$$

20 Определим „обобщенный инфрагеометрический ряд" формулой

$$G\left({a_1, \ldots, a_m \atop b_1, \ldots, b_n} \middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a_1^{\underline{k}} \ldots a_m^{\underline{k}}}{b_1^{\underline{k}} \ldots b_n^{\underline{k}}} \frac{z^k}{k!},$$

используя убывающие степени вместо возрастающих в определении (5.76). Объясните, как ряд G связан с F.

21 Покажите, что эйлерово определение факториалов согласуется с обычным определением, установив, что предел в определении (5.83) равен $1/m!$, если $z = m$ — целое положительное число.

22 Воспользуйтесь определением (5.83) для доказательства *факториальной формулы удвоения*:

Между прочим, $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$.

$$x!\,(x-\tfrac{1}{2})! = (2x)!\,(-\tfrac{1}{2})!/2^{2x}.$$

23 Какова величина $F(-n, 1; ; 1)$?

24 Найдите величину $\sum_k \binom{n}{m+k}\binom{m+k}{2k}4^k$, воспользовавшись гипергеометрическим рядом.

25 Покажите, что

$$(a_1-b_1)\,F\left({a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_m \atop b_1+1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right) = a_1\,F\left({a_1+1,\,a_2,\,\ldots,\,a_m \atop b_1+1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right) - b_1\,F\left({a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_m \atop b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right).$$

Установите аналогичную зависимость между гипергеометрическими функциями

$$F\left({a_1,\,a_2,\,a_3,\,\ldots,\,a_m \atop b_1,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right),$$

$$F\left({a_1+1,\,a_2,\,a_3,\,\ldots,\,a_m \atop b_1,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right),$$

$$F\left({a_1,\,a_2+1,\,a_3,\,\ldots,\,a_m \atop b_1,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right).$$

26 Из уравнения

$$F\left({a_1,\,\ldots,\,a_m \atop b_1,\,\ldots,\,b_n}\,\middle|\,z\right) = 1 + G(z)$$

выразите функцию $G(Z)$ как кратное некоторому гипергеометрическому ряду.

27 Докажите, что

$$F\left({a_1,\,a_1+\frac{1}{2},\,\ldots,\,a_m,\,a_m+\frac{1}{2} \atop b_1,\,b_1+\frac{1}{2},\,\ldots,\,b_n,\,b_n+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}\,\middle|\,(2^{m-n-1}z)^2\right) = \frac{1}{2}\left(F\left({2a_1,\ldots,2a_m \atop 2b_1,\ldots,2b_n}\,\middle|\,z\right) + F\left({2a_1,\ldots,2a_m \atop 2b_1,\ldots,2b_n}\,\middle|\,-z\right)\right).$$

28 Докажите *тождество Эйлера*

$$F\left({a,\,b \atop c}\,\middle|\,z\right) = (1-z)^{c-a-b}\,F\left({c-a,\,c-b \atop c}\,\middle|\,z\right),$$

применив дважды правило симметрии Пфаффа (5.101).

29 Покажите, что вырожденные гипергеометрические функции удовлетворяют соотношению

$$e^z\,F\left({a \atop b}\,\middle|\,-z\right) = F\left({b-a \atop b}\,\middle|\,z\right).$$

30 Какой гипергеометрический ряд F удовлетворяет уравнению $zF'(z) + F(z) = 1/(1-z)$?

31 Покажите, что если $f(k)$ — любая функция, „суммируемая в гипергеометрических членах“, то сама функция f кратна некоторому гипергеометрическому члену. Так, например, если $\sum f(k)\,\delta k = cF(A_1,\ldots,A_M;B_1,\ldots,B_N;Z)_k + C$, то существуют константы a_1, …, a_m, b_1, …, b_n и z, такие, что $f(k)$ кратна (5.115).

32 Найдите величину $\sum k^2\,\delta k$ методом Госпера.

33 Воспользуйтесь методом Госпера для нахождения величины $\sum \delta k/(k^2-1)$.

34 Покажите, что гипергеометрическая частичная сумма всегда может быть представлена в виде предела обычных гипергеометрических функций:

$$\sum_{k\leqslant c} F\left(\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_m\\ b_1,\ \ldots,\ b_n\end{matrix}\middle| z\right)_k = \lim_{\epsilon\to 0} F\left(\begin{matrix}-c,\ a_1,\ \ldots,\ a_m\\ \epsilon-c,\ b_1,\ \ldots,\ b_n\end{matrix}\middle| z\right),$$

если c — неотрицательное целое (см. (5.115)). Используйте эту идею для вычисления суммы $\sum_{k\leqslant m}\binom{n}{k}(-1)^k$.

Домашние задания

35 Запись $\sum_{k\leqslant n}\binom{n}{k}2^{k-n}$ двусмысленна в отсутствие пояснений. Вычислите это

a как сумму по k,
b как сумму по n.

36 Пусть p^k — наибольшая степень простого числа p, которая делит $\binom{m+n}{m}$, если m и n — целые неотрицательные числа. Докажите, что k является числом переносов, которые происходят, когда m складывается с n в системе счисления с основанием p. *Указание:* здесь помогает упр. 4.24.

37 Покажите, что для факториальных степеней справедлив аналог биномиальной теоремы; т. е. докажите справедливость соотношений

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}}\,y^{\underline{n-k}},$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}}\,y^{\overline{n-k}}$$

при любом целом неотрицательном n.

38 Покажите, что любое целое неотрицательное число n может быть представлено единственным образом в виде $n=\binom{a}{1}+\binom{b}{2}+\binom{c}{3}$, где a, b и c — целые числа, такие, что $0\leqslant a<b<c$. (Это называется *биномиальной системой счисления.*)

39 Покажите, что если $xy = ax + by$, то

$$x^n y^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1-k}{n-1} (a^n b^{n-k} x^k + a^{n-k} b^n y^k)$$

при любом $n > 0$. Установите аналогичную формулу для произведения более общего вида $x^m y^n$. (Эти формулы полезны при нахождении представления в простых дробях, например при $x = 1/(z-c)$ и $y = 1/(z-d)$.

40 Выразите сумму

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \binom{r}{j} \sum_{k=1}^{n} \binom{-j+rk+s}{m-j}, \qquad \text{целые } m, n \geqslant 0,$$

в замкнутой форме.

41 Вычислите $\sum_k \binom{n}{k} k!/(n+1+k)!$ при целом неотрицательном n.

42 Найдите выражение для $\sum \left((-1)^x / \binom{n}{x}\right) \delta x$ и воспользуйтесь им для вычисления суммы $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k / \binom{n}{k}$ в замкнутой форме.

43 Докажите трехчленное биномиальное тождество (5.28). *Указание:* вначале замените $\binom{r+k}{m+n}$ на $\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$.

44 Воспользуйтесь тождеством (5.32) для того, чтобы выразить двойные суммы

$$\sum_{j,k} (-1)^{j+k} \binom{j+k}{j} \binom{a}{j} \binom{b}{k} \binom{m+n-j-k}{m-j} \quad \text{и}$$

$$\sum_{j,k \geqslant 0} (-1)^{j+k} \binom{a}{j} \binom{m}{j} \binom{b}{k} \binom{n}{k} \bigg/ \binom{m+n}{j+k}$$

в замкнутой форме при заданных целых $m \geqslant a \geqslant 0$ и $n \geqslant b \geqslant 0$.

45 Найдите выражение для суммы $\sum_{k \leqslant n} \binom{2k}{k} 4^{-k}$ в замкнутой форме.

46 Вычислите следующую сумму в замкнутой форме, когда n — целое положительное число:

$$\sum_k \binom{2k-1}{k} \binom{4n-2k-1}{2n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(4n-2k-1)}.$$

Указание: снова прибегните к производящим функциям.

47 Сумма

$$\sum_k \binom{rk+s}{k} \binom{rn-rk-s}{n-k}$$

является многочленом по r и s. Покажите, что она не зависит от s.

48 Соотношение $\sum_{k\leqslant n}\binom{n+k}{n}2^{-k}=2^n$ может быть объединено с соотношением $\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{n}z^k=1/(1-z)^{n+1}$, что приводит к $\sum_{k>n}\binom{n+k}{n}2^{-k}=2^n$. Что представляет собой последнее соотношение в гипергеометрической форме?

49 Воспользуйтесь методом гипергеометрических функций для вычисления

$$\sum_k(-1)^k\binom{x}{k}\binom{x+n-k}{n-k}\frac{y}{y+n-k}\,.$$

50 Докажите правило симметрии Пфаффа (5.101), сравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях данного равенства.

51 Вывод формулы (5.104) показывает, что

$$\lim_{\epsilon\to 0}F(-m,-2m-1+\epsilon;-2m+\epsilon;2)=1/\binom{-1/2}{m}\,.$$

В этом упражнении мы увидим, что несущественно отличающиеся предельные переходы приводят к существенно отличающимся ответам для вырожденного гипергеометрического ряда $F(-m,-2m-1;-2m;2)$.

a Покажите, что $\lim_{\epsilon\to 0}F(-m+\epsilon,-2m-1;-2m+2\epsilon;2)=0$, используя правило симметрии Пфаффа для доказательства соотношения $F(a,-2m-1;2a;2)=0$ при любом целом $m\geqslant 0$.

b Чему равен $\lim_{\epsilon\to 0}F(-m+\epsilon,-2m-1;-2m+\epsilon;2)$?

52 Докажите, что если N — целое неотрицательное число, то

$$b_1^{\overline{N}}\ldots b_n^{\overline{N}}F\left({a_1,\ldots,a_m,-N \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|\,z\right)=a_1^{\overline{N}}\ldots a_m^{\overline{N}}(-z)^N$$
$$\times F\left({1-b_1-N,\ldots,1-b_n-N,-N \atop 1-a_1-N,\ldots,1-a_m-N}\middle|\,\frac{(-1)^{m+n}}{z}\right).$$

53 Если в тождестве Гаусса (5.110) положить $b=-\frac{1}{2}$ и $z=1$, то левая часть сведется к -1, в то время как правая равна $+1$. Почему это не доказывает, что $-1=+1$?

54 Объясните, как была получена правая часть соотношения (5.112).

55 Покажите, что $z=Z$ и $m-n=M-N$, если гипергеометрические члены $t(k)=F(a_1,\ldots,a_m;\ b_1,\ldots,b_n;\ z)_k$ и $T(k)=F(A_1,\ldots,A_M;B_1,\ldots,B_N;Z)_k$ удовлетворяют соотношению $t(k)=c\big(T(k+1)-T(k)\big)$ при любом $k\geqslant 0$.

56 Используя метод Госпера, найдите общую формулу для $\sum\binom{-3}{k}\,\delta k$. Покажите, что $(-1)^{k-1}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{k+2}{2}\right\rfloor$ также служит решением.

57 Используя метод Госпера, найдите константу θ, такую, что

$$\sum \binom{n}{k} z^k (k+\theta)\,\delta k$$

суммируема в гипергеометрических членах.

58 Если m и n — целые числа, такие, что $0 \leqslant m \leqslant n$, то положим

$$T_{m,n} = \sum_{0 \leqslant k < n} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k}.$$

Выясните зависимость между $T_{m,n}$ и $T_{m-1,n-1}$, а затем решите ваше рекуррентное соотношение, применив суммирующий множитель.

Контрольные работы

59 Выразите в замкнутой форме

$$\sum_{k \geqslant 1} \binom{n}{\lfloor \log_m k \rfloor}$$

при целых положительных m и n.

60 Воспользуйтесь приближением Стирлинга (4.23) для вычисления $\binom{m+n}{n}$ при одновременно больших m и n. К чему сводится ваша формула при $m = n$?

61 Докажите, что если p — простое число, то

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \pmod p$$

при любых целых неотрицательных m и n.

62 Установите величину $\binom{np}{mp} \bmod p^2$ при условии, что p — простое число и что m и n — целые положительные числа. *Указание:* при желании можно воспользоваться следующим обобщением свертки Вандермонда:

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{r_1}{k_1}\binom{r_2}{k_2}\ldots\binom{r_m}{k_m} = \binom{r_1+r_2+\cdots+r_m}{n}.$$

63 Выразите в замкнутой форме

$$\sum_{k=0}^{n} (-4)^k \binom{n+k}{2k}$$

при заданном целом $n \geqslant 0$.

64 Вычислите $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big/ \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$ при заданном целом $n \geqslant 0$.

65 Докажите, что

$$\sum_k \binom{n-1}{k} n^{-k}(k+1)! = n\,.$$

66 Вычислите „двойную сумму Гарри“

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \binom{-1}{j - \lfloor\sqrt{k-j}\rfloor} \binom{j}{m} \frac{1}{2^j}\,, \qquad \text{целое } m \geqslant 0,$$

как функцию от m. (Это сумма как по j, так и по k.)

67 Выразите в замкнутой форме

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2} \binom{2n-k}{n}\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

68 Выразите в замкнутой форме

$$\sum_k \binom{n}{k} \min(k, n-k)\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

69 Выразите в замкнутой форме

$$\min_{\substack{k_1,\ldots,k_m \geqslant 0\\ k_1+\cdots+k_m=n}} \sum_{j=1}^{m} \binom{k_j}{2}$$

как функцию m и n.

70 Выразите в замкнутой форме

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{-1}{2}\right)^k\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

71 Пусть

$$S_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n+k}{m+2k} a_k\,,$$

где m и n — целые неотрицательные числа, и пусть $A(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$ — производящая функция для последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$.

a Выразите производящую функцию $S(z) = \sum_{n \geqslant 0} S_n z^n$ через $A(z)$.

b Воспользуйтесь этим приемом для решения задачи 7 из разд. 5.2.

72 Докажите, что если m, n и k — целые числа и $n > 0$, то

$$\binom{m/n}{k} n^{2k-\nu(k)} \quad \text{— целое,}$$

где $\nu(k)$ — количество единиц в двоичном представлении k.

73 Воспользуйтесь репертуарным методом для решения рекуррентности

$$X_0 = \alpha; \qquad X_1 = \beta;$$
$$X_n = (n-1)(X_{n-1} + X_{n-2}) \qquad \text{при } n > 1.$$

Указание: этой рекуррентности удовлетворяют как $n!$, так и $n¡$.

74 Эта задача связана с „нестандартным вариантом“ треугольника Паскаля, стороны которого составлены из чисел 1, 2, 3, 4, ..., а не из единиц, хотя числа внутри по-прежнему удовлетворяют формуле сложения:

```
        1
      2   2
    3   4   3
  4   7   7   4
5  11  14  11   5
.   .   .   .   .   .
```

Если $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ обозначает k-е число в n-м ряду при $1 \leqslant k \leqslant n$, то $\left(\!\binom{n}{1}\!\right) = \left(\!\binom{n}{n}\!\right) = n$ и $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right)$ при $1 < k < n$. Выразите величину $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ в замкнутой форме.

75 Установите зависимость между функциями

$$S_0(n) = \sum_k \binom{n}{3k},$$

$$S_1(n) = \sum_k \binom{n}{3k+1},$$

$$S_2(n) = \sum_k \binom{n}{3k+2}$$

и величинами $\lfloor 2^n/3 \rfloor$ и $\lceil 2^n/3 \rceil$.

76 Решите следующую рекуррентность для $n, k \geqslant 0$:

$$Q_{n,0} = 1; \qquad Q_{0,k} = [k=0];$$

$$Q_{n,k} = Q_{n-1,k} + Q_{n-1,k-1} + \binom{n}{k} \qquad \text{при } n, k > 0.$$

77 Какова величина

$$\sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_m\leqslant n}\ \prod_{1\leqslant j<m}\binom{k_{j+1}}{k_j}, \qquad \text{если } m>1?$$

78 Выразите в замкнутой форме

$$\sum_{k=0}^{2m^2}\binom{k \bmod m}{(2k+1) \bmod (2m+1)},$$

считая, что m — целое положительно число.

79 **a** Чему равен наибольший общий делитель чисел $\binom{2n}{1}$, $\binom{2n}{3}$, ..., $\binom{2n}{2n-1}$? *Указание:* рассмотрите сумму всех этих n чисел.

b Покажите, что наименьшее общее кратное чисел $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$ равно $L(n+1)/(n+1)$, где $L(n) = \text{нок}(1,2,\ldots,n)$.

Полезно знать.

80 Докажите, что $\binom{n}{k} \leqslant (en/k)^k$ для любых целых $k, n \geqslant 0$.

81 Докажите неравенство

$$(-1)^{n-m-1}\sum_k\binom{l}{k}\binom{m+\theta}{n+k}x^k > 0,$$

если $0<\theta<1$, $0\leqslant x\leqslant 1$ и l, m, n — целые неотрицательные числа, причем $m<n$. *Указание:* попробуйте взять производную по x.

Конкурсные задачи

82 Докажите, что треугольник Паскаля при $0<k<n$ обладает еще более удивительным свойством шестиугольника, чем то, что приводилось в тексте:

$$\text{нод}\left(\binom{n-1}{k-1},\binom{n}{k+1},\binom{n+1}{k}\right) = \text{нод}\left(\binom{n-1}{k},\binom{n+1}{k+1},\binom{n}{k-1}\right).$$

К примеру, $\text{нод}(56,36,210) = \text{нод}(28,120,126) = 2$.

83 Докажите поразительное соотношение с пятипараметрической двойной суммой (5.32).

84 Покажите, что вторая пара правил свертки (5.61) вытекает из первой пары (5.60). *Указание:* продифференцируйте по z.

85 Докажите, что

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n}\binom{k_1^3+k_2^3+\cdots+k_m^3+2^n}{n} = (-1)^n n!^3 - \binom{2^n}{n}.$$

(Левая часть является суммой 2^n-1 членов.) *Указание:* на самом деле справедливо гораздо большее.

86 Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — целые неотрицательные числа, и пусть $C(a_1, \ldots, a_n)$ — коэффициент при постоянном члене $z_1^0 \ldots z_n^0$, если $n(n-1)$ множителей произведения

$$\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)^{a_i}$$

полностью разложены по положительным и отрицательным степеням комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$.

a Докажите, что $C(a_1, \ldots, a_n)$ совпадает с левой частью (5.31).

b Докажите, что если $z_1, \ldots, z_n$ — различные комплексные числа, то многочлен

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{z-z_j}{z_k-z_j}$$

тождественно равен 1.

c Умножьте исходное произведение из $n(n-1)$ сомножителей на $f(0)$ и установите, что $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равно

$$C(a_1-1, a_2, \ldots, a_n) + C(a_1, a_2-1, \ldots, a_n) + \cdots + C(a_1, a_2, \ldots, a_n-1)\,.$$

(Данное рекуррентное соотношение определяет мультиномиальные коэффициенты, так что $C(a_1, \ldots, a_n)$ должно совпадать с правой частью (5.31).)

87 Пусть m — целое положительное число и $\zeta = e^{\pi i/m}$. Покажите, что

$$\sum_{k\leqslant n/m} \binom{n-mk}{k} z^{mk} = \frac{\mathcal{B}_{-m}(z^m)^{n+1}}{(1+m)\mathcal{B}_{-m}(z^m)-m} - \sum_{0\leqslant j<m} \frac{\left(\zeta^{2j+1} z\, \mathcal{B}_{1+1/m}(\zeta^{2j+1}z)^{1/m}\right)^{n+1}}{(m+1)\mathcal{B}_{1+1/m}(\zeta^{2j+1}z)^{-1}-1}\,.$$

(В частном случае при $m = 1$ это сводится к (5.74).)

88 Докажите, что коэффициенты s_k в (5.47) равны

$$(-1)^k \int_0^\infty e^{-t}(1-e^{-t})^{k-1}\,\frac{dt}{t}\,,$$

при любом $k > 1$; следовательно, $|s_k| < 1/(k-1)$.

89 Докажите, что соотношение (5.19) обладает бесконечным аналогом

$$\sum_{k>m}\binom{m+r}{k}x^k y^{m-k} = \sum_{k>m}\binom{-r}{k}(-x)^k(x+y)^{m-k}, \quad \text{целое } m,$$

если $|x| < |y|$ и $|x| < |x+y|$. Продифференцируйте это соотношение n раз по y и выразите в гипергеометрической форме; какое соотношение вы получите?

90 В задаче 1 из разд. 5.2 рассматривается сумма $\sum_{k\geqslant 0}\binom{r}{k}/\binom{s}{k}$ при целых r и s, таких, что $s \geqslant r \geqslant 0$. А какова величина этой суммы, если r и s не являются целыми числами?

91 Докажите *тождество Уиппла*

$$F\left({\tfrac12 a,\ \tfrac12 a+\tfrac12,\ 1-a-b-c \atop 1+a-b,\ 1+a-c}\middle|\,\frac{-4z}{(1-z)^2}\right) = (1-z)^a\, F\left({a,\ b,\ c \atop 1+a-b,\ 1+a-c}\middle|\, z\right),$$

показав, что обе его части удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению.

92 Докажите *правила произведений Клаузена*

$$F\left({a,\ b \atop a+b+\tfrac12}\middle|\, z\right)^2 = F\left({2a,\ a+b,\ 2b \atop 2a+2b,\ a+b+\tfrac12}\middle|\, z\right);$$

$$F\left({\tfrac14+a,\ \tfrac14+b \atop 1+a+b}\middle|\, z\right) F\left({\tfrac14-a,\ \tfrac14-b \atop 1-a-b}\middle|\, z\right) = F\left({\tfrac12,\ \tfrac12+a-b,\ \tfrac12-a+b \atop 1+a+b,\ 1-a-b}\middle|\, z\right).$$

Какие тождества получаются, если приравнять коэффициенты при z^n в обеих частях этих формул?

93 Покажите, что при произвольной заданной функции f и константе α неопределенная сумма

$$\sum\left(\prod_{j=1}^{k-1}(f(j)+\alpha)\Big/\prod_{j=1}^{k} f(j)\right)\delta k$$

имеет (довольно) простой вид.

94 Найдите $\sum\binom{a}{k}\binom{-a}{n-k}\,\delta k$ при положительном целом n.

95 Какие условия следует наложить в дополнение к (5.118), чтобы многочлены p, q, r из (5.117) стали однозначно определены?

96 Докажите, что если алгоритм Госпера не находит решения (5.120) при данном гипергеометрическом члене $t(k)$, то и более общее уравнение

$$t(k) = \bigl(T_1(k+1) + \cdots + T_m(k+1)\bigr) - \bigl(T_1(k) + \cdots + T_m(k)\bigr)\,,$$

где $T_1(k), \ldots, T_m(k)$ — гипергеометрические члены, также не имеет решения.

97 Найдите все комплексные числа z, для которых выражение $k!^2 / \prod_{j=1}^{k}(j^2 + jz + 1)$ суммируемо в гипергеометрических членах.

98 Какое рекуррентное соотношение дает метод Госпера—Зильбергера для суммы $S_n = \sum_k \binom{n}{2k}$?

99 Используйте метод Госпера—Зильбергера, чтобы найти выражение в замкнутом виде для $\sum_k t(n,k)$, где $t(n,k) = (n+a+b+c+k)!/(n+k)!\,(c+k)!\,(b-k)!\,(a-k)!\,k!$, в предположении, что a — неотрицательное целое.

100 Найдите рекуррентное соотношение для суммы

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}\,;$$

найдите другую формулу для S_n, воспользовавшись этим рекуррентным соотношением.

101 Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют суммы

Для этого и нескольких следующих упражнений имеет смысл использовать компьютерную алгебру.

a $$S_{m,n}(z) = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k} z^k\,;$$

b $$S_n(z) = S_{n,n}(z) = \sum_k \binom{n}{k}^2 z^k\,.$$

102 Воспользовавшись процедурой Госпера—Зильбергера, обобщите „бесполезное“ тождество (5.113): найдите еще какие-нибудь значения a, b и z, для которых

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{\frac{1}{3}n - a}{k} z^k \Big/ \binom{\frac{4}{3}n - b}{k}$$

имеет простое выражение в замкнутом виде.

103 Пусть $t(n,k)$ — подходящий член (5.143). Какие степени будут иметь многочлены $\hat{p}(n,k)$, $q(n,k)$ и $r(n,k)$ относительно переменной k, когда процедура Госпера—Зильбергера применяется к $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \cdots + \beta_l(n)t(n+l,k)$? (Редкими, исключительными случаями можно пренебречь.)

104 Используйте процедуру Госпера—Зильбергера для проверки замечательного тождества

$$\sum_k (-1)^k \binom{r-s-k}{k}\binom{r-2k}{n-k}\frac{1}{r-n-k+1} = \binom{s}{n}\frac{1}{r-2n+1}.$$

Объясните, почему не найдена простейшая рекуррентность для этой суммы.

105 Покажите, что если $\omega = e^{2\pi i/3}$, то

$$\sum_{k+l+m=3n} \binom{3n}{k,l,m}^2 \omega^{l-m} = \binom{4n}{n,n,2n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

106 Докажите удивительное тождество (5.32), положив $t(r,j,k)$ равным результату деления слагаемого на правую часть и показав затем, что найдутся функции $T(r,j,k)$ и $U(r,j,k)$, для которых

$$\begin{aligned} t(r+1,j,k) - t(r,j,k) &= T(r,j+1,k) - T(r,j,k) \\ &\quad + U(r,j,k+1) - U(r,j,k). \end{aligned}$$

107 Докажите, что $1/(nk+1)$ не является подходящим членом.

108 Покажите, что числа Апери A_n из (5.141) — это диагональные элементы $A_{n,n}$ числовой матрицы, определяемой как

$$A_{m,n} = \sum_{j,k} \binom{m}{j}^2 \binom{m}{k}^2 \binom{2m+n-j-k}{2m}.$$

Докажите, что эта матрица симметрична и

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \sum_k \binom{m+n-k}{k}^2 \binom{m+n-2k}{m-k}^2 \\ &= \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{k}\binom{n+k}{k}. \end{aligned}$$

109 Докажите, что числа Апери (5.141) удовлетворяют сравнению

$$A_n \equiv A_{\lfloor n/p \rfloor} A_{n \bmod p} \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

для всех простых p и всех целых $n \geqslant 0$.

Исследовательские проблемы

110 При каких n справедливо $\binom{2n}{n} \equiv (-1)^n \pmod{2n+1}$?

111 Пусть $q(n)$ — наименьший нечетный простой множитель среднего биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$. Согласно упр. 36 нечетными простыми числами, которые *не* делят $\binom{2n}{n}$, являются те, для которых все цифры в представлении n по основанию p равны $(p-1)/2$ или меньше. Машинные эксперименты показали, что $q(n) \leqslant 11$ при любом $1 < n < 10^{10000}$, за исключением $q(3160) = 13$.

a Верно ли, что $q(n) \leqslant 11$ при любом $n > 3160$?

b Достигается ли $q(n) = 11$ для бесконечно многих n?

За решение любой из двух частей (a), (b) предлагается вознаграждение $7 \cdot 11 \cdot 13$ долларов.

112 Верно ли, что $\binom{2n}{n}$ делится на 4 или 9 при каждом $n > 4$, за исключением $n = 64$ и $n = 256$?

113 Если $t(n+1,k)/t(n,k)$ и $t(n,k+1)/t(n,k)$ — рациональные функции n и k и если существует линейный разностный оператор $H(N,K,n)$, такой, что $H(N,K,n)t(n,k) = 0$, то следует ли отсюда, что $t(n,k)$ — подходящий член?

114 Пусть m — положительное целое; определим последовательность $c_n^{(m)}$ рекуррентным соотношением

$$\sum_k \binom{n}{k}^m \binom{n+k}{k}^m = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} c_k^{(m)} .$$

Являются ли числа $c_n^{(m)}$ целыми?

6

Специальные числа

НЕКОТОРЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ чисел возникают в математике столь часто, что их узнают с первого взгляда и наделяют собственными названиями. Так, каждому изучающему арифметику известна последовательность квадратных чисел $\langle 1,4,9,16,\ldots\rangle$. В гл. 1 мы сталкивались с треугольными числами $\langle 1,3,6,10,\ldots\rangle$, в гл. 4 занимались простыми числами $\langle 2,3,5,7,\ldots\rangle$, а в гл. 5 промелькнули числа Каталана $\langle 1,2,5,14,\ldots\rangle$.

В настоящей главе мы получим представление о некоторых других важных последовательностях. Первым пунктом нашей повестки дня будут числа Стирлинга ${n \brace k}$ и ${n \brack k}$ и числа Эйлера $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ — эти числа образуют треугольники коэффициентов, которые подобны биномиальным коэффициентам $\binom{n}{k}$ из треугольника Паскаля. Потом мы обстоятельно ознакомимся с гармоническими числами H_n и числами Бернулли B_n — эти числа отличаются от других ранее рассматривавшихся числовых последовательностей тем, что они являются дробными, а не целыми числами. И в заключение мы повосторгаемся очаровательными числами Фибоначчи F_n и некоторыми их важными обобщениями.

6.1 ЧИСЛА СТИРЛИНГА

Начнем с довольно близких родственников биномиальных коэффициентов — чисел Стирлинга, названных так по имени Джеймса Стирлинга (1692–1770). Эти числа выступают в двух разновидностях, традиционно носящих незатейливые названия „чисел Стирлинга первого и второго рода". Несмотря на свою почтенную историю и многочисленные применения, для них до сих пор отсутствует общепринятое обозначение. Следуя Йовану Карамата, мы будем обозначать через ${n \brace k}$ числа Стирлинга второго рода, а через ${n \brack k}$ — числа Стирлинга первого рода, ибо эти обозначения представляются более удобными в обращении по сравнению со многими другими предлагавшимися обозначениями.

„... par cette notation, les formules deviennent plus symétriques."
— Й. Карамата [124]

В табл. 288 и 289 показано, как выглядят числа ${n \brace k}$ и ${n \brack k}$ при малых n и k. Задача, которая включает в себя числа „1, 7, 6, 1", скорее всего должна быть связана с ${n \brace k}$, а задача, которая вклю-

Таблица 288 Треугольник Стирлинга для числа подмножеств.

n	${n \brace 0}$	${n \brace 1}$	${n \brace 2}$	${n \brace 3}$	${n \brace 4}$	${n \brace 5}$	${n \brace 6}$	${n \brace 7}$	${n \brace 8}$	${n \brace 9}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

чает в себя числа „6, 11, 6, 1“, скорее всего с ${n \brack k}$ — точно так же, как мы предполагаем, что задача, которая включает в себя числа „1, 4, 6, 4, 1“, скорее всего должна быть связана с $\binom{n}{k}$: это „фирменные знаки“ последовательностей, которые получаются при $n = 4$.

Числа Стирлинга второго рода возникают значительно чаще, чем числа первого рода, так что вторые рассмотрим первыми. Символом ${n \brace k}$ обозначается число способов разбиения множества из n элементов на k непустых подмножеств. Так, существует семь способов разбиения четырехэлементного множества на две части:

(И сам Стирлинг в своей книге [286] в первую очередь рассмотрел этот род чисел.)

$$\{1,2,3\} \cup \{4\}, \quad \{1,2,4\} \cup \{3\}, \quad \{1,3,4\} \cup \{2\}, \quad \{2,3,4\} \cup \{1\},$$
$$\{1,2\} \cup \{3,4\}, \quad \{1,3\} \cup \{2,4\}, \quad \{1,4\} \cup \{2,3\}, \qquad (6.1)$$

следовательно, ${4 \brace 2} = 7$. Обратите внимание, что фигурные скобки используются для обозначения как множеств, так и чисел ${n \brace k}$. Подобное сходство помогает запомнить смысл обозначения ${n \brace k}$, которое может быть прочитано как „k подмножеств из n“.

Давайте взглянем на малые значения k. Существует только один способ помещения n элементов в одно-единственное непустое множество — следовательно, ${n \brace 1} = 1$ при любом $n > 0$. С другой стороны, ${0 \brace 1} = 0$, ибо 0-элементное множество пусто.

Случай $k = 0$ несколько запутан. Все разрешается как нельзя лучше, если согласиться, что существует только один способ разбиения пустого множества на нулевое число непустых частей; следовательно, ${0 \brace 0} = 1$. Но для непустого множества нужна по крайней мере одна часть, так что ${n \brace 0} = 0$ при $n > 0$.

А что происходит при $k = 2$? Конечно же, ${0 \brace 2} = 0$. Если же множество из $n > 0$ объектов разделено на две непустые части, то одна из этих частей содержит последний объект и некоторое подмножество из первых $n - 1$ объектов. Имеется 2^{n-1} способов выбора последнего подмножества, ибо каждый из первых $n - 1$ объектов либо входит, либо не входит в него. Но нам вовсе не нужно помещать в него все эти объекты, поскольку у нас должны

Таблица 289 Треугольник Стирлинга для числа циклов.

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$	$\left[{n \atop 7}\right]$	$\left[{n \atop 8}\right]$	$\left[{n \atop 9}\right]$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

остаться две непустые части. Поэтому вычтем 1:

$$\left\{{n \atop 2}\right\} = 2^{n-1} - 1\,, \qquad \text{целое } n > 0. \tag{6.2}$$

(Это согласуется с приведенным выше перечислением способов разбиения: $\left\{{4 \atop 2}\right\} = 7 = 2^3 - 1$.)

Видоизменение подобного рассуждения приводит к рекуррентному соотношению, с помощью которого можно вычислить $\left\{{n \atop k}\right\}$ при любом k. Если задано множество из $n > 0$ объектов, которое должно быть разбито на k непустых частей, то мы либо помещаем последний объект в отдельный класс ($\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$ способами), либо помещаем его в некоторое непустое множество из первых $n-1$ объектов. В последнем случае имеется $k\left\{{n-1 \atop k}\right\}$ возможных вариантов, поскольку каждый из $\left\{{n-1 \atop k}\right\}$ способов распределения первых $n-1$ объектов по k непустым частям дает k подмножеств, с которыми можно объединить n-й объект. Следовательно,

$$\left\{{n \atop k}\right\} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}, \qquad \text{целое } n > 0. \tag{6.3}$$

Это именно то правило, в соответствии с которым образуется табл. 288; без множителя k оно свелось бы к формуле сложения (5.8), в соответствии с которой образуется треугольник Паскаля.

А теперь — числа Стирлинга первого рода. Эти числа отчасти похожи на числа второго рода с тем отличием, что $\left[{n \atop k}\right]$ подсчитывает число способов представления n объектов в виде k *циклов* вместо представления в виде подмножеств. Вслух обозначение '$\left[{n \atop k}\right]$' произносится как „k циклов из n".

Циклы — это циклические представления, аналогичные ожерельям, которые мы рассматривали в гл. 4. Цикл

A
D B
C

можно записать более компактно как '[A, B, C, D]', понимая при этом, что

$$[A,B,C,D] = [B,C,D,A] = [C,D,A,B] = [D,A,B,C];$$

цикл „прокручивается", поскольку его конец соединен с началом. С другой стороны, цикл [A, B, C, D] — это не то же самое, что цикл [A, B, D, C] или цикл [D, C, B, A].

Существует одиннадцать различных способов составить два цикла из четырех элементов:

$$\begin{array}{llll} [1,2,3]\,[4], & [1,2,4]\,[3], & [1,3,4]\,[2], & [2,3,4]\,[1], \\ [1,3,2]\,[4], & [1,4,2]\,[3], & [1,4,3]\,[2], & [2,4,3]\,[1], \\ [1,2]\,[3,4], & [1,3]\,[2,4], & [1,4]\,[2,3]; & \end{array} \qquad (6.4)$$

„Существует девять и еще шестьдесят способов сложить песню племени, и-каждый-из-них-по-своему-хорош!"
— Р. Киплинг

следовательно, $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$.

Единичный цикл (т. е. цикл, состоящий только из одного элемента) — это по существу то же самое, что и единичное множество (множество, состоящее только из одного элемента). Аналогично, 2-цикл подобен 2-множеству, поскольку $[A,B] = [B,A]$, точно так же, как $\{A,B\} = \{B,A\}$. Однако существуют два *различных* 3-цикла: $[A,B,C]$ и $[A,C,B]$. Отметим, например, что одиннадцать пар циклов в (6.4) можно получить из семи пар множеств в (6.1), составив из каждого 3-элементного множества по два цикла.

И вообще, из любого n-элементного множества могут быть составлены $n!/n = (n-1)!$ циклов, если только $n > 0$. (Всего имеется $n!$ перестановок, а каждый цикл соответствует сразу n из них, поскольку отсчет цикла может быть начат с любого из его элементов.) Поэтому

$$\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!\,, \qquad \text{целое } n > 0. \qquad (6.5)$$

Это значительно больше величины $\left\{{n \atop 1}\right\} = 1$, которая была получена для числа подмножеств Стирлинга. И в самом деле, легко убедиться в том, что число циклов должно быть по меньшей мере таким же, как и число подмножеств:

$$\left[{n \atop k}\right] \geqslant \left\{{n \atop k}\right\}, \qquad \text{целые } n, k \geqslant 0, \qquad (6.6)$$

так как каждое разбиение на непустые подмножества приводит, по меньшей мере, к одному представлению в виде циклов.

Равенство же в (6.6) имеет место тогда, когда все циклы с необходимостью являются либо единичными, либо двойными — в силу того, что в таких случаях циклы эквивалентны подмножествам. А это случается при $k = n$ и при $k = n - 1$; следовательно,

$$\left[{n \atop n}\right] = \left\{{n \atop n}\right\}, \qquad \left[{n \atop n-1}\right] = \left\{{n \atop n-1}\right\}.$$

В самом деле, легко убедиться в том, что

$$\left[{n \atop n}\right] = \left\{{n \atop n}\right\} = 1\,, \qquad \left[{n \atop n-1}\right] = \left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}. \qquad (6.7)$$

(Число способов представления n объектов в виде $n-1$ циклов или подмножеств равно числу способов выбора двух объектов, которые окажутся в одном и том же цикле или подмножестве.) Треугольные числа $\binom{n}{2} = 1, 3, 6, 10, \ldots$ обращают на себя внимание как в табл. 288, так и в табл. 289.

Рекуррентность для $\left[{n \atop k}\right]$ можно вывести, видоизменив рассуждение, которым мы пользовались при выводе рекуррентности для $\left\{{n \atop k}\right\}$. Каждое представление n объектов в виде k циклов либо помещает последний объект в отдельный цикл ($\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ способами), либо вставляет этот объект в одно из $\left[{n-1 \atop k}\right]$ циклических представлений первых $n-1$ объектов. В последнем случае существует $n-1$ различных способов подобной вставки. (Это требует некоторой сообразительности, но нетрудно проверить, что всего существует j способов поместить новый элемент в j-цикл, чтобы получить $(j+1)$-цикл. Так, если $j=3$, то цикл $[A, B, C]$ приводит к циклам

$$[A, B, C, D]\,, \qquad [A, B, D, C] \qquad \text{или} \qquad [A, D, B, C]\,,$$

если вставляется новый элемент D, и других возможностей не существует. Суммирование по всем j дает в итоге $n-1$ способов вставки n-го объекта в циклическое разбиение $n-1$ объектов.) Таким образом, требуемая рекуррентность имеет вид

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \qquad \text{целое } n > 0. \qquad (6.8)$$

Это аналог формулы сложения, с помощью которой образуется табл. 289.

Сравнение рекуррентностей (6.8) и (6.3) показывает, что первый член в их правых частях умножен на его верхний индекс $(n-1)$ в случае числа циклов Стирлинга, а в случае числа подмножеств Стирлинга — на его нижний индекс k. Поэтому, когда доказательство проводится с помощью математической индукции, можно осуществлять „внесение“ в членах типа $n\left[{n \atop k}\right]$ и $k\left\{{n \atop k}\right\}$.

Каждая перестановка эквивалентна некоторому множеству циклов. Рассмотрим, например, перестановку, которая переводит 123456789 в 384729156. Для наглядности ее можно представить в двух строках,

$$\begin{matrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 3\,8\,4\,7\,2\,9\,1\,5\,6\,, \end{matrix}$$

откуда видно, что 1 переходит в 3, 2 переходит в 8 и т. д. Возникает циклическая структура, ибо число 1 переходит в 3, которое переходит в 4, которое переходит в 7, которое переходит обратно в 1, т. е. это цикл $[1, 3, 4, 7]$. Другим циклом в этой перестановке является $[2, 8, 5]$, еще одним — $[6, 9]$. Таким образом, перестановка 384729156 эквивалентна циклическому представлению

$$[1, 3, 4, 7]\,[2, 8, 5]\,[6, 9]\,.$$

Если имеется некоторая перестановка $\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$, то каждый элемент входит только в один цикл. Действительно, если начать с $m_0 = m$ и рассматривать $m_1 = \pi_{m_0}$, $m_2 = \pi_{m_1}$ и т. д., то в конце концов мы должны будем вернуться к $m_k = m_0$. (Рано или поздно числа должны повториться, и первым числом, которое появится вновь, будет m_0, поскольку известно, что у других чисел m_1, m_2, …, m_{k-1} имеются свои собственные предшественники.) Таким образом, каждая перестановка определяет некоторое циклическое представление. Обратно, если перевернуть данное построение, то каждое циклическое представление, очевидно, определяет некоторую перестановку, и подобное взаимно однозначное соответствие показывает, что перестановки и циклические представления — это, в сущности, одно и то же.

Следовательно, $\left[{n \atop k}\right]$ — это число перестановок n объектов, которое содержит ровно k циклов. Если просуммировать $\left[{n \atop k}\right]$ по всем k, то мы должны получить общее число перестановок:

$$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Так, $6+11+6+1 = 24 = 4!$.

Числа Стирлинга полезны потому, что рекуррентные соотношения (6.3) и (6.8) возникают в целом ряде задач. Так, если мы захотим выразить обычные степени x^n через убывающие степени $x^{\underline{n}}$, то обнаружим, что несколько первых случаев дают

$$\begin{aligned} x^0 &= x^{\underline{0}}, \\ x^1 &= x^{\underline{1}}, \\ x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\ x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\ x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}. \end{aligned}$$

Эти коэффициенты подозрительно напоминают числа из табл. 288, прочитанные не слева направо, а справа налево — поэтому можно быть почти уверенными, что общая формула такова:

$$x^n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \tag{6.10}$$

Лучше было бы определить $\left\{{n \atop k}\right\} = \left[{n \atop k}\right] = 0$ при $k < 0$ и $n \geqslant 0$.

И действительно, простое доказательство по индукции разрешает все сомнения: $x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$, так как $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$; следовательно $x \cdot x^{n-1}$ есть

$$\begin{aligned} x\sum_k \left\{{n-1 \atop k}\right\} x^{\underline{k}} &= \sum_k \left\{{n-1 \atop k}\right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_k \left\{{n-1 \atop k}\right\} kx^{\underline{k}} \\ &= \sum_k \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} x^{\underline{k}} + \sum_k \left\{{n-1 \atop k}\right\} kx^{\underline{k}} \\ &= \sum_k \left(k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}\right) x^{\underline{k}} = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}. \end{aligned}$$

Другими словами, число подмножеств Стирлинга — это коэффициенты при факториальных степенях, которые дают обычные степени.

Можно двигаться и в другом направлении, поскольку число циклов Стирлинга — это коэффициенты при обычных степенях, которые дают факториальные степени:

$$\begin{aligned}
x^{\overline{0}} &= x^0\,,\\
x^{\overline{1}} &= x^1\,,\\
x^{\overline{2}} &= x^2+x^1\,,\\
x^{\overline{3}} &= x^3+3x^2+2x^1\,,\\
x^{\overline{4}} &= x^4+6x^3+11x^2+6x^1\,.
\end{aligned}$$

Действительно, $(x+n-1)\cdot x^k = x^{k+1}+(n-1)x^k$, так что доказательство, подобное только что проведенному, показывает, что

$$(x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_k \left[{n-1 \atop k}\right]x^k = \sum_k \left[{n \atop k}\right]x^k\,.$$

А это приводит к доказательству по индукции общей формулы:

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k}\right]x^k\,,\qquad \text{целое } n\geqslant 0. \tag{6.11}$$

(Подстановка $x=1$ вновь дает (6.9).)

Но постойте,— скажете вы,— это равенство содержит возрастающие факториальные степени $x^{\overline{n}}$, в то время как формула (6.10) содержит убывающие факториальные степени $x^{\underline{n}}$. А что, если требуется выразить $x^{\underline{n}}$ через обычные степени или если требуется выразить x^n через возрастающие степени? Ну, это просто: достаточно добавить всего лишь несколько знаков минус и получить

$$x^n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\}(-1)^{n-k}x^{\overline{k}}\,,\qquad \text{целое } n\geqslant 0, \tag{6.12}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k}x^k\,,\qquad \text{целое } n\geqslant 0. \tag{6.13}$$

Это оправданно, например, потому, что формула

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4-6x^3+11x^2-6x$$

почти такая же, что и формула

$$x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4+6x^3+11x^2+6x\,,$$

за исключением перемены знаков. Общее тождество

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}} \tag{6.14}$$

из упр. 2.17 превращает (6.10) в (6.12), а (6.11) в (6.13), если изменить знак x.

Таблица 294 Основные тождества для чисел Стирлинга при целом $n \geqslant 0$.

Рекуррентные соотношения:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right].$$

Частные случаи:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left[{n \atop 0} \right] = [n=0].$$

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = [n>0], \qquad \left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!\,[n>0].$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = (2^{n-1}-1)[n>0], \qquad \left[{n \atop 2} \right] = (n-1)!\,H_{n-1}\,[n>0].$$

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}.$$

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = \left[{n \atop n} \right] = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left[{n \atop k} \right] = \binom{n}{k} = 0, \qquad \text{если } k > n.$$

Преобразования степеней:

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^k,$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] x^k.$$

Формулы обращения:

$$\sum_k \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-k} = [m=n],$$

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = [m=n].$$

Таблица 295 Дополнительные тождества для чисел Стирлинга при целых $l, m, n \geqslant 0$.

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}. \quad (6.15)$$

$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}. \quad (6.16)$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}. \quad (6.17)$$

$$\left[{n \atop m} \right] = \sum_k \left[{n+1 \atop k+1} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}. \quad (6.18)$$

$n^m (-1)^{n-m} \left[{n \atop m} \right] = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \binom{-m}{k-m} n^k$.

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}. \quad (6.19)$$

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k}. \quad (6.20)$$

$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[{k \atop m} \right] n^{\underline{n-k}} = n! \sum_{k=0}^{n} \left[{k \atop m} \right] / k!. \quad (6.21)$$

$$\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}. \quad (6.22)$$

$$\left[{m+n+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right]. \quad (6.23)$$

$$\binom{n}{m} = \sum_k \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{m-k}. \quad (6.24)$$

$$n^{\underline{n-m}} [n \geqslant m] = \sum_k \left[{n+1 \atop k+1} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{m-k}. \quad (6.25)$$

Также, $\binom{n}{m} (n-1)^{\underline{n-m}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\}$, *обобщение (6.9).*

$$\left\{ {n \atop n-m} \right\} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left[{m+k \atop k} \right]. \quad (6.26)$$

$$\left[{n \atop n-m} \right] = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left\{ {m+k \atop k} \right\}. \quad (6.27)$$

$$\left\{ {n \atop l+m} \right\} \binom{l+m}{l} = \sum_k \left\{ {k \atop l} \right\} \left\{ {n-k \atop m} \right\} \binom{n}{k}. \quad (6.28)$$

$$\left[{n \atop l+m} \right] \binom{l+m}{l} = \sum_k \left[{k \atop l} \right] \left[{n-k \atop m} \right] \binom{n}{k}. \quad (6.29)$$

Нетрудно запомнить, когда надо вставлять множитель $(-1)^{n-k}$ в формулу типа (6.12), поскольку при большом x имеет место естественное упорядочение степеней:

$$x^{\overline{n}} > x^n > x^{\underline{n}} \qquad \text{при любом } x > n > 1. \tag{6.30}$$

А поскольку числа Стирлинга $\left[n \atop k \right]$ и $\left\{ n \atop k \right\}$ неотрицательны, знаки минус нужно использовать при выражении „малых“ степеней через „большие“.

Формулу (6.11) можно подставить в (6.12) и получить двойную сумму:

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} = \sum_{k,m} \left\{ n \atop k \right\} \left[k \atop m \right] (-1)^{n-k} x^m .$$

Так как это справедливо при любом x, то все коэффициенты при x^0, x^1, ..., x^{n-1}, x^{n+1}, x^{n+2}, ... в правой части должны быть равны нулю, и мы получаем тождество

$$\sum_k \left\{ n \atop k \right\} \left[k \atop m \right] (-1)^{n-k} = [m=n] , \qquad \text{целые } m, n \geqslant 0. \tag{6.31}$$

Подобно биномиальным коэффициентам, числа Стирлинга удовлетворяют многим удивительным тождествам. Однако эти тождества не столь гибки, как тождества из гл. 5, так что они используются далеко не столь часто. Поэтому лучше всего просто перечислить простейшие из них — для будущих справок в тех случаях, когда потребуется раскусить какой-нибудь крепкий стирлингов орешек. В табл. 294 и 295 содержатся наиболее употребительные формулы с повторением уже выведенных главных тождеств.

Когда в гл. 5 мы изучали биномиальные коэффициенты, то установили, что выгодно определить $\binom{n}{k}$ и для отрицательного n с тем, чтобы тождество $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ выполнялось без каких-либо ограничений. Используя это тождество для распространения биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ за комбинаторные рамки, мы обнаружили (в табл. 189), что треугольник Паскаля, в сущности, воспроизводит себя в перевернутом виде при его продолжении вверх. Попробуем проделать то же самое с треугольниками Стирлинга. Что случится, если предположить, что основные рекуррентности

$$\left\{ n \atop k \right\} = k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\},$$

$$\left[n \atop k \right] = (n-1) \left[n-1 \atop k \right] + \left[n-1 \atop k-1 \right]$$

Таблица 297 Треугольники Стирлинга в тандеме.

n	$\left\{{n \atop -5}\right\}$	$\left\{{n \atop -4}\right\}$	$\left\{{n \atop -3}\right\}$	$\left\{{n \atop -2}\right\}$	$\left\{{n \atop -1}\right\}$	$\left\{{n \atop 0}\right\}$	$\left\{{n \atop 1}\right\}$	$\left\{{n \atop 2}\right\}$	$\left\{{n \atop 3}\right\}$	$\left\{{n \atop 4}\right\}$	$\left\{{n \atop 5}\right\}$
−5	1										
−4	10	1									
−3	35	6	1								
−2	50	11	3	1							
−1	24	6	2	1	1						
0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	1				
2	0	0	0	0	0	0	1	1			
3	0	0	0	0	0	0	1	3	1		
4	0	0	0	0	0	0	1	7	6	1	
5	0	0	0	0	0	0	1	15	25	10	1

справедливы при любых целых n и k? Их решения определяются однозначно, если ввести дополнительно разумные соглашения, что

$$\left\{{0 \atop k}\right\} = \left[{0 \atop k}\right] = [k=0] \quad \text{и} \quad \left\{{n \atop 0}\right\} = \left[{n \atop 0}\right] = [n=0]\,. \tag{6.32}$$

В самом деле, вырисовывается удивительно приятная картина: треугольник Стирлинга для циклов появляется над треугольниками Стирлинга для подмножеств, и наоборот! Оба рода чисел Стирлинга связаны исключительно простым правилом [152, 153]:

$$\left[{n \atop k}\right] = \left\{{-k \atop -n}\right\}, \qquad \text{целые } k, n. \tag{6.33}$$

Имеет место соотношение „двойственности“, отчасти аналогичное соотношениям между min и max, между $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$, между $x^{\underline{n}}$ и $x^{\overline{n}}$, между НОД и НОК. Легко проверить, что при таком соответствии оба рекуррентных соотношения $\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$ и $\left\{{n \atop k}\right\} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$ сводятся к одному и тому же.

6.2 ЧИСЛА ЭЙЛЕРА

Время от времени возникает еще один треугольник чисел, которым мы обязаны Эйлеру [368, §13; 374, с. 485] и элементы которого мы обозначаем через $\left\langle{n \atop k}\right\rangle$. В данном случае угловые скобки напоминают знаки „меньше“ и „больше“: $\left\langle{n \atop k}\right\rangle$ — это число перестановок $\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, имеющих k *участков подъема*, а именно, k мест, где $\pi_j < \pi_{j+1}$. (Предупреждаем: это обозначение еще менее употребительно, чем наши обозначения $\left[{n \atop k}\right]$, $\left\{{n \atop k}\right\}$ для чисел Стирлинга. Однако мы увидим, что в этом обозначении есть свой резон.)

(Кнут [141, первое издание] вместо $\left\langle{n \atop k}\right\rangle$ использовал $\left\langle{n \atop k+1}\right\rangle$.)

Таблица 298 Треугольник Эйлера.

n	$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 5} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 6} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 7} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 8} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 9} \right\rangle$
0	1									
1	1	0								
2	1	1	0							
3	1	4	1	0						
4	1	11	11	1	0					
5	1	26	66	26	1	0				
6	1	57	302	302	57	1	0			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

К примеру, одиннадцать перестановок множества $\{1, 2, 3, 4\}$ содержат по два участка подъема:

$$\begin{array}{llllll} 1324, & 1423, & 2314, & 2413, & 3412; & \\ 1243, & 1342, & 2341; & 2134, & 3124, & 4123. \end{array}$$

(В первой строке перечислены перестановки с $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \pi_4$; во второй строке перечислены перестановки с $\pi_1 < \pi_2 < \pi_3 > \pi_4$ и $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 < \pi_4$.) Следовательно, $\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle = 11$. В табл. 298 приведены начальные числа Эйлера — обратите внимание, что на этот раз „фирменным знаком“ данной последовательности служит 1, 11, 11, 1. При $n > 0$ может быть самое большее $n - 1$ участков подъема, так что мы имеем $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = [n = 0]$ на диагонали этого треугольника.

Треугольник Эйлера, подобно треугольнику Паскаля, симметричен слева-направо. Однако на этот раз правило симметрии несколько иное:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1-k} \right\rangle, \qquad \text{целое } n > 0. \tag{6.34}$$

Перестановка $\pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$ содержит $n - 1 - k$ участков подъема тогда и только тогда, когда ее „отражение“ $\pi_n \ldots \pi_2\pi_1$ содержит k таких участков.

Попробуем найти рекуррентность для $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. Каждая перестановка $\rho = \rho_1 \ldots \rho_{n-1}$ множества $\{1, \ldots, n-1\}$ приводит к n перестановкам множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, если вставлять новый элемент n во все возможные места. Предположим, что мы вставляем n на j-е место, получая $\pi = \rho_1 \ldots \rho_{j-1}\, n\, \rho_j \ldots \rho_{n-1}$. Если $j = 1$ или если $\rho_{j-1} < \rho_j$, то число участков подъема в π такое же, как и число участков подъема в ρ; если же $\rho_{j-1} > \rho_j$ или же $j = n$, то оно на единицу больше того же числа в ρ. Поэтому в целом перестановка π с k участками подъема получается $(k + 1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ способами из перестановок ρ, которые содержат k участков подъема, плюс

$\big((n-2)-(k-1)+1\big)\left\langle{n-1\atop k-1}\right\rangle$ способами из перестановок ρ, которые содержат $k-1$ участков подъема. Итак, искомая рекуррентность:

$$\left\langle{n\atop k}\right\rangle = (k+1)\left\langle{n-1\atop k}\right\rangle + (n-k)\left\langle{n-1\atop k-1}\right\rangle, \quad \text{целое } n>0. \quad (6.35)$$

А для „запуска“ данной рекуррентности полагаем

$$\left\langle{0\atop k}\right\rangle = [k=0], \qquad \text{целое } k, \quad (6.36)$$

и считаем, что $\left\langle{n\atop k}\right\rangle = 0$ при $k<0$.

Числа Эйлера полезны главным образом тем, что обеспечивают нас неожиданной связью между обычными степенями и последовательными биномиальными коэффициентами:

$$x^n = \sum_k \left\langle{n\atop k}\right\rangle \binom{x+k}{n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \quad (6.37)$$

Западные ученые недавно узнали о выдающейся китайской книге Ли Сянь-Ляня [194; 213, с. 320–325], опубликованной в 1867 г., в которой впервые упоминается формула (6.37).

(Это „тождество Ворпицкого“ [57].) Так,

$$x^2 = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2},$$
$$x^3 = \binom{x}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3},$$
$$x^4 = \binom{x}{4} + 11\binom{x+1}{4} + 11\binom{x+2}{4} + \binom{x+3}{4},$$

и т. д. Тождество (6.37) легко доказать по индукции (упр. 14).

Между прочим, тождество (6.37) дает еще один способ вычисления суммы первых n квадратов: имеем $k^2 = \left\langle{2\atop 0}\right\rangle\binom{k}{2} + \left\langle{2\atop 1}\right\rangle\binom{k+1}{2} = \binom{k}{2} + \binom{k+1}{2}$; следовательно,

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &\\ &= \left(\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\right) + \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2}\right)\\ &= \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = \tfrac{1}{6}(n+1)n\big((n-1)+(n+2)\big).\end{aligned}$$

Эйлерова рекуррентность (6.35) несколько сложнее рекуррентностей Стирлинга (6.3) и (6.8), так что не следует рассчитывать, что числа $\left\langle{n\atop k}\right\rangle$ будут удовлетворять такому же количеству простых тождеств. Хотя кое-что есть:

$$\left\langle{n\atop m}\right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+1}{k}(m+1-k)^n(-1)^k, \quad (6.38)$$

$$m!\left\{{n\atop m}\right\} = \sum_k \left\langle{n\atop k}\right\rangle \binom{k}{n-m}, \quad (6.39)$$

$$\left\langle{n\atop m}\right\rangle = \sum_k \left\{{n\atop k}\right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k!\,. \quad (6.40)$$

Таблица 300 Треугольник чисел Эйлера второго порядка.

n	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 1} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 3} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 4} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 5} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 6} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 7} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 8} \right\rangle\!\right\rangle$
0	1								
1	1	0							
2	1	2	0						
3	1	8	6	0					
4	1	22	58	24	0				
5	1	52	328	444	120	0			
6	1	114	1452	4400	3708	720	0		
7	1	240	5610	32120	58140	33984	5040	0	
8	1	494	19950	195800	644020	785304	341136	40320	0

Если умножить (6.39) на z^{n-m} и просуммировать по m, то получим $\sum_m \left\{ {n \atop m} \right\} m!\, z^{n-m} = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle (z+1)^k$. А замена z на $z-1$ и приравнивание коэффициентов при z^k дает (6.40). Таким образом, два последних тождества, в сущности, эквивалентны. Первое тождество (6.38) доставляет отдельные значения $\left\langle {n \atop m} \right\rangle$ при малом m:

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1\,, \quad \left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 2^n - n - 1\,,$$
$$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = 3^n - (n+1)2^n + \binom{n+1}{2}\,.$$

Более нет нужды задерживаться на числах Эйлера — вполне достаточно просто знать об их существовании и располагать сводкой основных тождеств, прибегая к ней по мере необходимости. Но прежде чем покончить с этой темой, следует взять на заметку еще один треугольник коэффициентов, представленный в табл. 300. Эти коэффициенты $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ назовем „числами Эйлера второго порядка" потому, что они удовлетворяют рекуррентности, подобной (6.35), в которой, однако, в одном месте n заменено на $2n-1$:

$$\left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle = (k+1)\left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle + (2n-1-k)\left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle\!\!\right\rangle. \qquad (6.41)$$

Эти числа допускают любопытную комбинаторную интерпретацию, впервые подмеченную Гесселем и Стенли [72]: если образовать перестановки мультимножества $\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$ с тем особым свойством, что все числа между двумя встречающимися m больше этого m при $1 \leqslant m \leqslant n$, то $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ является числом таких перестановок, которые содержат k участков подъема. К примеру, имеется восемь соответствующих „одноподъемных" перестановок множества $\{1,1,2,2,3,3\}$:

113322, 133221, 221331, 221133,
223311, 233211, 331122, 331221.

Таким образом, $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle\!\right\rangle = 8$. А всего имеется

$$\sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle = (2n-1)(2n-3)\ldots(1) = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n} \qquad (6.42)$$

соответствующих перестановок мультимножества $\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$, поскольку оба появляющихся n должны быть смежными и имеется $2n-1$ мест их вставки в перестановку мультимножества $\{1,1,2,2,\ldots,n-1,n-1\}$. К примеру, при $n=3$ перестановка 1221 имеет пять мест для вставки, что дает 331221, 133221, 123321, 122331 и 122133. Рекуррентность (6.41) может быть доказана путем перенесения на нее той аргументации, которая использовалась для обычных чисел Эйлера.

Числа Эйлера второго порядка важны, главным образом, в силу своей связи с числами Стирлинга [74]: индукцией по n получаем, что

$$\left\{ {x \atop x-n} \right\} = \sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0; \quad (6.43)$$

$$\left[{x \atop x-n} \right] = \sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+k}{2n}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0. \quad (6.44)$$

Например,

$$\left\{ {x \atop x-1} \right\} = \binom{x}{2}, \qquad \left[{x \atop x-1} \right] = \binom{x}{2};$$

$$\left\{ {x \atop x-2} \right\} = \binom{x+1}{4} + 2\binom{x}{4}, \quad \left[{x \atop x-2} \right] = \binom{x}{4} + 2\binom{x+1}{4};$$

$$\left\{ {x \atop x-3} \right\} = \binom{x+2}{6} + 8\binom{x+1}{6} + 6\binom{x}{6},$$

$$\left[{x \atop x-3} \right] = \binom{x}{6} + 8\binom{x+1}{6} + 6\binom{x+2}{6}.$$

(Случай $n=1$ уже встречался в (6.7).) Эти тождества справедливы тогда, когда x — целое и n — неотрицательное целое число. Поскольку правые части этих тождеств являются многочленами относительно x, тождества (6.43) и (6.44) можно использовать для определения чисел Стирлинга $\left\{ {x \atop x-n} \right\}$ и $\left[{x \atop x-n} \right]$ при произвольных вещественных (или комплексных) x.

Если $n > 0$, соответствующие многочлены $\left\{ {x \atop x-n} \right\}$ и $\left[{x \atop x-n} \right]$ равны нулю при $x=0$, $x=1$, …, $x=n$; следовательно, они делятся на $(x-0)$, $(x-1)$, …, $(x-n)$. Интересно взглянуть на то, что остается после деления на эти множители. Определим *многочлены Стирлинга* $\sigma_n(x)$ по правилу

$$\sigma_n(x) = \left[{x \atop x-n} \right] \Big/ \bigl(x(x-1)\ldots(x-n)\bigr). \qquad (6.45)$$

Таблица 302 Формулы сверток Стирлинга.

$$rs\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(r+tk)\,\sigma_{n-k}(s+t(n-k)) = (r+s)\,\sigma_n(r+s+tn) \tag{6.46}$$

$$s\sum_{k=0}^{n}k\sigma_k(r+tk)\,\sigma_{n-k}(s+t(n-k)) = n\sigma_n(r+s+tn) \tag{6.47}$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = (-1)^{n-m+1}\frac{n!}{(m-1)!}\sigma_{n-m}(-m) \tag{6.48}$$

$$\left[{n \atop m} \right] = \frac{n!}{(m-1)!}\sigma_{n-m}(n) \tag{6.49}$$

(Многочлен $\sigma_n(x)$ имеет степень $n-1$.) Несколько первых случаев таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &= 1/x\,,\\ \sigma_1(x) &= 1/2\,,\\ \sigma_2(x) &= (3x-1)/24\,,\\ \sigma_3(x) &= (x^2-x)/48\,,\\ \sigma_4(x) &= (15x^3-30x^2+5x+2)/5760\,. \end{aligned}$$

Разве $1/x$ многочлен?

(Жаль, что не так.)

Они могут быть вычислены через числа Эйлера второго порядка; например,

$$\sigma_3(x) = \big((x-4)(x-5)+8(x+1)(x-4)+6(x+2)(x+1)\big)/6!\,.$$

Оказывается, что эти многочлены удовлетворяют двум весьма привлекательным тождествам:

$$\left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^x = x\sum_{n\geqslant 0}\sigma_n(x)\,z^n\,, \tag{6.50}$$

$$\left(\frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}\right)^x = x\sum_{n\geqslant 0}\sigma_n(x+n)\,z^n\,. \tag{6.51}$$

И, вообще, если степенной ряд $\mathcal{S}_t(z)$ удовлетворяет тождеству

$$\ln\big(1-z\mathcal{S}_t(z)^{t-1}\big) = -z\mathcal{S}_t(z)^t\,, \tag{6.52}$$

то

$$\mathcal{S}_t(z)^x = x\sum_{n}\sigma_n(x+tn)\,z^n\,. \tag{6.53}$$

Поэтому мы можем вывести общие формулы сверток для чисел Стирлинга, как мы это сделали для биномиальных коэффициентов в табл. 229,— результаты сведены в табл. 302. Если сумма чисел Стирлинга не соответствует тождествам из табл. 294 или 295, то табл. 302 может оказаться как раз тем, что нужно. (Такой пример приводится в этой главе — вслед за уравнением (6.100). А в упр. 7.19 обсуждаются общие принципы сверток, основанных на тождествах типа (6.50) и (6.53).)

6.3 ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Теперь пришло время вплотную заняться гармоническими числами, с которыми мы впервые встретились еще в гл. 2:

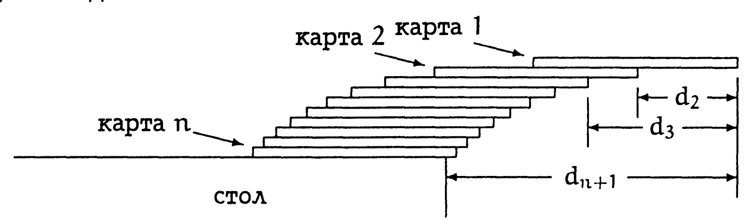
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \text{целое } n \geqslant 0. \qquad (6.54)$$

Эти числа так часто возникают в анализе алгоритмов, что специалистам понадобилось для них специальное обозначение. Мы же воспользуемся обозначением H_n — буква 'H' происходит от слова „harmonic", при этом тон с длиной волны $1/n$ называется n-й гармоникой тона, длина волны которого равна 1. Несколько первых значений H_n выглядят так:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Упражнение 21 показывает, что при $n > 1$ числа H_n никогда не являются целыми.

Вот один карточный фокус, основанный на идее Р. Т. Шарпа [351], который демонстрирует, насколько „гармонично" возникают гармонические числа уже в простых ситуациях. Положив на стол n карт и сдвигая их относительно друг друга, нам хотелось бы образовать как можно больший выступ над краем стола с учетом действия силы тяжести:



Для большей определенности задачи потребуем, чтобы края карт были параллельны краю стола,— в противном случае величину выступа можно было бы увеличить, разворачивая карты так, чтобы их уголки выступали немного дальше. А для того чтобы упростить ответ, предположим, что длина каждой карты равна 2 единицам.

Для одной карты максимальная величина выступа получается тогда, когда ее центр тяжести находится ровно над краем стола. А поскольку центр тяжести находится в центре карты, то мы можем образовать выступ длиной в половину карты, т. е. длиной в 1 единицу.

Для двух карт нетрудно убедиться, что максимальная величина выступа получается тогда, когда центр тяжести верхней карты находится ровно над краем второй карты, а общий центр тяжести обеих карт — ровно над краем стола. А поскольку общий центр тяжести двух карт будет находиться посередине их совмещенных

частей, то мы в состоянии увеличить величину выступа еще на пол-единицы.

Подобные обстоятельства подсказывают общий метод, в соответствии с которым карты помещаются так, чтобы центр тяжести k верхних карт находился ровно над краем $k+1$-й карты (которая положена под эти k верхних карт). Стол же играет роль $n+1$-й карты. Для того чтобы выразить это условие алгебраически, можно обозначить через d_k расстояние от выступающего края самой верхней карты до соответствующего края k-й сверху карты. Тогда $d_1 = 0$, и нам нужно положить d_{k+1} равным центру тяжести k первых карт:

$$d_{k+1} = \frac{(d_1+1)+(d_2+1)+\cdots+(d_k+1)}{k} \qquad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n. \qquad (6.55)$$

(Центр тяжести k предметов, которые имеют веса $w_1, \ldots, w_k$ и центры тяжести которых находятся соответственно в точках $p_1, \ldots, p_k$, находится в точке $(w_1p_1+\cdots+w_kp_k)/(w_1+\cdots+w_k)$.) А эту рекуррентность можно переписать в двух эквивалентных формах:

$$kd_{k+1} = k + d_1 + \cdots + d_{k-1} + d_k\,, \qquad k \geqslant 0,$$
$$(k-1)d_k = k - 1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}\,, \qquad k \geqslant 1.$$

Вычитание одного уравнения из другого показывает, что

$$kd_{k+1} - (k-1)d_k = 1 + d_k\,, \qquad k \geqslant 1;$$

следовательно, $d_{k+1} = d_k + 1/k$. Вторая карта будет сдвинута на половину единицы длины относительно третьей карты, которая сдвинута на треть единицы длины относительно четвертой карты, и т. д. Отсюда по индукции вытекает общая формула

$$d_{k+1} = H_k\,. \qquad (6.56)$$

А если положить $k = n$, то получим $d_{n+1} = H_n$ — полную величину выступа, когда n карт уложены так, как описано выше.

А нельзя ли получить бо́льшую величину выступа, воздерживаясь вначале от сдвига каждой карты на предельно возможное расстояние и накапливая „потенциальную энергию силы тяжести“ для решающего сдвига? Нет, нельзя: всякое устойчивое расположение карт должно удовлетворять неравенству

$$d_{k+1} \leqslant \frac{(1+d_1)+(1+d_2)+\cdots+(1+d_k)}{k}\,, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

К тому же $d_1 = 0$. Отсюда по индукции следует, что $d_{k+1} \leqslant H_k$.

Заметим, что для того чтобы верхняя карта полностью выступала за край стола, вовсе не нужно очень много карт. Нам нужно ровно столько карт, чтобы величина выступа немного превышала длину одной карты, которая равна 2 единицам. А поскольку

первым таким числом, которое превышает 2, является $H_4 = \frac{25}{12}$, то достаточно всего лишь четырех карт.

Всякий, кто действительно пытается получить максимальную величину выступа с помощью 52 карт, по всей видимости имеет дело с неполной колодой — или же он настоящий фокусник.

В случае же 52 карт мы получаем выступ величиной H_{52} единиц, который оказывается равным $H_{52}/2 \approx 2.27$ длинам карт. (Мы вскоре познакомимся с формулой, которая показывает, как вычислять приближенное значение H_n при большом n, не складывая целую кучу дробей.)

Еще одна занятная задачка, называемая „задачей о червяке на резинке", демонстрирует гармонические числа в ином облике. Червяк W медленно, но верно двигается от одного конца полоски резины метровой длины к другому, проползая по одному сантиметру в минуту. По прошествии каждой минуты столь же уверенно держащий полоску некто K — единственная цель жизни которого состоит в расстройстве планов W — растягивает ее еще на один метр. Таким образом, проползав одну минуту, W находится в 1 сантиметре от начала и в 99 сантиметрах от конца резинки, после чего K растягивает полоску на один метр. Процесс растягивания не изменяет относительного местонахождения W (находящегося в 1% длины резинки от начала и в 99% от конца), так что теперь W находится в 2 см от начала и в 198 см от цели. Спустя еще минуту у W на счету 3 пройденных сантиметра и 197 впереди — но K растягивает резинку, и эти сантиметры превращаются в 4.5 и 295.5. И так далее... Достигает ли когда-нибудь червяк финиша? Чем дальше он двигается, тем больше удаляется от него цель. (Предполагаются безграничное терпение у K и W, беспредельная растяжимость резинки и бесконечная крохотность червяка.)

Метрическая система придает этой задачке бóльшую научность.

Выпишем несколько формул. Когда K растягивает резиновую полоску, та ее часть, которую прополз W, остается одной и той же. Таким образом, за первую минуту он проползает 1/100 ее часть, за вторую — 1/200 ее часть, за третью — 1/300 ее часть и т. д. Часть резинки, которую он прополз за n минут, равна

$$\frac{1}{100}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \frac{H_n}{100}. \tag{6.57}$$

Итак, червяк достигает цели, как только H_n превысит 100.

Вскоре мы узнаем, как оценивать H_n при большом n, а пока просто проверим наш анализ, выяснив, как будет вести себя в такой же ситуации гусеница. В отличие от червяка за минуту гусеница способна проползти 50 см, так что в соответствии с только что приведенным рассуждением за n минут она проползет $H_n/2$ длины резинки. Если наше рассуждение правильно, то гусеница должна будет добраться до цели, прежде чем n достигнет 4, поскольку $H_4 > 2$. И это так: простой подсчет показывает, что по истечении трех минут гусенице останется преодолеть всего лишь $33\frac{1}{3}$ см — она финиширует через 3 минуты и 40 секунд ровно.

Пунктуальная гусеница, да?

Гармонические числа появляются и в треугольнике Стирлинга. Попробуем выразить в замкнутой форме $\left[{n \atop 2}\right]$ — число переста-

новок n объектов, которые содержат ровно два цикла. Рекуррентность (6.8) показывает, что

$$\begin{aligned}\left[{n+1 \atop 2}\right] &= n\left[{n \atop 2}\right] + \left[{n \atop 1}\right]\\ &= n\left[{n \atop 2}\right] + (n-1)! \qquad \text{при } n>0,\end{aligned}$$

а достойным кандидатом для разрешения этой рекуррентности служит метод суммирующего множителя из гл. 2:

$$\frac{1}{n!}\left[{n+1 \atop 2}\right] = \frac{1}{(n-1)!}\left[{n \atop 2}\right] + \frac{1}{n}.$$

Развертывание этой рекуррентности показывает, что $\frac{1}{n!}\left[{n+1 \atop 2}\right] = H_n$; следовательно

$$\left[{n+1 \atop 2}\right] = n!H_n. \tag{6.58}$$

В гл. 2 была доказана расходимость гармонического ряда $\sum_k 1/k$, которая означает, что H_n неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Однако то доказательство было непрямым — мы просто выяснили, что некоторая бесконечная сумма (2.58) дает разные результаты при перестановке ее членов, так что сумма $\sum_k 1/k$ не может быть ограниченной. Тот факт, что $H_n \to \infty$, представляется противоречащим здравому смыслу, поскольку, помимо всего прочего, означает, что достаточно большая стопка карт образует над краем стола выступ величиной с милю и даже больше и что в конце концов придет конец мучениям червяка W. Поэтому давайте внимательнее разберемся с величиной H_n при большом n.

По-видимому, самый простой способ показать, что $H_n \to \infty$,— это сгруппировать члены ряда в соответствии со степенями 2. Поместим один член в 1-ю группу, два члена — во 2-ю группу, четыре члена — в 3-ю группу, восемь членов — в 4-ю группу и т. д.:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{Группа1}} + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{Группа2}} + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\text{Группа3}} + \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}_{\text{Группа4}} + \cdots.$$

Поскольку оба члена 2-й группы находятся между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$, то сумма членов этой группы лежит между $2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ и $2\cdot\frac{1}{2} = 1$. Поскольку все четыре члена 3-й группы лежат между $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$, то их сумма также располагается между $\frac{1}{2}$ и 1. И вообще, каждый из 2^{k-1} членов k-й группы располагается между 2^{-k} и 2^{1-k}; следовательно, сумма членов каждой отдельной группы находится между $\frac{1}{2}$ и 1.

Подобная процедура группировки показывает, что если n-й член принадлежит k-й группе, то должно быть $H_n > k/2$ и $H_n \leqslant k$

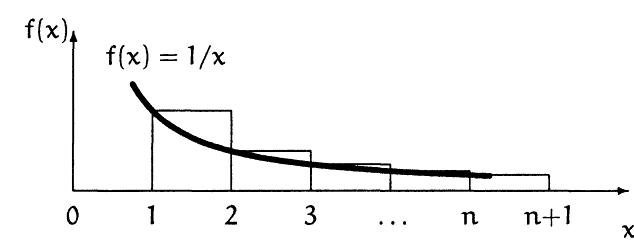
(доказывается индукцией по k). Таким образом, $H_n \to \infty$, а в действительности

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} < H_n \leqslant \lfloor \lg n \rfloor + 1 . \tag{6.59}$$

Итак, мы выяснили величину H_n с точностью до множителя 2. Хотя гармонические числа и стремятся к бесконечности, они стремятся к ней всего лишь логарифмически — т. е. крайне медленно.

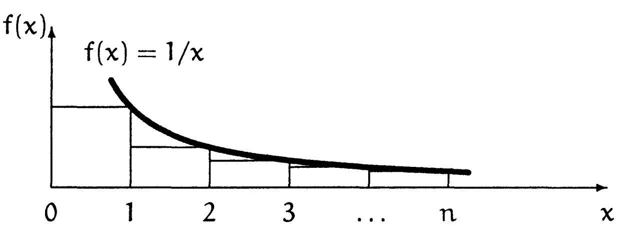
Тогда их следовало бы называть червячными числами, раз они такие медлительные.

Приложив чуть больше усилий и добавив малую толику вычислений, можно получить более точные границы. Как мы выяснили в гл. 2, величина H_n служит дискретным аналогом непрерывной функции $\ln n$. А поскольку натуральный логарифм определяется как площадь области под некоторой кривой, то напрашивается следующее геометрическое сравнение:



Площадь области под данной кривой от 1 до n, которая равна $\int_1^n dx/x = \ln n$, меньше площади указанных n прямоугольников, которая есть $\sum_{k=1}^{n} 1/k = H_n$. Таким образом, $\ln n < H_n$; это более точный результат по сравнению с тем, что мы имели в (6.59). А размещая те же прямоугольники немного по-другому, мы получаем аналогично верхнюю границу:

„Теперь я вижу также способ, каким образом можно найти ... сумму из y^e членов гармонического ряда ... с помощью логарифмов, но [проделать] y^e вычислений для нахождения этих правил было бы слишком затруднительно."
— И. Ньютон [230]



На этот раз площадь H_n этих n прямоугольников меньше, чем площадь первого прямоугольника плюс площадь области под данной кривой. Тем самым доказано, что

$$\ln n < H_n < \ln n + 1 \qquad \text{при } n > 1. \tag{6.60}$$

Итак, мы выяснили величину H_n с ошибкой, не превосходящей 1.

Гармонические числа „второго порядка" $H_n^{(2)}$ возникают тогда, когда мы суммируем квадраты чисел, обратных натуральным, вместо суммирования просто обратных натуральным чисел:

$$H_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} .$$

Аналогично определяются гармонические числа r-го порядка путем суммирования $(-r)$-х степеней натуральных чисел:

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}. \qquad (6.61)$$

Если $r > 1$, то при $n \to \infty$ эти числа стремятся к некоторому пределу; в упр. 2.31 отмечалось, что этот предел обыкновенно называют дзета-функцией Римана:

$$\zeta(r) = H_\infty^{(r)} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^r}. \qquad (6.62)$$

Эйлер [367] обнаружил изящный способ использования обобщенных гармонических чисел для приближения ими обычных гармонических чисел $H_n^{(1)}$. Рассмотрим бесконечный ряд

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \cdots, \qquad (6.63)$$

который сходится при $k > 1$. Левая часть — это $\ln k - \ln(k-1)$; поэтому при суммировании обеих частей по $2 \leqslant k \leqslant n$ левая сумма телескопируется и мы получаем

$$\begin{aligned} \ln n - \ln 1 &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \cdots\right) \\ &= (H_n - 1) + \tfrac{1}{2}(H_n^{(2)} - 1) + \tfrac{1}{3}(H_n^{(3)} - 1) + \tfrac{1}{4}(H_n^{(4)} - 1) + \cdots. \end{aligned}$$

После перестановки получается выражение для разности между H_n и $\ln n$:

$$H_n - \ln n = 1 - \tfrac{1}{2}(H_n^{(2)} - 1) - \tfrac{1}{3}(H_n^{(3)} - 1) - \tfrac{1}{4}(H_n^{(4)} - 1) - \cdots.$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к предельному значению

$$1 - \tfrac{1}{2}(\zeta(2) - 1) - \tfrac{1}{3}(\zeta(3) - 1) - \tfrac{1}{4}(\zeta(4) - 1) - \cdots,$$

известному теперь как *константа Эйлера* и обыкновенно обозначаемому греческой буквой γ. В действительности $\zeta(r) - 1$ приближено равно $1/2^r$, так что этот бесконечный ряд сходится довольно быстро и можно вычислить десятичное значение

$$\gamma = 0.5772156649\ldots. \qquad (6.64)$$

„Huius igitur quantitatis constantis C *valorem deteximus, quippe est* C = 0,577218.“
— *Л. Эйлер [367]*

Итак, эйлерово рассуждение позволяет установить предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = \gamma; \qquad (6.65)$$

таким образом, на H_n приходится примерно 58% длины между обеими границами из (6.60) — мы постепенно приблизились к его истинному значению.

Как будет видно в гл. 9, возможны дальнейшие уточнения. Например, там будет доказано, что

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\epsilon_n}{120n^4}, \qquad 0 < \epsilon_n < 1. \qquad (6.66)$$

Эта формула позволяет, не прибегая к сложению миллиона дробей, заключить, что миллионное гармоническое число есть

$$H_{1000000} \approx 14.3927267228657236313811275.$$

Помимо всего прочего, это означает, что стопка из миллиона карт может выступать над краем стола на длину более чем семи карт.

А что формула (6.66) позволяет сказать о червяке на резинке? Поскольку величина H_n не ограничена, то червяк безусловно доберется до конца, как только H_n превысит 100. Наше приближение к H_n утверждает, что это произойдет при n, примерно равном

$$e^{100-\gamma} \approx e^{99.423}.$$

Ну, на самом деле червяк не успеет добраться до конца: конец света наступит гораздо раньше — как только будет полностью перемещена башня Брамы.

В действительности, в упр. 9.49 доказывается, что переломное значение n есть либо $\lfloor e^{100-\gamma} \rfloor$, либо $\lceil e^{100-\gamma} \rceil$. Можно представить себе ликование червяка W к большой досаде K, когда он, наконец, пересечет финишную черту, начав свой долгий путь около 287 децильонов (287 с 33 нулями.— *Перев.*) веков назад. (А резинка окажется растянутой в длину на более чем 10^{27} световых лет — ее атомы будут значительно удалены друг от друга.)

6.4 ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ

Рассмотрим теперь те суммы, которые содержат гармонические числа, и начнем с небольшой сводки того, что мы узнали в гл. 2: в (2.36) и (2.57) доказано, что

$$\sum_{0 \leqslant k < n} H_k = nH_n - n, \qquad (6.67)$$

$$\sum_{0 \leqslant k < n} kH_k = \frac{n(n-1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}. \qquad (6.68)$$

Давайте дерзнем и возьмемся за более общую сумму, которая включает обе эти суммы в качестве частных случаев. Какова величина суммы

$$\sum_{0 \leqslant k < n} \binom{k}{m} H_k,$$

когда m — целое неотрицательное число?

Метод, который лучше всего подходил для вычисления (6.67) и (6.68) в гл. 2, назывался *суммированием по частям.* Мы записывали общий член суммы в виде $u(k)\Delta v(k)$ и применяли общее правило

$$\sum\nolimits_a^b u(x)\Delta v(x)\,\delta x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \sum\nolimits_a^b v(x+1)\Delta u(x)\,\delta x\,. \qquad (6.69)$$

Вспомнили? Сумма $\sum_{0\leqslant k<n}\binom{k}{m}H_k$, которая теперь перед нами, также подходит для этого метода, поскольку можно положить

$$u(k) = H_k\,, \qquad \Delta u(k) = H_{k+1} - H_k = \frac{1}{k+1}\,,$$
$$v(k) = \binom{k}{m+1}\,, \qquad \Delta v(k) = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1} = \binom{k}{m}\,.$$

(Другими словами, гармонические числа имеют простую Δ, а биномиальные коэффициенты — простую Δ^{-1}, так что мы на верном пути.) Подстановка этого в (6.69) дает

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n}\binom{k}{m}H_k &= \sum\nolimits_0^n \binom{x}{m}H_x\,\delta x\\ &= \binom{x}{m+1}H_x\Big|_0^n - \sum\nolimits_0^n \binom{x+1}{m+1}\frac{\delta x}{x+1}\\ &= \binom{n}{m+1}H_n - \sum_{0\leqslant k<n}\binom{k+1}{m+1}\frac{1}{k+1}\,.\end{aligned}$$

А оставшаяся сумма вычисляется, поскольку $(k+1)^{-1}$ можно внести под знак биномиального коэффициента, полагаясь на наше старое проверенное равенство (5.5):

$$\sum_{0\leqslant k<n}\binom{k+1}{m+1}\frac{1}{k+1} = \sum_{0\leqslant k<n}\binom{k}{m}\frac{1}{m+1} = \binom{n}{m+1}\frac{1}{m+1}\,.$$

Таким образом, требуемый ответ таков:

$$\sum_{0\leqslant k<n}\binom{k}{m}H_k = \binom{n}{m+1}\left(H_n - \frac{1}{m+1}\right). \qquad (6.70)$$

(Это чудесно согласуется с (6.67) и (6.68) при $m = 0$ и $m = 1$.)

В следующем примере вместо умножения фигурирует деление — попробуем вычислить сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}\,.$$

Если представить H_k по определению в виде суммы, то мы получим двойную сумму

$$S_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{j\cdot k}\,.$$

Но теперь нас выручает другой метод из гл. 2: равенство (2.33) подсказывает, что

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\left(H_n^2 + H_n^{(2)}\right). \qquad (6.71)$$

Оказывается, что этот ответ можно было бы получить иначе, если бы мы прибегли к суммированию по частям (см. упр. 26).

Теперь испытаем свои силы на более трудной задаче [304], которая не поддается суммированию по частям:

$$U_n = \sum_{k\geqslant 1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(n-k)^n, \qquad \text{целое } n \geqslant 1.$$

(Чтобы не было намека и на ответ.)

(В этой сумме и намека нет на гармонические числа, но кто знает, вдруг они появятся потом?)

Мы решим эту задачу двумя способами: в одном случае — с трудом вымучивая ответ, а в другом — полагаясь на смекалку и/или везение. Сперва мучительный способ. Разложим $(n-k)^n$ по формуле бинома с тем, чтобы объединить мешающее нам k в знаменателе с числителем:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k\geqslant 1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{j}\binom{n}{j}(-k)^j n^{n-j} \\ &= \sum_{j}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}n^{n-j}\sum_{k\geqslant 1}\binom{n}{k}(-1)^k k^{j-1}. \end{aligned}$$

Не такая уж это путаница, как может показаться, ибо k^{j-1} во внутренней сумме является многочленом по k, а равенство (5.40) подсказывает, что мы просто берем n-ю разность этого многочлена. Так-то оно так, да не совсем — сначала нам нужно внести ясность в ряд деталей. Прежде всего, k^{j-1} не является многочленом при $j=0$; это вынуждает нас выделить сей член и иметь с ним дело отдельно. Кроме того, нам не хватает члена при $k=0$ из формулы для n-й разности; поскольку он отличен от нуля при $j=1$, то его следует восстановить (и тут же его снова вычесть). В результате имеем

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{j\geqslant 1}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}n^{n-j}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}(-1)^k k^{j-1} \\ &\quad - \sum_{j\geqslant 1}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}n^{n-j}\binom{n}{0}0^{j-1} \\ &\quad - \binom{n}{0}n^n\sum_{k\geqslant 1}\binom{n}{k}(-1)^k k^{-1}. \end{aligned}$$

О'кей, теперь верхняя строка (единственная, в которой осталась двойная сумма) есть нуль: это сумма величин, кратных n-м разностям многочленов степени меньшей n, а такие разности равны нулю. И вторая строка есть нуль за исключением случая $j = 1$, когда она равняется $-n^n$. Так что единственное оставшееся затруднение — это третья строка, но зато исходная задача свелась к значительно более простой сумме:

$$U_n = n^n(T_n - 1), \qquad \text{где} \quad T_n = \sum_{k\geqslant 1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \tag{6.72}$$

К примеру, $U_3 = \binom{3}{1}\frac{8}{1} - \binom{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{45}{2}$, $T_3 = \binom{3}{1}\frac{1}{1} - \binom{3}{2}\frac{1}{2} + \binom{3}{3}\frac{1}{3} = \frac{11}{6}$; следовательно, $U_3 = 27(T_3 - 1)$, как и требовалось.

Но как же вычислить T_n? Один способ — заменить $\binom{n}{k}$ на $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, получая простую рекуррентную зависимость T_n от T_{n-1}. Однако имеется более поучительный способ: в (5.41) была получена похожая формула, а именно:

$$\sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Если избавится от члена при $k = 0$ и положить $x = 0$, то получим T_n. Давайте так и поступим:

$$\begin{aligned} T_n &= \left(\frac{1}{x} - \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right)\bigg|_{x=0} \\ &= \left(\frac{(x+1)\ldots(x+n) - n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right)\bigg|_{x=0} \\ &= \left(\frac{x^n {n+1 \brack n+1} + \cdots + x{n+1 \brack 2} + {n+1 \brack 1} - n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{1}{n!}{n+1 \brack 2}. \end{aligned}$$

(Здесь использовано разложение (6.11) выражения $(x+1)\ldots(x+n) = x^{\overline{n+1}}/x$, а в числителе можно выделить x потому, что ${n+1 \brack 1} = n!$.) Из (6.58) нам известно, что ${n+1 \brack 2} = n!\,H_n$; следовательно, $T_n = H_n$, и получаем такой ответ:

$$U_n = n^n(H_n - 1). \tag{6.73}$$

Это один подход. Другой подход — попробовать вычислить значительно более общую сумму

$$U_n(x, y) = \sum_{k\geqslant 1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+ky)^n, \quad \text{целое } n \geqslant 0; \tag{6.74}$$

величина исходной суммы U_n будет тогда представлять ее частный случай $U_n(n, -1)$. (К приданию большей общности нас толкает то, что предыдущий вывод „проигнорировал" бо́льшую часть

деталей данной задачи — так или иначе те детали не должны иметь отношения к делу, ибо n-я разность ликвидирует их.)

Можно было бы с небольшими изменениями воспроизвести предыдущий вывод и выяснить величину $U_n(x,y)$. Или можно было бы заменить $(x+ky)^n$ на $(x+ky)^{n-1}(x+ky)$, а затем заменить $\binom{n}{k}$ на $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, что приводит к рекуррентности

$$U_n(x,y) = xU_{n-1}(x,y) + x^n/n + yx^{n-1}, \tag{6.75}$$

которая благополучно решается с помощью суммирующего множителя (упр. 5).

Но проще всего воспользоваться другим приемом, который сослужил нам добрую службу в гл. 2,— дифференцированием. Производная $U_n(x,y)$ по y привносит k, которое сокращается с k в знаменателе, в результате чего получается тривиальная сумма:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}U_n(x,y) &= \sum_{k\geqslant 1}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}n(x+ky)^{n-1}\\ &= \binom{n}{0}nx^{n-1} - \sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}(-1)^k n(x+ky)^{n-1}\\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

(Снова n-я разность многочлена степени $< n$ обратилась в нуль.)

Нами установлено, что производная от $U_n(x,y)$ по y есть nx^{n-1} независимо от y. В общем случае, если $f'(y)=c$, то $f(y)=f(0)+cy$; поэтому должно быть $U_n(x,y)=U_n(x,0)+nx^{n-1}y$.

Остается определить $U_n(x,0)$. Но $U_n(x,0)$ — это просто x^n, умноженное на сумму $T_n = H_n$, которую мы уже рассмотрели в (6.72); поэтому общая сумма (6.74) выражается в замкнутой форме:

$$U_n(x,y) = x^n H_n + nx^{n-1}y. \tag{6.76}$$

Ну, а в частности, решение исходной задачи — это $U_n(n,-1) = n^n(H_n-1)$.

6.5 ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

Следующая в нашей повестке дня важная последовательность чисел носит имя Якоба Бернулли (1654–1705), который, подбирая формулы для сумм m-ых степеней натуральных чисел, обнаружил в них любопытные закономерности [22]. Положим

$$\begin{aligned}S_m(n) &= 0^m + 1^m + \cdots + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m\\ &= \sum\nolimits_0^n x^m\,\delta x.\end{aligned} \tag{6.77}$$

(Таким образом, $S_m(n) = H_{n-1}^{(-m)}$ при $m > 0$ в обозначениях для обобщенных гармонических чисел.) Рассматривая следующий ряд формул, Бернулли уловил в них некую закономерность:

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n\\
S_1(n) &= \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n\\
S_2(n) &= \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n\\
S_3(n) &= \tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2\\
S_4(n) &= \tfrac{1}{5}n^5 - \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n\\
S_5(n) &= \tfrac{1}{6}n^6 - \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2,\\
S_6(n) &= \tfrac{1}{7}n^7 - \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n\\
S_7(n) &= \tfrac{1}{8}n^8 - \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2,\\
S_8(n) &= \tfrac{1}{9}n^9 - \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n\\
S_9(n) &= \tfrac{1}{10}n^{10} - \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2\\
S_{10}(n) &= \tfrac{1}{11}n^{11} - \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n
\end{aligned}$$

А видите ли вы закономерность? В формуле для $S_m(n)$ коэффициент при n^{m+1} всегда равен $1/(m+1)$. Коэффициент при n^m всегда равен $-1/2$. Коэффициент при n^{m-1} всегда … давайте-ка посмотрим … равен $m/12$. Коэффициент при n^{m-2} равен нулю. Коэффициент при n^{m-3} всегда равен … давайте-ка посмотрим … гм-м … ну да, он равен $-m(m-1)(m-2)/720$. Коэффициент при n^{m-4} всегда равен нулю. А если эту закономерность продолжить, то коэффициент при n^{m-k} всегда будет иметь вид некоторой константы, умноженной на $m^{\underline{k}}$.

Именно это и обнаружил Бернулли. (Он не оставил доказательства.) В современных обозначениях его формула записывается в виде

„… в течение половины четверти часа я нашел сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел“ — Я. Бернулли [22]. (Добавл. перев.)

$$\begin{aligned}
S_m(n) &= \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + \binom{m+1}{1}B_1 n^m + \cdots + \binom{m+1}{m}B_m n\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}. \qquad (6.78)
\end{aligned}$$

Коэффициенты при степенях n — числа Бернулли — определяются неявным рекуррентным соотношением

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}B_j = [m=0] \qquad \text{при любом } m \geqslant 0. \qquad (6.79)$$

Так, $\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 0$. Несколько первых этих величин оказываются такими:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2730}$

(Все надежды на простое выражение в замкнутой форме для B_n рушатся при появлении странной дроби $-691/2730$.)

На самом деле рекуррентную формулу, подобную (6.78), установил в 1730 г. А. де Муавр, который продолжил работу над незавершенным Я. Бернулли при его жизни трактатом [22]. — Перев.

Формулу Бернулли (6.78) можно доказать индукцией по m, применяя метод приведения (один из тех способов, с помощью которого мы нашли в гл. 2 сумму $S_2(n) = \Box_n$):

$$\begin{aligned} S_{m+1}(n) + n^{m+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} k^j \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} S_j(n) . \end{aligned} \tag{6.80}$$

Положим $\widehat{S}_m(n)$ равной правой части (6.78); мы намерены показать, что $S_m(n) = \widehat{S}_m(n)$ в предположении, что $S_j(n) = \widehat{S}_j(n)$ при $0 \leqslant j < m$. Начнем, как мы делали в гл. 2 в случае $m = 2$, с вычитания $S_{m+1}(n)$ из обеих частей (6.80). Затем представим каждое $S_j(n)$ в форме (6.78) и перегруппируем члены так, чтобы коэффициенты при степенях n в правой части оказались рядом и упростились:

$$\begin{aligned} n^{m+1} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} S_j(n) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \widehat{S}_j(n) + \binom{m+1}{m} \Delta \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} \binom{j+1}{k} B_k n^{j+1-k} + (m+1)\Delta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant j \leqslant m} \binom{m+1}{j} \binom{j+1}{k} \frac{B_k}{j+1} n^{j+1-k} + (m+1)\Delta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant j \leqslant m} \binom{m+1}{j} \binom{j+1}{j-k} \frac{B_{j-k}}{j+1} n^{k+1} + (m+1)\Delta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant j \leqslant m} \binom{m+1}{j} \binom{j+1}{k+1} \frac{B_{j-k}}{j+1} n^{k+1} + (m+1)\Delta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{n^{k+1}}{k+1} \sum_{k \leqslant j \leqslant m} \binom{m+1}{j} \binom{j}{k} B_{j-k} + (m+1)\Delta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{n^{k+1}}{k+1} \binom{m+1}{k} \sum_{k \leqslant j \leqslant m} \binom{m+1-k}{j-k} B_{j-k} + (m+1)\Delta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{n^{k+1}}{k+1} \binom{m+1}{k} \sum_{0 \leqslant j \leqslant m-k} \binom{m+1-k}{j} B_j + (m+1)\Delta \end{aligned}$$

$$= \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \frac{n^{k+1}}{k+1}\binom{m+1}{k}[m-k=0]+(m+1)\Delta$$

$$= \frac{n^{m+1}}{m+1}\binom{m+1}{m}+(m+1)\Delta$$

$$= n^{m+1}+(m+1)\Delta, \qquad \text{где } \Delta = S_m(n)-\widehat{S}_m(n).$$

(Подобный вывод представляет собой хорошее упражнение на те стандартные действия, которыми мы овладели в гл. 5.) Таким образом, $\Delta = 0$ и $S_m(n) = \widehat{S}_m(n)$. чтд.

Далее речь пойдет о несколько более тонких материях, с которыми вы, вероятно, на первый раз предпочтете просто бегло ознакомиться.
— Сочувствующий ассистент

В гл. 7, используя производящие функции, мы докажем (6.78) значительно проще. Ключевая идея этого доказательства — показать, что числа Бернулли являются коэффициентами степенного ряда

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!}. \tag{6.81}$$

Начало беглого ознакомления

Давайте пока просто примем на веру справедливость равенства (6.81), с тем, чтобы можно было вывести ряд его поразительных следствий. Если к обеим частям прибавить $\frac{1}{2}z$, избавляясь тем самым от члена $B_1 z/1! = -\frac{1}{2}z$ справа, то получим

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{z}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}. \tag{6.82}$$

Здесь функция cth — это „гиперболический котангенс", по-другому известный из книг по анализу как отношение $\operatorname{ch} z/\operatorname{sh} z$, где

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}. \tag{6.83}$$

Замена z на $-z$ дает $\left(\frac{-z}{2}\right)\operatorname{cth}\left(\frac{-z}{2}\right) = \frac{z}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}$; следовательно, каждый коэффициент с нечетным номером в разложении $\frac{z}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}$ должен быть равен нулю, и мы получаем

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = B_{13} = \cdots = 0. \tag{6.84}$$

Кроме того, равенство (6.82) приводит к выражению в замкнутой форме для коэффициента разложения cth:

$$z\operatorname{cth} z = \frac{2z}{e^{2z}-1}+\frac{2z}{2} = \sum_{n\geqslant 0} B_{2n}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} 4^n B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{6.85}$$

Однако гиперболические функции не пользуются большим спросом — более популярны „действительные" тригонометрические функции. Обычные тригонометрические функции можно выра-

зить через их гиперболические аналоги, исходя из правил

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz; \tag{6.86}$$

соответствующие этим функциям степенные ряды выглядят так:

$$\sin z = \frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{z^1}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots;$$

$$\cos z = \frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{z^0}{0!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots.$$

Ясно: мы получаем „действительные“ функции, используя мнимые числа.

Следовательно, $\operatorname{ctg} z = \cos z / \sin z = i \operatorname{ch} iz / \operatorname{sh} iz = i \operatorname{cth} iz$ и

$$z \operatorname{ctg} z = \sum_{n \geqslant 0} B_{2n} \frac{(2iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \geqslant 0} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{6.87}$$

Другая замечательная формула для $z \operatorname{ctg} z$ была найдена Эйлером (упр. 73):

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2 \sum_{k \geqslant 1} \frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2}. \tag{6.88}$$

А это можно разложить в ряд по степеням z^2, получая

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2 \sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{z^2}{k^2\pi^2} + \frac{z^4}{k^4\pi^4} + \frac{z^6}{k^6\pi^6} + \cdots \right)$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{z^2}{\pi^2} H_\infty^{(2)} + \frac{z^4}{\pi^4} H_\infty^{(4)} + \frac{z^6}{\pi^6} H_\infty^{(6)} + \cdots \right).$$

Приравнивание коэффициентов при z^{2n} к таким же коэффициентам в другой нашей формуле — формуле (6.87) — делает нас обладателями почти что сверхъестественного выражения в замкнутой форме для бесконечного числа бесконечных сумм:

$$\zeta(2n) = H_\infty^{(2n)} = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} \pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!}, \quad \text{целое } n > 0. \tag{6.89}$$

К примеру,

$$\zeta(2) = H_\infty^{(2)} = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots = \pi^2 B_2 = \pi^2/6, \tag{6.90}$$

$$\zeta(4) = H_\infty^{(4)} = 1 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{81} + \cdots = -\pi^4 B_4/3 = \pi^4/90. \tag{6.91}$$

Формула (6.89) не только представляет собой выражение в замкнутой форме для чисел $H_\infty^{(2n)}$ — помимо этого, она сообщает нам приблизительную величину чисел B_{2n}, поскольку $H_\infty^{(2n)}$ весьма близко к 1 при большом n. А еще она сообщает нам, что

$(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$ при любом $n > 0$; таким образом, отличные от нуля числа Бернулли являются знакочередующимися.

И это еще не все. Числа Бернулли появляются также в коэффициентах разложения функции тангенса,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n-1} 4^n (4^n - 1) B_{2n} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}, \qquad (6.92)$$

Текст с этого места можно вообще пропустить.

и других тригонометрических функций (упр. 72). Формула (6.92) доставляет другой важный факт о числах Бернулли, а именно то, что

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{4^n(4^n-1)}{2n} B_{2n} \text{ — положительное целое.} \qquad (6.93)$$

Например,

n	1	3	5	7	9	11	13
T_n	1	2	16	272	7936	353792	22368256

(Числа T называются *тангенциальными числами.*)

Один из способов доказательства утверждения (6.93), следуя Б. Ф. Логану,— рассмотреть степенной ряд

$$\begin{aligned} &\frac{\sin z + x\cos z}{\cos z - x \sin z} \\ &\qquad = x + (1+x^2)z + (2x^3+2x)\frac{z^2}{2} + (6x^4+8x^2+2)\frac{z^3}{6} + \cdots \\ &\qquad = \sum_{n\geqslant 0} T_n(x)\frac{z^n}{n!}, \end{aligned} \qquad (6.94)$$

где $T_n(x)$ — многочлен относительно x. Подстановка $x = 0$ дает $T_n(0) = T_n$, n-е тангенциальное число. Если продифференцировать (6.94) по x, то получим

Когда $x = \operatorname{tg} w$, это $\operatorname{tg}(z+w)$. Следовательно, по теореме Тейлора, n-я производная $\operatorname{tg} w$ равна $T_n(\operatorname{tg} w)$.

$$\frac{1}{(\cos z - x\sin z)^2} = \sum_{n\geqslant 0} T_n'(x)\frac{z^n}{n!},$$

а если продифференцировать по z, то получим

$$\frac{1+x^2}{(\cos z - x\sin z)^2} = \sum_{n\geqslant 1} T_n(x)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 0} T_{n+1}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Попробуйте, и вы убедитесь, что

$$T_{n+1}(x) = (1+x^2)T_n'(x), \qquad T_0(x) = x. \qquad (6.95)$$

А из этой простой рекуррентности следует, что коэффициенты $T_n(x)$ — целые неотрицательные числа. Кроме того, легко доказать, что многочлен $T_n(x)$ имеет степень $n+1$ и что его коэффициенты попеременно то равны нулю, то больше нуля. Поэтому

$T_{2n+1}(0) = T_{2n+1}$ являются целыми положительными числами, как и утверждалось в (6.93).

Рекуррентность (6.95) обеспечивает нас простым способом вычисления чисел Бернулли через тангенциальные числа, требующим только простых операций над целыми числами; по контрасту с этим определяющая числа Бернулли рекуррентность (6.79) содержит непростые арифметические операции с дробями.

Если мы пожелаем вычислить сумму n-х степеней натуральных чисел от a до $b-1$, а не от 0 до $n-1$, то согласно соответствующей теории из гл. 2

$$\sum_{k=a}^{b-1} k^m = \sum\nolimits_a^b x^m \,\delta x = S_m(b) - S_m(a)\,. \tag{6.96}$$

А это соотношение имеет интересные следствия, если рассматривать отрицательные значения k. Имеем

$$\sum_{k=-n+1}^{-1} k^m = (-1)^m \sum_{k=0}^{n-1} k^m\,, \qquad \text{когда } m > 0,$$

следовательно,

$$S_m(0) - S_m(-n+1) = (-1)^m \bigl(S_m(n) - S_m(0)\bigr)\,.$$

Но поскольку $S_m(0) = 0$, получаем соотношение

(Иоганн Фаулхабер неявно использовал (6.97) в 1635 г. [309], когда он нашел простые формулы, выражающие $S_m(n)$ в виде многочленов от $n(n+1)/2$ для $m \leqslant 17$; см. [154].)

$$S_m(1-n) = (-1)^{m+1} S_m(n)\,, \qquad m > 0. \tag{6.97}$$

Поэтому и $S_m(1) = 0$. Если разложить многочлен $S_m(n)$ на множители, то среди них всегда будут множители n и $(n-1)$, ибо этот многочлен имеет своими корнями 0 и 1. А вообще, $S_m(n)$ является многочленом $m+1$-й степени со старшим членом $\frac{1}{m+1} n^{m+1}$. Более того, можно подставить $n = \frac{1}{2}$ в (6.97), получая $S_m(\frac{1}{2}) = (-1)^{m+1} S_m(\frac{1}{2})$; если m — четно, то $S_m(\frac{1}{2}) = 0$, так что еще одним множителем будет $(n - \frac{1}{2})$. Эти наблюдения объясняют, почему в гл. 2 нам удалось найти столь простое разложение

$$S_2(n) = \tfrac{1}{3} n (n - \tfrac{1}{2})(n-1)\,;$$

там можно было бы воспользоваться подобным рассуждением для установления величины $S_2(n)$ без ее вычисления! Кроме того, (6.97) означает, что многочлен с остальными множителями, $\widehat{S}_m(n) = S_m(n)/(n - \frac{1}{2})$, всегда удовлетворяет соотношению

$$\widehat{S}_m(1-n) = \widehat{S}_m(n)\,, \qquad m \text{ четное}, \quad m > 0.$$

Отсюда следует, что $S_m(n)$ всегда можно записать в форме произведения

$$S_m(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} (n - \tfrac{1}{2} - \alpha_k)(n - \tfrac{1}{2} + \alpha_k), & \text{нечетное } m, \\ \dfrac{(n-\frac{1}{2})}{m+1} \displaystyle\prod_{k=1}^{m/2} (n - \tfrac{1}{2} - \alpha_k)(n - \tfrac{1}{2} + \alpha_k), & \text{четное } m. \end{cases} \qquad (6.98)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, а $\alpha_2, \ldots, \alpha_{\lceil m/2 \rceil}$ — соответствующие комплексные числа, величины которых зависят от m. Например,

$$S_3(n) = n^2(n-1)^2/4,$$

$$S_4(n) = n(n-\tfrac{1}{2})(n-1)(n-\tfrac{1}{2}+\sqrt{7/12})(n-\tfrac{1}{2}-\sqrt{7/12})/5,$$

$$S_5(n) = n^2(n-1)^2(n-\tfrac{1}{2}+\sqrt{3/4})(n-\tfrac{1}{2}-\sqrt{3/4})/6,$$

$$S_6(n) = n(n-\tfrac{1}{2})(n-1)(n-\tfrac{1}{2}+\alpha)(n-\tfrac{1}{2}-\alpha)(n-\tfrac{1}{2}+\overline{\alpha}) \times (n-\tfrac{1}{2}-\overline{\alpha})/7,$$

$$\text{где } \alpha = 2^{-3/2}3^{-1/4}\left(\sqrt{\sqrt{31}+\sqrt{27}}+i\sqrt{\sqrt{31}-\sqrt{27}}\right).$$

Если m нечетно и больше 1, то $B_m = 0$; следовательно, многочлен $S_m(n)$ делится на n^2 (и на $(n-1)^2$). В противном случае корни многочлена $S_m(n)$, по-видимому, не должны подчиняться какому-нибудь простому правилу.

Конец пропускаемого текста.

Завершим изучение чисел Бернулли выяснением того, как они связаны с числами Стирлинга. Один из способов вычисления суммы $S_m(n)$ состоит в замене обычных степеней на убывающие, поскольку убывающие степени просто суммируются. А после вычисления подобных простых сумм можно опять вернуться к обычным степеням:

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \geqslant 0} \left\{ {m \atop j} \right\} k^{\underline{j}} = \sum_{j \geqslant 0} \left\{ {m \atop j} \right\} \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{j}}$$

$$= \sum_{j \geqslant 0} \left\{ {m \atop j} \right\} \frac{n^{\underline{j+1}}}{j+1}$$

$$= \sum_{j \geqslant 0} \left\{ {m \atop j} \right\} \frac{1}{j+1} \sum_{k \geqslant 0} (-1)^{j+1-k} \left[{j+1 \atop k} \right] n^k.$$

Поэтому, приравнивая полученные коэффициенты при степенях n к соответствующим коэффициентам в (6.78), мы должны получить тождество

$$\sum_{j\geqslant 0} \left\{ {m \atop j} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{k} B_{m+1-k}, \qquad k > 0. \tag{6.99}$$

Было бы здóрово доказать это соотношение непосредственно, получая тем самым другой способ определения чисел Бернулли. Однако ни правила табл. 294, ни правила табл. 295 не дают нам сколько-нибудь явного повода рассчитывать на доказательство по индукции, что сумма слева в (6.99) есть константа, умноженная на $m^{\underline{k-1}}$. Если $k = m+1$, то сумма слева есть просто $\left\{ {m \atop m} \right\} \left[{m+1 \atop m+1} \right]/(m+1) = 1/(m+1)$, так что в этом случае все просто. А если $k = m$, то сумма слева сводится к $\left\{ {m \atop m-1} \right\} \left[{m \atop m} \right] m^{-1} - \left\{ {m \atop m} \right\} \left[{m+1 \atop m} \right] (m+1)^{-1} = \frac{1}{2}(m-1) - \frac{1}{2}m = -\frac{1}{2}$, так что и этот случай довольно прост. Но при $k < m$ сумма слева выглядит устрашающе. Вряд ли Бернулли открыл бы свои числа, если бы выбрал этот путь.

Одно можно сделать — заменить $\left\{ {m \atop j} \right\}$ на $\left\{ {m+1 \atop j+1} \right\} - (j+1)\left\{ {m \atop j+1} \right\}$. Тогда $(j+1)$ чудно сокращается с мешающим нам знаменателем, и левая часть становится равной

$$\sum_{j\geqslant 0} \left\{ {m+1 \atop j+1} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} - \sum_{j\geqslant 0} \left\{ {m \atop j+1} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] (-1)^{j+1-k}.$$

Согласно же (6.31) при $k < m$ вторая сумма равна нулю. Это оставляет нас наедине с первой суммой, которая требует смены декораций: переобозначим все переменные так, чтобы индексом суммирования было k и чтобы остальными параметрами были m и n. Тогда тождество (6.99) будет эквивалентно тождеству

$$\sum_{k} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] \frac{(-1)^{k-m}}{k} = \frac{1}{n} \binom{n}{m} B_{n-m} + [m = n-1], \qquad m > 0. \tag{6.100}$$

Неплохо — мы получили нечто более привлекательное, несмотря на то что табл. 295 по-прежнему не подсказывает ничего дельного насчет следующего шага.

Но теперь на помощь приходят формулы сверток из табл. 302: можно воспользоваться формулами (6.49) и (6.48) для того, чтобы

выразить общий член суммы через многочлены Стирлинга:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] = (-1)^{n-k+1} \frac{n!}{(k-1)!} \sigma_{n-k}(-k) \times \frac{k!}{(m-1)!} \sigma_{k-m}(k)\,,$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] \frac{(-1)^{k-m}}{k} = (-1)^{n+1-m} \frac{n!}{(m-1)!} \sigma_{n-k}(-k)\, \sigma_{k-m}(k)\,.$$

Дела принимают хороший оборот: свертка (6.46) для $t = 1$ дает

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n-k}(-k)\, \sigma_{k-m}(k) &= \sum_{k=0}^{n-m} \sigma_{n-m-k}\big(-n + (n-m-k)\big)\, \sigma_k(m+k) \\ &= \frac{m-n}{(m)(-n)} \sigma_{n-m}\big(m - n + (n-m)\big)\,. \end{aligned}$$

Итак, формула (6.100) подтверждена, и мы установили, что числа Бернулли связаны с постоянными членами многочленов Стирлинга:

Конец беглого ознакомления

$$\frac{B_m}{m!} = -m\sigma_m(0)\,. \qquad (6.101)$$

6.6 ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

А теперь перейдем к особенной последовательности чисел — быть может, наиболее приятной из всех — последовательности Фибоначчи $\langle F_n \rangle$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

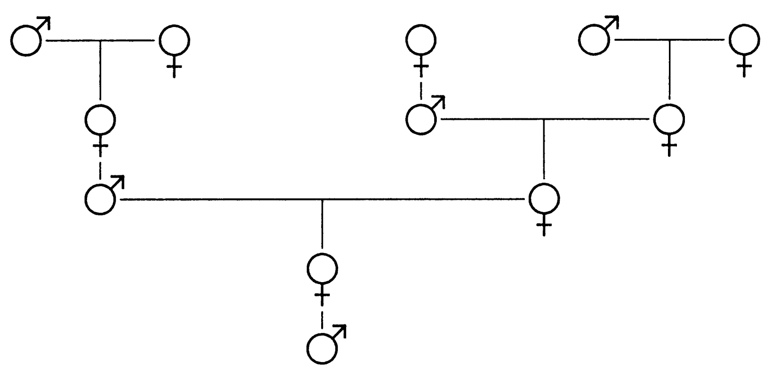
В отличие от гармонических чисел и чисел Бернулли, числа Фибоначчи являют собой подкупающие своей бесхитростностью целые числа. Они определяются рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} F_0 &= 0\,, \\ F_1 &= 1\,, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{для } n > 1. \end{aligned} \qquad (6.102)$$

Бесхитростность этого правила — возможно, самого бесхитростного из всевозможных рекуррентных соотношений, в котором каждое число зависит от двух предыдущих,— служит объяснением того, почему числа Фибоначчи встречаются в самых разнообразных ситуациях.

Противоестественная природа этого примера возмутительна — эту книгу надо запретить.

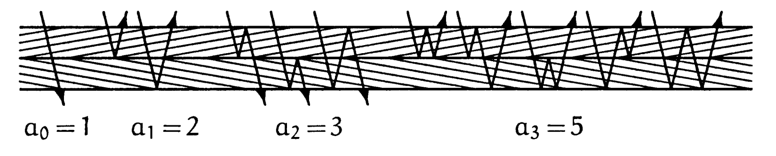
Наглядный пример естественного возникновения чисел Фибоначчи дают „родословные деревья пчел". Рассмотрим родословную пчелы-самца. Каждый самец (называемый также трутнем) появляется на свет непарным путем от самки (называемой также маткой), однако каждая самка имеет двух родителей — самца и самку. Вот несколько начальных уровней такого дерева:



У трутня один дед и одна бабка, один прадед и две прабабки, два прапрадеда и три прапрабабки. И вообще, как легко установить по индукции, у него ровно F_{n+1} пра^n-дедушек и F_{n+2} пра^n-бабушек.

Числа Фибоначчи часто обнаруживаются в природе — возможно, по причинам, аналогичным закону образования родословного дерева пчел. К примеру, семечки, плотно набитые в крупную „корзинку" обыкновенного подсолнуха, располагаются по спиралям — обычно это 34 спирали, закручивающиеся в одном направлении, и 55 спиралей — в другом. Корзинки поменьше будут иметь соответственно 21 и 34 или же 13 и 21 спираль, а однажды в Англии демонстрировался гигантский подсолнух с 89 спиралями одного направления и 144 — другого. Подобные закономерности обнаруживаются и в некоторых видах сосновых шишек.

А вот пример другого рода [223]. Предположим, что друг на друга наложены две стеклянные пластинки. Сколько существует способов a_n прохождения луча света через пластинки или отражения от них после изменения его направления n раз? Несколько первых случаев таковы:



Когда n четно, получается четное число преломлений и луч проходит насквозь; когда же n нечетно, луч отражается и выходит с той стороны, с которой и вошел. По-видимому, a_n будут числами Фибоначчи, и непродолжительное разглядывание рисунка показывает почему: при $n \geqslant 2$ преломляющиеся n раз лучи

либо претерпевают свое первое отражение от внешней поверхности и продолжают прохождение a_{n-1} способами, либо начинают с отражения от внутренней поверхности и затем снова отражаются в обратном направлении, чтобы закончить прохождение a_{n-2} способами. Таким образом, получается фибоначчиева рекуррентность $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Начальные условия отличаются, но не очень, поскольку $a_0 = 1 = F_2$ и $a_1 = 2 = F_3$; следовательно, все просто сдвигается на два, так что $a_n = F_{n+2}$.

Эти числа ввел в 1202 г. Леонардо Фибоначчи, и математики постепенно стали выяснять все больше и больше интересного о них. Эдуард Люка, причастный к головоломке о ханойской башне, рассмотренной в гл. 1, активно занимался ими во второй половине девятнадцатого столетия (в действительности, благодаря именно Люка, название „числа Фибоначчи" стало общеупотребительным). Одно из его удивительных достижений состояло в использовании свойств чисел Фибоначчи для доказательства того, что 39-значное число Мерсенна $2^{127} - 1$ является простым.

„La suite de Fibonacci possède des propriétés nombreuses fort intéressantes."
— Э. Люка [208]

Одним из самых первых фактов о числах Фибоначчи, обнаруженным в 1680 г. французским астрономом Жан-Домиником Кассини [126], является соотношение

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{при } n > 0. \tag{6.103}$$

Так, при $n = 6$ соотношение Кассини справедливо утверждает, что $13 \cdot 5 - 8^2 = 1$. (Этот закон был известен Иоганну Кеплеру [129] еще в 1608 г.)

Многочленная формула, которая включает в себя числа Фибоначчи вида $F_{n \pm k}$ при малых k, может быть преобразована в формулу, которая включает в себя только F_n и F_{n+1}, если воспользоваться правилом

$$F_m = F_{m+2} - F_{m+1} \tag{6.104}$$

для выражения F_m через бо́льшие числа Фибоначчи при $m < n$, и если воспользоваться формулой

$$F_m = F_{m-2} + F_{m-1} \tag{6.105}$$

для замены F_m меньшими числами Фибоначчи при $m > n+1$. Так, например, можно заменить F_{n-1} на $F_{n+1} - F_n$ в (6.103), получая соотношение Кассини вида

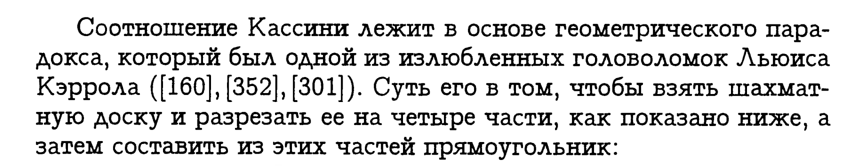
$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n. \tag{6.106}$$

Кроме того, если заменить n на $n+1$, то соотношение Кассини принимает вид

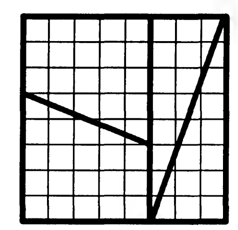
$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1};$$

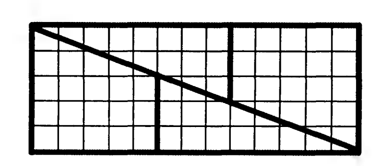
это то же самое, что и $(F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, а последнее совпадает с (6.106). Таким образом „Кассини(n)" справедливо тогда и только тогда, когда справедливо „Кассини($n+1$)"; так что по индукции равенство (6.103) справедливо при любом n.

„Найти размеры всех квадратных шахматных досок, которые можно разрезать ... и, переставив части, получить прямоугольник с кажущимся приращением площади в одну клетку."
— Л. Кэррол [175, с. 388].*



Соотношение Кассини лежит в основе геометрического парадокса, который был одной из излюбленных головоломок Льюиса Кэррола ([160], [352], [301]). Суть его в том, чтобы взять шахматную доску и разрезать ее на четыре части, как показано ниже, а затем составить из этих частей прямоугольник:





Этот парадокс объясняется тем, что ... — впрочем, волшебство объяснять не принято.

Presto: первоначальные $8 \times 8 = 64$ клетки переставлены так, что получилось $5 \times 13 = 65$ клеток! Аналогичная конструкция расчленяет любой $F_n \times F_n$-квадрат на четыре части с размерами сторон F_{n+1}, F_n, F_{n-1} и F_{n-2} клеток вместо соответственно 13, 8, 5, и 3 клеток в нашем примере. В результате получается $F_{n-1} \times F_{n+1}$-прямоугольник, и в соответствии с (6.103) одна клетка либо прибавляется, либо утрачивается — в зависимости от того, четно или нечетно n.

Строго говоря, мы не можем применять правило (6.105) кроме как при $m \geqslant 2$, ибо нами не определены F_n при отрицательном n. Мы обретем большую свободу действий, если избавимся от этого ограничительного условия и воспользуемся правилами (6.104) и (6.105) для доопределения чисел Фибоначчи при отрицательных индексах. Так, F_{-1} оказывается равным $F_1 - F_0 = 1$, а F_{-2} — равным $F_0 - F_{-1} = -1$. Действуя таким образом, выписываем величины

n	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11
F_n	0	1	−1	2	−3	5	−8	13	−21	34	−55	89

и вскоре становится ясно (по индукции), что

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n\,, \qquad n \text{ — целое.} \tag{6.107}$$

Если обобщить последовательность Фибоначчи подобным образом, то соотношение Кассини (6.103) будет справедливым при *любых* целых n, а не только при $n > 0$.

Процесс сведения $F_{n\pm k}$ к комбинации F_n и F_{n+1} по правилам (6.105) и (6.104) приводит к последовательности формул

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\,, & F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n\,,\\
F_{n+3} &= 2F_{n+1} + F_n\,, & F_{n-2} &= -F_{n+1} + 2F_n\,,\\
F_{n+4} &= 3F_{n+1} + 2F_n\,, & F_{n-3} &= 2F_{n+1} - 3F_n\,,\\
F_{n+5} &= 5F_{n+1} + 3F_n\,, & F_{n-4} &= -3F_{n+1} + 5F_n\,,
\end{aligned}$$

в которой просматривается закономерность другого рода:

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \,. \qquad (6.108)$$

Это соотношение, которое легко доказывается по индукции, справедливо при любых целых k и n (положительных, отрицательных или равных нулю).

Если в (6.108) положить $k = n$, то выясняется, что

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \,; \qquad (6.109)$$

следовательно, F_{2n} кратно F_n. Аналогично,

$$F_{3n} = F_{2n} F_{n+1} + F_{2n-1} F_n \,,$$

и можно заключить, что F_{3n} также кратно F_n. И вообще, по индукции

$$F_{kn} \text{ кратно } F_n \qquad (6.110)$$

при любых целых k и n. Это объясняет, в частности, почему F_{15} (которое равно 610) кратно как F_3, так и F_5 (которые равны 2 и 5). Фактически справедливо даже большее: в упр. 27 доказывается, что

$$\text{НОД}(F_m, F_n) = F_{\text{НОД}(m,n)} \,. \qquad (6.111)$$

К примеру, $\text{НОД}(F_{12}, F_{18}) = \text{НОД}(144, 2584) = 8 = F_6$.

Теперь можно доказать обращение свойства (6.110): если $n > 2$ и если F_m кратно F_n, то m кратно n. Действительно, если $F_n \backslash F_m$, то $F_n \backslash \text{НОД}(F_m, F_n) = F_{\text{НОД}(m,n)} \leqslant F_n$. А это возможно только тогда, когда $F_{\text{НОД}(m,n)} = F_n$, и наше допущение о том, что $n > 2$ приводит к необходимости того, что $\text{НОД}(m, n) = n$. Следовательно, $n \backslash m$.

Обобщение подобных понятий делимости было использовано Юрием Матиясевичем в его знаменитом доказательстве [214] того, что не существует алгоритма, позволяющего выяснить, разрешимо ли в целых числах заданное полиномиальное уравнение относительно многих неизвестных с целыми коэффициентами. Одна из лемм Матиясевича утверждает, что если $n > 2$, то число Фибоначчи F_m кратно F_n^2 тогда и только тогда, когда m кратно nF_n.

„10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и с целыми рациональными коэффициентами; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.“ — [246, с. 141].*

Докажем это, рассмотрев последовательность $\langle F_{kn} \bmod F_n^2 \rangle$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ и выяснив, когда же $F_{kn} \bmod F_n^2 = 0$. (Мы знаем, что m должно иметь вид kn, если $F_m \bmod F_n = 0$.) Вначале имеем $F_n \bmod F_n^2 = F_n$, что не равно нулю. Затем, согласно (6.108), получаем

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \equiv 2F_n F_{n+1} \pmod{F_n^2},$$

поскольку $F_{n+1} \equiv F_{n-1} \pmod{F_n}$. Аналогично

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \equiv F_{n+1}^2 \pmod{F_n^2}.$$

Это сравнение позволяет вычислить

$$\begin{aligned} F_{3n} &= F_{2n+1}F_n + F_{2n}F_{n-1} \\ &\equiv F_{n+1}^2F_n + (2F_nF_{n+1})F_{n+1} = 3F_{n+1}^2F_n \pmod{F_n^2}, \\ F_{3n+1} &= F_{2n+1}F_{n+1} + F_{2n}F_n \\ &\equiv F_{n+1}^3 + (2F_nF_{n+1})F_n \equiv F_{n+1}^3 \pmod{F_n^2}. \end{aligned}$$

И вообще, индукцией по k устанавливается, что

$$F_{kn} \equiv kF_nF_{n+1}^{k-1} \quad \text{и} \quad F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \pmod{F_n^2}.$$

А поскольку F_{n+1} взаимно просто с F_n, то

$$\begin{aligned} F_{kn} \equiv 0 \pmod{F_n^2} &\iff kF_n \equiv 0 \pmod{F_n^2} \\ &\iff k \equiv 0 \pmod{F_n} \end{aligned}$$

и лемма Матиясевича доказана.

Одно из наиболее важных качеств чисел Фибоначчи — это особый способ представления целых чисел с их использованием. Будем писать

$$j \gg k \qquad \iff \qquad j \geqslant k+2. \tag{6.112}$$

Тогда *каждое целое положительное число имеет единственное представление вида*

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}, \qquad k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_r \gg 0. \tag{6.113}$$

(Это „теорема Цеккендорфа“ [188], [342].) К примеру, представление одного миллиона оказывается таким:

$$\begin{aligned} 1000000 &= 832040 + 121393 + 46368 + 144 + 55 \\ &= F_{30} + F_{26} + F_{24} + F_{12} + F_{10}. \end{aligned}$$

Подобное представление всегда может быть найдено с помощью „жадного“ подхода: в качестве F_{k_1} выбирается наибольшее число Фибоначчи $\leqslant n$, затем в качестве F_{k_2} выбирается наибольшее число $\leqslant n - F_{k_1}$, и т. д. (Более точно, предположим, что $F_k \leqslant n < F_{k+1}$; тогда $0 \leqslant n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Если n — одно из чисел Фибоначчи, то представление (6.113) справедливо при $r = 1$ и $k_1 = k$. В противном случае индукция по n показывает, что $n - F_k$ имеет фибоначчиево представление $F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$, и представление (6.113) справедливо, если положить $k_1 = k$, ибо неравенства $F_{k_2} \leqslant n - F_k < F_{k-1}$ означают, что $k \gg k_2$.) И обратно, всякое представление вида (6.113) означает, что

$$F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1},$$

поскольку наибольшим возможным значением $F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$, когда $k \gg k_2 \gg \cdots \gg k_r \gg 0$, является

$$F_{k-2} + F_{k-4} + \cdots + F_{k \bmod 2+2} = F_{k-1} - 1, \quad \text{если } k \geqslant 2. \tag{6.114}$$

(Эта формула легко доказывается индукцией по k — ее левая часть обращается в нуль при k равном 2 или 3.) Поэтому k_1 — это как раз описанная выше, „жадно“ выбранная величина, и данное представление должно быть единственным.

Любая система однозначного представления чисел является системой счисления — следовательно, теорема Цеккендорфа приводит к *фибоначчиевой системе счисления.* Всякое целое неотрицательное число можно представить в виде последовательности нулей и единиц, записав

$$n = (b_m b_{m-1} \ldots b_2)_F \iff n = \sum_{k=2}^{m} b_k F_k\,. \qquad (6.115)$$

Эта система счисления отчасти напоминает двоичное (с основанием 2) представление, за исключением того, что в ней никогда не встречаются две 1 подряд. Вот, к примеру, числа от 1 до 20, представленные по Фибоначчи:

$1 = (000001)_F$	$6 = (001001)_F$	$11 = (010100)_F$	$16 = (100100)_F$
$2 = (000010)_F$	$7 = (001010)_F$	$12 = (010101)_F$	$17 = (100101)_F$
$3 = (000100)_F$	$8 = (010000)_F$	$13 = (100000)_F$	$18 = (101000)_F$
$4 = (000101)_F$	$9 = (010001)_F$	$14 = (100001)_F$	$19 = (101001)_F$
$5 = (001000)_F$	$10 = (010010)_F$	$15 = (100010)_F$	$20 = (101010)_F$

Фибоначчиево представление одного миллиона, указанное минутой ранее, может быть сопоставлено с его двоичным представлением $2^{19} + 2^{18} + 2^{17} + 2^{16} + 2^{14} + 2^9 + 2^6$:

$$\begin{aligned}(1000000)_{10} &= (10001010000000000010100000000)_F \\ &= (11110100001001000000)_2\,.\end{aligned}$$

Фибоначчиево представление требует несколько больше битов, поскольку не допускаются две 1 подряд — но в остальном оба представления аналогичны.

При прибавлении 1 в фибоначчиевой системе счисления возникают два случая. В случае, если „разряд единиц“ есть 0, он заменяется на 1 — тем самым прибавляется $F_2 = 1$, ибо разряд единиц связан с F_2. В противном случае двумя наименее значащими цифрами будут 01, и они заменяются на 10 (тем самым прибавляя $F_3 - F_2 = 1$). Наконец, мы должны „перенести“ 1 столько раз, сколько это необходимо, заменяя набор цифр '011' на '100' до тех пор, пока в строке цифр имеются две рядом стоящие 1. (Подобное правило переноса эквивалентно замене $F_{m+1} + F_m$ на F_{m+2}.) Так, для того чтобы перейти от $5 = (1000)_F$ к $6 = (1001)_F$ или от $6 = (1001)_F$ к $7 = (1010)_F$, переносов не требуется, но для того чтобы перейти от $7 = (1010)_F$ к $8 = (10000)_F$, необходимо выполнить перенос дважды.

Несмотря на обилие рассмотренных нами свойств чисел Фибоначчи, мы пока не сталкивались с какой-либо замкнутой формулой для них. И хотя выражения в замкнутой форме ни для

чисел Стирлинга, ни для чисел Эйлера или Бернулли найдены не были, мы все же сумели обнаружить замкнутое выражение $H_n = \left[{n+1 \atop 2}\right]/n!$ для гармонических чисел. А нет ли какой-нибудь связи между F_n и другими известными нам величинами? Можно ли „разрешить" рекуррентность, посредством которой определяются числа F_n?

Ответ утвердительный: действительно, существует простой способ решения этой рекуррентности, если воспользоваться понятием *производящей функции*, вкратце рассмотренной в гл. 5. Образуем бесконечный ряд

„Sit $1 + x + 2xx + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8$ &c Series nata ex divisione Unitatis per Trinomium $1 - x - xx$."
— А. де Муавр [99]

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} F_n z^n . \qquad (6.116)$$

Если мы сможем найти простую формулу для $F(z)$, то появятся шансы установить простую формулу и для его коэффициентов F_n.

„Величины r, s, t, показывающие отношения членов, совпадают с аналогичными величинами в знаменателе дроби. Г-н де Муавр был первым, кто применил это свойство, каким бы очевидным оно ни казалось, к решению задач о бесконечных рядах, решить которые по-другому было бы весьма затруднительно."
— Дж. Стирлинг [286]

В гл. 7 мы полностью сосредоточимся на производящих функциях, но к тому времени, когда мы до них доберемся, полезно будет иметь в запасе этот пример. Степенной ряд $F(z)$ обнаруживает одно замечательное свойство, если посмотреть, что происходит при его умножении на z и на z^2:

$$\begin{aligned} F(z) &= F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + F_4 z^4 + F_5 z^5 + \cdots , \\ zF(z) &= \phantom{F_0 + {}} F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + F_3 z^4 + F_4 z^5 + \cdots , \\ z^2 F(z) &= \phantom{F_0 + F_1 z + {}} F_0 z^2 + F_1 z^3 + F_2 z^4 + F_3 z^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Если теперь вычесть два последних равенства из первого, то члены, включающие z^2, z^3 и бóльшие степени z, пропадут — в силу фибоначчиевой рекуррентности. К тому же постоянный член F_0 на самом деле никогда не оказывается первым, поскольку $F_0 = 0$. Следовательно, все, что остается после вычитания,— это $(F_1 - F_0)z$, т. е. просто z. Другими словами,

$$F(z) - zF(z) - z^2F(z) = z ,$$

и решение $F(z)$ получается в виде компактной формулы

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} . \qquad (6.117)$$

Итак, вся информация, содержащаяся в последовательности Фибоначчи, свернута в несложное (хотя и непонятное) выражение $z/(1 - z - z^2)$. Хотите — верьте, хотите — нет, но это прогресс, поскольку теперь знаменатель можно разложить на множители, а затем воспользоваться элементарными дробями для получения формулы, которую легко разложить в степенной ряд. А коэффициенты этого степенного ряда дадут выражение для чисел Фибоначчи в замкнутой форме.

Быть может, план действия, который мы только набросали, будет понятнее, если подойти к нему с другого конца. Если имеется какая-нибудь более простая производящая функция — скажем, $1/(1-\alpha z)$, где α — некоторая константа, то нам известны коэффициенты при всех степенях z, поскольку

$$\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots .$$

Аналогично, если имеется некоторая производящая функция вида $A/(1-\alpha z) + B/(1-\beta z)$, то коэффициенты также легко вычисляются, ибо

$$\begin{aligned}\frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} &= A\sum_{n\geqslant 0}(\alpha z)^n + B\sum_{n\geqslant 0}(\beta z)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(A\alpha^n + B\beta^n)z^n .\end{aligned} \tag{6.118}$$

Следовательно, все, что от нас требуется,— это найти константы A, B, α и β, такие, что

$$\frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} = \frac{z}{1-z-z^2},$$

и тогда будет получено выражение в замкнутой форме $A\alpha^n + B\beta^n$ для коэффициента F_n при z^n в разложении $F(z)$. Левая часть может быть переписана как

$$\frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} = \frac{A - A\beta z + B - B\alpha z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)},$$

так что интересующие нас четыре константы являются решениями двух полиномиальных уравнений:

$$(1-\alpha z)(1-\beta z) = 1 - z - z^2; \tag{6.119}$$

$$(A+B) - (A\beta + B\alpha)z = z. \tag{6.120}$$

Мы хотим представить знаменатель $F(z)$ в форме произведения $(1-\alpha z)(1-\beta z)$ — тогда появится возможность выразить $F(z)$ в виде суммы двух дробей, в которых сомножители $(1-\alpha z)$ и $(1-\beta z)$ удачно отделены друг от друга.

Обратите внимание, что сомножители в знаменателе уравнения (6.119) записаны в виде $(1-\alpha z)(1-\beta z)$, а не в более привычной форме $c(z-\rho_1)(z-\rho_2)$, где ρ_1 и ρ_2 — некоторые корни. Дело в том, что запись $(1-\alpha z)(1-\beta z)$ приводит к более привлекательным разложениям в степенные ряды.

Величины α и β могут быть найдены несколькими способами, в одном из которых используется тонкая уловка. Введем новую переменную w и попробуем найти разложение вида

Уж так повелось: авторы не могут обойтись без уловок.

$$w^2 - wz - z^2 = (w-\alpha z)(w-\beta z).$$

Тогда мы сможем просто положить $w = 1$ и получить разложение $1-z-z^2$. Корни уравнения $w^2-wz-z^2=0$ могут быть найдены по формуле решения квадратного уравнения — они равны

$$\frac{z \pm \sqrt{z^2+4z^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} z .$$

Следовательно,

$$w^2 - wz - z^2 = \left(w - \frac{1+\sqrt{5}}{2} z\right)\left(w - \frac{1-\sqrt{5}}{2} z\right),$$

и искомые константы α и β получены.

В соответствии с обширными эмпирическими наблюдениями европейских исследователей [61] отношение роста человека к высоте расположения пупка составляет примерно 1.618.

Число $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$ играет важную роль во многих разделах математики, равно как и в мире искусств, где с античных времен оно рассматривалось как эстетически самое благоприятное отношение. Поэтому оно имеет специальное название — *отношение золотого сечения* и обозначается греческой буквой ϕ в честь Фидия, который, как утверждается, сознательно использовал его в своих скульптурах. Другой корень, $(1-\sqrt{5})/2 = -1/\phi \approx -.61803$, обладает многими свойствами числа ϕ, поэтому и он имеет специальное обозначение $\hat{\phi}$ — „фи с крышкой“. А оба эти числа являются корнями уравнения $w^2 - w - 1 = 0$, так что

$$\phi^2 = \phi + 1, \qquad \hat{\phi}^2 = \hat{\phi} + 1. \tag{6.121}$$

(Ниже будет еще о числах ϕ и $\hat{\phi}$.)

Итак, найдены константы $\alpha = \phi$ и $\beta = \hat{\phi}$, необходимые в (6.119); теперь нужно лишь установить A и B в (6.120). Подстановка $z = 0$ в это уравнение показывает, что $B = -A$, так что (6.120) сводится к уравнению

$$-\hat{\phi}A + \phi A = 1,$$

решением которого является $A = 1/(\phi - \hat{\phi}) = 1/\sqrt{5}$. Следовательно, разложение (6.117) на элементарные дроби имеет вид

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right). \tag{6.122}$$

Неплохо: $F(z)$ получено в той форме, что и хотелось. А разложение дробей в степенные ряды, как в (6.118), доставляет выражение в замкнутой форме для коэффициента при z^n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n). \tag{6.123}$$

(Эта формула впервые опубликована Даниэлем Бернулли в 1728 г., но о ней позабыли до 1843 г., пока она не была вновь открыта Жаком Бине [25].)

Прежде чем замереть в восторге от нашего вывода, следует проверить его правильность. При $n = 0$ данная формула правильно дает $F_0 = 0$, а при $n = 1$ она дает $F_1 = (\phi - \hat{\phi})/\sqrt{5}$, что,

действительно, равно 1. При больших n уравнения (6.121) показывают, что числа, определенные формулой (6.123), удовлетворяют фибоначчиевой рекуррентности, так что по индукции они должны быть числами Фибоначчи. (Мы могли бы также разложить ϕ^n и $\hat{\phi}^n$ в соответствии с биномиальной теоремой и избавиться от различных степеней $\sqrt{5}$, но это приводит к изрядной путанице. Смысл выражения в замкнутой форме не обязательно состоит в том, чтобы обеспечить нас методом быстрого вычисления, а скорее в том, чтобы указать, как F_n связано с другими математическими величинами.)

Проявив некоторую смекалку, можно было бы просто угадать формулу (6.123) и доказать ее по индукции. Однако метод производящих функций является действенным способом именно ее нахождения — в гл. 7 мы увидим, что тот же самый метод приводит к решению куда более трудных рекуррентных соотношений. Между прочим, мы нисколько не беспокоились, сходятся ли бесконечные суммы в нашем выводе формулы (6.123),— оказывается, что большинство операций с коэффициентами степенного ряда может быть строго обосновано независимо от того, сходятся или нет данные суммы в действительности [336]. Тем не менее, скептически настроенные читатели, подозрительно относящиеся к действиям с бесконечными суммами, могут найти успокоение в том факте, что после того, как уравнение (6.123) найдено с использованием бесконечного ряда, оно может быть проверено путем надежного доказательства по индукции.

Одним из интересных следствий формулы (6.123) является то, что целое число F_n чрезвычайно близко к иррациональному числу $\phi^n/\sqrt{5}$ при большом n. (Поскольку $\hat{\phi}$ по абсолютной величине меньше 1, то величина $\hat{\phi}^n$ убывает экспоненциально и ее влияние почти несущественно.) К примеру, числа $F_{10} = 55$ и $F_{11} = 89$ очень близки к

$$\frac{\phi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55.00364 \quad \text{и} \quad \frac{\phi^{11}}{\sqrt{5}} \approx 88.99775\,.$$

Этим наблюдением можно воспользоваться для вывода другого выражения в замкнутой форме,

$$\begin{aligned} F_n &= \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{округленное до ближайшего целого,} \end{aligned} \tag{6.124}$$

ибо $|\hat{\phi}^n/\sqrt{5}\,| < \frac{1}{2}$ при любом $n \geqslant 0$. Если n четно, то F_n немного меньше, чем $\phi^n/\sqrt{5}$; в противном случае оно немного больше.

Соотношение Кассини (6.103) может быть переписано как

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}\,F_n}\,.$$

При большом n величина $1/F_{n-1}F_n$ весьма мала, так что отношение F_{n+1}/F_n должно быть почти тем же самым, что и отношение F_n/F_{n-1}, а (6.124) указывает на то, что это отношение приближает ϕ. И в самом деле,

$$F_{n+1} = \phi F_n + \hat{\phi}^n. \qquad (6.125)$$

(Это соотношение непосредственно проверяется при $n = 0$ и $n = 1$, а при $n > 1$ доказывается по индукции; оно может быть также доказано непосредственно подстановкой в формулу (6.123).) Отношение F_{n+1}/F_n весьма близко к числу ϕ, которое оно приближает попеременно то с избытком, то с недостатком.

Кроме того, в силу простого совпадения, число ϕ довольно близко к числу километров в одной миле. (Точное число равно 1.609344, поскольку один дюйм равен в точности 2.54 сантиметрам.) Это дает нам удобный способ перевода в уме километров в мили и обратно, ибо расстояние в F_{n+1} километров равно (довольно близко) расстоянию в F_n миль.

Если США когда-нибудь перейдут на метрическую систему, то наши знаки ограничения скорости изменятся с 55 миль/час на 89 км/час. А может быть, дорожная полиция будет великодушна и разрешит даже 90.

Предположим, что мы хотим перевести некоторое число (не являющееся числом Фибоначчи) километров в мили — сколько будет 30 км по-американски? Это делается легко: мы просто прибегаем к фибоначчиевой системе счисления и переводим в уме число 30 в его фибоначчиевое представление $21+8+1$ с помощью объясненного выше „жадного“ подхода. Теперь можно сдвинуть каждое число на одну позицию вправо, получая $13+5+1$. (Первоначальная '1' была числом F_2, поскольку $k_r \gg 0$ в (6.113); новая же '1' — это F_1.) Сдвиг вправо практически равносилен делению на ϕ. Следовательно, наша оценка — 19 миль. (Это довольно точная оценка: правильный ответ — около 18.64 миль.) Аналогично, для перехода от миль к километрам можно осуществить сдвиг на одну позицию влево: 30 миль — это примерно $34+13+2=49$ километров. (Это уже не столь точная оценка: правильное число — около 48.28.)

Оказывается, что подобное правило „сдвига вправо“ дает правильно округленное число миль в n километрах при всех $n \leqslant 100$, за исключением случаев $n = 4$, 12, 54, 62, 75, 83, 91, 96 и 99, когда оно отличается меньше чем на 2/3 мили. А правило „сдвига влево“ дает либо правильно округленное число километров в n милях, либо на 1 км больше, при всех $n \leqslant 113$. (Единственный, действительно нарушающий данное правило случай — это $n = 4$, когда отдельные ошибки округления для $n = 3+1$ накладываются друг на друга, вместо того чтобы компенсировать друг друга.)

Правило „сдвига вправо“ заменяет n на $f(n/\phi)$, а правило „сдвига влево“ заменяет n на $f(n\phi)$, где $f(x) = \lfloor x + \phi^{-1} \rfloor$.

6.7 КОНТИНУАНТЫ

Числа Фибоначчи обнаруживают важные связи с деревом Штерна—Броко, которое мы изучали в гл. 4, и допускают важные обобщения на последовательность многочленов, которую обстоятельно изучал Эйлер. Эти многочлены называются *континуан-*

тами или K-*многочленами*, поскольку служат основой изучения континуальных (непрерывных) дробей — выражений вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \cfrac{1}{a_7}}}}}}} . \qquad (6.126)$$

K-многочлен $K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит n переменных и определяется рекуррентно следующим образом:

$$\begin{aligned} K_0() &= 1 , \\ K_1(x_1) &= x_1 , \\ K_n(x_1, \ldots, x_n) &= K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n \\ &\quad + K_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}) . \end{aligned} \qquad (6.127)$$

Например, три следующих за $K_1(x_1)$ случая таковы:

$$\begin{aligned} K_2(x_1, x_2) &= x_1x_2 + 1 , \\ K_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3 + x_1 + x_3 , \\ K_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1 . \end{aligned}$$

Отсюда индуктивно легко убедиться, что число членов в K_n равно $(n+1)$-му числу Фибоначчи:

$$K_n(1, 1, \ldots, 1) = F_{n+1} . \qquad (6.128)$$

Если число переменных ясно по смыслу, то вместо 'K_n' можно писать просто 'K' — точно так же, как можно было опускать число параметров, имея дело с гипергеометрическими функциями F из гл. 5. Например, $K(x_1, x_2) = K_2(x_1, x_2) = x_1x_2 + 1$. Конечно же, в формулах типа (6.128) нижний индекс n необходим.

Эйлер подметил, что многочлен $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть получен, если начать с произведения $x_1x_2 \ldots x_n$ и затем вычеркивать соседние пары x_kx_{k+1} всеми возможными способами. Правило Эйлера можно представить графически, образуя всевозможные слова длины n из точек и тире в „азбуке Морзе", где каждая точка дает длину 1, а каждое тире дает длину 2; вот слова длины 4 в азбуке Морзе:

•••• ••– •–• –•• ––

Эти слова из точек и тире соответствуют членам $K(x_1, x_2, x_3, x_4)$: точка означает переменную, которая включена, а тире означает пару переменных, которая исключена. Например, •–• соответствует x_1x_4.

Слово длины n в азбуке Морзе, которое содержит k тире, содержит $n-2k$ точек, а всего $n-k$ знаков. Эти точки и тире могут быть расставлены $\binom{n-k}{k}$ способами; поэтому, если заменить каждую точку на z, а каждое тире — на 1, то получим

$$K_n(z, z, \ldots, z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} z^{n-2k}. \qquad (6.129)$$

Кроме того, известно, что общее число членов в континуанте равно некоторому числу Фибоначчи. Следовательно, установлено тождество

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}. \qquad (6.130)$$

(Выражение в замкнутой форме для (6.129), обобщающее формулу Эйлера—Бине (6.123) для чисел Фибоначчи, приведено в (5.74).)

Связь между K-многочленами и словами в азбуке Морзе показывает, что континуанты обладают зеркальной симметрией:

$$K(x_n, \ldots, x_2, x_1) = K(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (6.131)$$

Поэтому, в дополнение к правосторонней рекуррентности из определения (6.127), они подчиняются рекуррентности, которая пристраивает переменные слева:

$$K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 K_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) + K_{n-2}(x_3, \ldots, x_n). \qquad (6.132)$$

А обе эти рекуррентности являются частными случаями более общего правила:

$$\begin{aligned} &K_{m+n}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\ &\quad = K_m(x_1, \ldots, x_m)\, K_n(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\ &\qquad + K_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1})\, K_{n-1}(x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}). \end{aligned} \qquad (6.133)$$

Это правило легко истолковать, исходя из аналогии с азбукой Морзе: первое произведение $K_m K_n$ дает те члены K_{m+n}, в которых нет тире в позиции $[m, m+1]$, в то время как второе произведение дает те члены, в которых в этой позиции тире присутствует. Если же положить все x равными 1, то данное тождество показывает, что $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n$; таким образом, (6.108) — это частный случай (6.133).

Эйлер [376] обнаружил, что континуанты подчиняются еще более замечательному правилу, которое является обобщением соотношения Кассини:

$$\begin{aligned} &K_{m+n}(x_1, \ldots, x_{m+n})\, K_k(x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}) \\ &\quad = K_{m+k}(x_1, \ldots, x_{m+k})\, K_n(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\ &\qquad + (-1)^k K_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) \\ &\qquad \times K_{n-k-1}(x_{m+k+2}, \ldots, x_{m+n}). \end{aligned} \qquad (6.134)$$

Это правило (доказанное в упр. 29) справедливо тогда, когда индексы при всех K неотрицательны. Так, при $k = 2$, $m = 1$ и $n = 3$ имеем

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4)\, K(x_2, x_3) = K(x_1, x_2, x_3)\, K(x_2, x_3, x_4) + 1 .$$

K-многочлены тесно связаны с алгоритмом Евклида. Предположим, например, что вычисление $\text{НОД}(m, n)$ оканчивается через четыре шага:

$$\begin{aligned}
\text{НОД}(m,n) &= \text{НОД}(n_0, n_1) & n_0 &= m, & n_1 &= n, \\
&= \text{НОД}(n_1, n_2) & n_2 &= n_0 \bmod n_1 &&= n_0 - q_1 n_1 , \\
&= \text{НОД}(n_2, n_3) & n_3 &= n_1 \bmod n_2 &&= n_1 - q_2 n_2 , \\
&= \text{НОД}(n_3, n_4) & n_4 &= n_2 \bmod n_3 &&= n_2 - q_3 n_3 , \\
&= \text{НОД}(n_4, 0) & 0 &= n_3 \bmod n_4 &&= n_3 - q_4 n_4 . \\
&= n_4
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
n_4 &= n_4 &&= K()n_4 , \\
n_3 &= q_4 n_4 &&= K(q_4) n_4 , \\
n_2 &= q_3 n_3 + n_4 &&= K(q_3, q_4) n_4 , \\
n_1 &= q_2 n_2 + n_3 &&= K(q_2, q_3, q_4) n_4 , \\
n_0 &= q_1 n_1 + n_2 &&= K(q_1, q_2, q_3, q_4) n_4 .
\end{aligned}$$

И вообще, если алгоритм Евклида находит наибольший общий делитель d через k шагов после вычисления последовательности частных $q_1, \ldots, q_k$, это означает, что начальными числами были $K(q_1, q_2, \ldots, q_k)d$ и $K(q_2, \ldots, q_k)d$. (Это обстоятельство было замечено еще в начале восемнадцатого века Тома Фанте де Ланьи [183], который, по-видимому, был первым, кто непосредственно рассматривал континуанты. При этом Ланьи отмечал, что последовательные числа Фибоначчи, которые фигурируют в качестве континуантов, когда q принимают свои минимальные значения, являются теми наименьшими числами на входе, при которых алгоритму Евклида требуется некоторое заданное число шагов.)

Кроме того, континуанты тесно связаны с непрерывными дробями, от которых они получили свое название. К примеру,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{K(a_0, a_1, a_2, a_3)}{K(a_1, a_2, a_3)} . \qquad (6.135)$$

Такая же картина наблюдается для непрерывных дробей любой „глубины“. Это легко доказать по индукции; так

$$\frac{K(a_0, a_1, a_2, a_3 + 1/a_4)}{K(a_1, a_2, a_3 + 1/a_4)} = \frac{K(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)}{K(a_1, a_2, a_3, a_4)}$$

в силу соотношения

$$K_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+y) \\ = K_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)+K_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})y\,. \qquad (6.136)$$

(Это соотношение доказано и обобщено в упр. 30.)

Сверх того, континуанты тесно связаны и с деревом Штерна—Броко, которое обсуждалось в гл. 4. Каждый узел этого дерева может быть представлен в виде последовательности L и R, скажем, в виде

$$R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots R^{a_{n-2}}L^{a_{n-1}}\,, \qquad (6.137)$$

где $a_0 \geqslant 0$, $a_1 \geqslant 1$, $a_2 \geqslant 1$, $a_3 \geqslant 1$, ..., $a_{n-2} \geqslant 1$, $a_{n-1} \geqslant 0$, а n — четное. Используя 2×2-матрицы L и R из (4.33), нетрудно доказать по индукции, что матричным эквивалентом (6.137) является

$$\begin{pmatrix} K_{n-2}(a_1,\ldots,a_{n-2}) & K_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}) \\ K_{n-1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2}) & K_n(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}) \end{pmatrix}. \qquad (6.138)$$

(Доказательство этого составляет часть упр. 87.) Например,

$$R^aL^bR^cL^d = \begin{pmatrix} bc+1 & bcd+b+d \\ abc+a+c & abcd+ab+ad+cd+1 \end{pmatrix}.$$

В силу этого можно воспользоваться (4.34), чтобы записать, наконец, выражение в замкнутой форме для дроби из дерева Штерна—Броко, L-и-R-представлением которой является (6.137):

$$f(R^{a_0}\ldots L^{a_{n-1}}) = \frac{K_{n+1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},1)}{K_n(a_1,\ldots,a_{n-1},1)}\,. \qquad (6.139)$$

(Это „теорема Халфена“ [329].) К примеру, чтобы найти дробь для LRRL, полагаем $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1$ и $n=4$; тогда равенство (6.139) дает

$$\frac{K(0,1,2,1,1)}{K(1,2,1,1)} = \frac{K(2,1,1)}{K(1,2,1,1)} = \frac{K(2,2)}{K(3,2)} = \frac{5}{7}\,.$$

(Для поглощения единиц спереди и сзади в списках параметров мы воспользовались правилом $K_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+1) = K_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,1)$ — это правило получается, если подставить $y=1$ в (6.136).)

Сравнение (6.135) и (6.139) показывает, что дробь, соответствующая произвольному узлу (6.137) в дереве Штерна—Броко, допускает представление в виде непрерывной дроби

$$f(R^{a_0}\ldots L^{a_{n-1}}) = a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{1}}}}}\,. \qquad (6.140)$$

Таким образом, можно без проволочек переходить от непрерывных дробей к соответствующим узлам дерева Штерна—Броко. К примеру,

$$f(LRRL) = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}.$$

В гл. 4 мы отмечали, что иррациональные числа определяют бесконечные пути в дереве Штерна—Броко и что они могут быть представлены в виде бесконечной строки букв L и R. Если такой бесконечной строкой для числа α является $R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots$, то ей соответствует непрерывная дробь

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}. \qquad (6.141)$$

Подобная бесконечная непрерывная дробь может быть получена и непосредственно. Пусть $\alpha_0 = \alpha$, а при $k \geqslant 0$ положим

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \qquad \alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}. \qquad (6.142)$$

Числа a_k называются „неполными частными" числа α. Если α — рациональное число, скажем m/n, то этот процесс перебирает находимые с помощью алгоритма Евклида частные и затем останавливается (при $\alpha_{k+1} = \infty$).

Рациональна или иррациональна эйлерова константа γ? Этого никто не знает. Некоторую информацию об этой знаменитой нерешенной проблеме можно получить, поискав число γ в дереве Штерна—Броко: если оно рационально, мы найдем его, а если оно иррационально, то мы найдем все наилучшие рациональные приближения к нему. Непрерывная дробь для числа γ начинается со следующих неполных частных:

А если и знает, то помалкивает.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	0	1	1	2	1	2	1	4	3

Поэтому представление Штерна—Броко для нее начинается с таких букв LRLLRLLRLLLLRRRL... — никакой очевидной закономерности. Вычисления Ричарда Брента [39] показывают, что если

Ну, число γ должно быть иррациональным в силу малоизвестного изречения Эйнштейна: „Всевышний не загромождает мироздание огромными знаменателями".

γ — рациональное число, то его знаменатель должен насчитывать более 10 000 десятичных цифр. Поэтому никто не верит в то, что число γ рационально,— тем не менее до сих пор никто не смог доказать, что оно таковым не является.

Завершим эту главу доказательством одного замечательного тождества, которое связывает воедино многие из подобных понятий. В гл. 3 было введено понятие спектра — спектром числа α называется мультимножество чисел $\lfloor n\alpha \rfloor$, где α — заданное постоянное число. Поэтому бесконечный ряд

$$\sum_{n\geqslant 1} z^{\lfloor n\phi \rfloor} = z + z^3 + z^4 + z^6 + z^8 + z^9 + \cdots$$

может быть назван производящей функцией для спектра числа ϕ, где $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ — отношение золотого сечения. Тождество, которое мы докажем,— открытое в 1976 г. Дж. Л. Дейвисоном [103] — представляет собой бесконечную непрерывную дробь, которая связывает эту производящую функцию с последовательностью Фибоначчи:

$$\cfrac{z^{F_1}}{1+\cfrac{z^{F_2}}{1+\cfrac{z^{F_3}}{1+\cfrac{z^{F_4}}{\ddots}}}} = (1-z)\sum_{n\geqslant 1} z^{\lfloor n\phi \rfloor}. \qquad (6.143)$$

Интересны обе части (6.143), но рассмотрим вначале числа $\lfloor n\phi \rfloor$. Если фибоначчиево представление (6.113) числа n есть $F_{k_1} + \cdots + F_{k_r}$, то ожидается, что $n\phi$ будет приблизительно равным $F_{k_1+1} + \cdots + F_{k_r+1}$ — числу, которое получается, если сдвинуть фибоначчиево представление влево (как при переводе миль в километры). В действительности из (6.125) известно, что

$$n\phi = F_{k_1+1} + \cdots + F_{k_r+1} - \left(\hat{\phi}^{k_1} + \cdots + \hat{\phi}^{k_r}\right).$$

Поскольку $\hat{\phi} = -1/\phi$ и $k_1 \gg \cdots \gg k_r \gg 0$, то

$$\begin{aligned} \left|\hat{\phi}^{k_1} + \cdots + \hat{\phi}^{k_r}\right| &< \phi^{-k_r} + \phi^{-k_r-2} + \phi^{-k_r-4} + \cdots \\ &= \frac{\phi^{-k_r}}{1-\phi^{-2}} = \phi^{1-k_r} \leqslant \phi^{-1} < 1, \end{aligned}$$

и $\hat{\phi}^{k_1} + \cdots + \hat{\phi}^{k_r}$ имеет тот же знак, что и $(-1)^{k_r}$,— рассуждая аналогично. Следовательно,

$$\lfloor n\phi \rfloor = F_{k_1+1} + \cdots + F_{k_r+1} \; - \; \left[k_r(n) \text{ четно}\right]. \qquad (6.144)$$

Условимся называть число n *фибоначчиево-нечетным* (или, для краткости, F-нечетным), если самый младший бит его фибоначчиева представления равен 1 — это все равно, что сказать

$k_r(n) = 2$. В противном случае число n является *фибоначчиево-четным* (F-четным). К примеру, наименьшими F-нечетными числами являются 1, 4, 6, 9, 12, 14, 17 и 19. Если $k_r(n)$ четно, то число $n-1$ является F-четным в силу (6.114); аналогично, если $k_r(n)$ нечетно, то число $n-1$ является F-нечетным. Поэтому

$$k_r(n) \text{ — четное} \quad \Longleftrightarrow \quad n-1 \text{ — F-четное.}$$

Кроме того, если $k_r(n)$ четно, то из (6.144) следует, что $k_r(\lfloor n\phi \rfloor) = 2$; если же $k_r(n)$ нечетно, то (6.144) утверждает, что $k_r(\lfloor n\phi \rfloor) = k_r(n) + 1$. Таким образом, $k_r(\lfloor n\phi \rfloor)$ всегда четно, и доказано, что

$$\lfloor n\phi \rfloor - 1 \text{ всегда F-четное.}$$

Обратно, если m — некоторое F-четное число, то можно провести это вычисление в обратном порядке и найти n, такое, что $m+1 = \lfloor n\phi \rfloor$. (Сперва прибавляется 1 в F-записи, как объяснялось выше. Если переносов не происходит, то число n оказывается равным числу $(m+2)$, сдвинутому вправо; в противном случае число n равно сдвинутому вправо $(m+1)$.) Поэтому сумма в правой части (6.143) может быть записана в виде

$$\sum_{n \geqslant 1} z^{\lfloor n\phi \rfloor} = z \sum_{m \geqslant 0} z^m [m \text{ — F-четное}] . \tag{6.145}$$

А как насчет дроби слева? Перепишем (6.143) так, чтобы данная непрерывная дробь выглядела как (6.141) — с 1 во всех числителях:

$$\cfrac{1}{z^{-F_0} + \cfrac{1}{z^{-F_1} + \cfrac{1}{z^{-F_2} + \cfrac{1}{\ddots}}}} = \frac{1-z}{z} \sum_{n \geqslant 1} z^{\lfloor n\phi \rfloor} . \tag{6.146}$$

(Это весьма тонкое преобразование! Числитель и знаменатель исходной дроби, имеющей z^{F_n} в числителе, нужно поделить на $z^{F_{n-1}}$.) Если оборвать эту новую непрерывную дробь на элементе $1/z^{-F_n}$, то ее величина будет равна отношению континуантов

$$\frac{K_{n+2}(0, z^{-F_0}, z^{-F_1}, \ldots, z^{-F_n})}{K_{n+1}(z^{-F_0}, z^{-F_1}, \ldots, z^{-F_n})} = \frac{K_n(z^{-F_1}, \ldots, z^{-F_n})}{K_{n+1}(z^{-F_0}, z^{-F_1}, \ldots, z^{-F_n})} ,$$

как и в (6.135). Вначале рассмотрим знаменатель, в надежде на его податливость. Полагая $Q_n = K_{n+1}(z^{-F_0}, \ldots, z^{-F_n})$, находим, что $Q_0 = 1$, $Q_1 = 1 + z^{-1}$, $Q_2 = 1 + z^{-1} + z^{-2}$, $Q_3 = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$, и вообще все продолжается как нельзя лучше и получается геометрический ряд

$$Q_n = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(F_{n+2}-1)} .$$

Соответствующий этому знаменателю числитель $P_n = K_n(z^{-F_1}, \ldots, z^{-F_n})$ оказывается подобным Q_n, но с меньшим числом членов. К примеру, имеем

$$P_5 = z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-7} + z^{-9} + z^{-10} + z^{-12}$$

в сравнении с $Q_5 = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-12}$. Более внимательное рассмотрение выявляет закономерность, определяющую, какие члены присутствуют. Вот она:

$$P_5 = \frac{1 + z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + z^8 + z^{10} + z^{11}}{z^{12}}$$
$$= z^{-12} \sum_{m=0}^{12} z^m [m \text{ — F-четное}];$$

и вообще можно доказать по индукции, что

$$P_n = z^{1-F_{n+2}} \sum_{m=0}^{F_{n+2}-1} z^m [m \text{ — F-четное}].$$

Поэтому

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sum_{m=0}^{F_{n+2}-1} z^m [m \text{ — F-четное}]}{\sum_{m=0}^{F_{n+2}-1} z^m}.$$

Взяв предел при $n \to \infty$, получаем (6.146) в силу (6.145).

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Каковы $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$ перестановок множества $\{1, 2, 3, 4\}$, содержащих ровно два цикла? (Используйте обычную запись перестановки, наподобие 2314, а не разложение в циклы, как в (6.4).)

2 Всего имеется m^n функций, отображающих множество из n элементов во множество из m элементов. Сколько из них принимают ровно k различных значений?

3 Те, кто складывал стопку карт в „реальной действительности“, знают, что благоразумно это делать с небольшим запасом прочности, с тем чтобы стопка карт не опрокинулась при легком дуновении. Предположим, что центр тяжести верхних k карт должен находиться по меньшей мере в ϵ единицах от края $(k+1)$-й карты. (Таким образом, первая карта, например, может выступать над второй самое большее на $1 - \epsilon$ единиц.) Можем ли мы получить сколь угодно большой выступ, если располагаем достаточным числом карт?

4 Выразите $1/1 + 1/3 + \cdots + 1/(2n+1)$ через гармонические числа.

5 Объясните, как получить рекуррентность (6.75) из определения (6.74) величины $U_n(x,y)$, и решите эту рекуррентность.

6 Некий исследователь оставил на острове пару крольчат. Если крольчата становятся половозрелыми через месяц и если каждая пара половозрелых кроликов производит на свет пару крольчат раз в месяц, то сколько пар кроликов будет в наличии через n месяцев? (Через два месяца будет две пары, одна из которых — новорожденная.) Установите связь между этой задачей и „родословным деревом пчел“ в тексте главы.

Если гармонические числа — червячные, то числа Фибоначчи следует называть кроличьими.

7 Покажите, что тождество Кассини (6.103) является (a) частным случаем соотношения (6.108) и (b) частным случаем правила (6.134).

8 Воспользуйтесь фибоначчиевой системой счисления для перевода 65 миль/час в приблизительное число км/час.

9 Сколько примерно квадратных километров в 8 квадратных милях?

10 Каково представление ϕ в виде непрерывной дроби?

Обязательные упражнения

11 Чему равна $\sum_k (-1)^k \left[{n \atop k}\right]$ — сумма знакочередующихся чисел ряда треугольника Стирлинга для числа циклов, если n — целое неотрицательно число?

12 Докажите, что числа Стирлинга обладают правилом обращения, аналогичным правилу (5.48):

$$g(n) = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} (-1)^k f(k) \iff f(n) = \sum_k \left[{n \atop k}\right] (-1)^k g(k)\,.$$

13 О дифференциальных операторах $D = \frac{d}{dz}$ и $\vartheta = zD$ шла речь в гл. 2 и 5. Имеем

$$\vartheta^2 = z^2D^2 + zD\,,$$

поскольку $\vartheta^2 f(z) = \vartheta z f'(z) = z\frac{d}{dz} z f'(z) = z^2 f''(z) + z f'(z)$, что равносильно $(z^2D^2 + zD)f(z)$. Точно так же может быть показано, что $\vartheta^3 = z^3D^3 + 3z^2D^2 + zD$. Докажите, что при любом $n \geqslant 0$ имеют место общие формулы

$$\vartheta^n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} z^k D^k\,,$$

$$z^n D^n = \sum_k \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k} \vartheta^k\,.$$

(Эти формулы могут быть использованы для перехода от дифференциального выражения $\sum_k \alpha_k z^k f^{(k)}(z)$ к выражению вида $\sum_k \beta_k \vartheta^k f(z)$, как это делалось в (5.109).)

14 Докажите „степенное“ тождество (6.37) для чисел Эйлера.

15 Докажите эйлерово тождество (6.39), взяв m-ю разность функции (6.37).

16 Каково общее решение двойной рекуррентности

$$\begin{aligned} A_{n,0} &= a_n\,[n\geqslant 0]\,; \quad A_{0,k} = 0\,, && \text{если } k>0\,, \\ A_{n,k} &= kA_{n-1,k} + A_{n-1,k-1}\,, && \text{целые } k,n, \end{aligned}$$

когда k и n пробегают множество *всех* целых чисел?

17 Решите следующие рекуррентности, считая, что $\left|{n \atop k}\right|$ есть нуль при $n<0$ или $k<0$:

a $$\left|{n \atop k}\right| = \left|{n-1 \atop k}\right| + n\left|{n-1 \atop k-1}\right| + [n=k=0] \qquad \text{при } n,k\geqslant 0.$$

b $$\left|{n \atop k}\right| = (n-k)\left|{n-1 \atop k}\right| + \left|{n-1 \atop k-1}\right| + [n=k=0] \qquad \text{при } n,k\geqslant 0.$$

c $$\left|{n \atop k}\right| = k\left|{n-1 \atop k}\right| + k\left|{n-1 \atop k-1}\right| + [n=k=0] \qquad \text{при } n,k\geqslant 0.$$

18 Докажите, что многочлены Стирлинга удовлетворяют соотношению

$$(x+1)\,\sigma_n(x+1) = (x-n)\,\sigma_n(x) + x\sigma_{n-1}(x)\,.$$

19 Докажите, что обобщенные числа Стирлинга удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{{x+k \atop x}\right\} \left[{x \atop x-n+k}\right] (-1)^k \Big/ \binom{x+k}{n+1} = 0, \quad \text{целое } n>0;$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left[{x+k \atop x}\right] \left\{{x \atop x-n+k}\right\} (-1)^k \Big/ \binom{x+k}{n+1} = 0, \quad \text{целое } n>0.$$

20 Выразите $\sum_{k=1}^{n} H_k^{(2)}$ в замкнутой форме.

21 Покажите, что если $H_n = a_n/b_n$, где a_n и b_n — целые, то знаменатель b_n кратен $2^{\lfloor \lg n \rfloor}$. *Указание:* рассмотрите число $2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} H_n - \frac{1}{2}$.

22 Докажите, что бесконечная сумма

$$\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right)$$

сходится при любом комплексном числе z, кроме случаев, когда z — отрицательное целое, и покажите, что она равна H_z, когда z — неотрицательное целое число. (Тем самым эту формулу можно использовать для определения гармонических чисел H_z при комплексном z.)

23 Коэффициенты разложения $z/(e^z - 1)$ по степеням z задаются равенством (6.81). А каковы коэффициенты разложения $z/(e^z + 1)$? *Указание:* рассмотрите тождество $(e^z+1)(e^z-1) = e^{2z} - 1$.

24 Докажите, что тангенциальное число T_{2n+1} кратно 2^n. *Указание:* докажите, что все коэффициенты $T_{2n}(x)$ и $T_{2n+1}(x)$ кратны 2^n.

25 Равенство (6.57) показывает, что в конце концов червяк достигает конца резинки в некоторый момент времени N. Поэтому сначала должен наступить такой момент времени n, когда он будет ближе к концу резинки по истечении n минут, чем он был по истечении $n-1$ минут. Покажите, что $n < \frac{1}{2}N$.

26 Воспользуйтесь правилом суммирования по частям для вычисления суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} H_k/k$. *Указание:* рассмотрите, кроме того, похожую сумму $\sum_{k=1}^{n} H_{k-1}/k$.

27 Докажите НОД-правило (6.111) для чисел Фибоначчи.

28 *Числа Люка* L_n определяются как $F_{n+1}+F_{n-1}$. Таким образом, согласно (6.109), имеем $F_{2n} = F_n L_n$. Вот таблица нескольких их первых значений:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521

a Воспользуйтесь репертуарным методом, чтобы показать, что решение Q_n обобщенной рекуррентности

$$Q_0 = \alpha, \quad Q_1 = \beta, \quad Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n > 1,$$

может быть выражено через F_n и L_n.

b Выразите L_n через ϕ и $\hat{\phi}$ в замкнутой форме.

29 Докажите тождество Эйлера для континуантов — равенство (6.134).

30 Обобщите (6.136) с тем, чтобы найти выражение для континуанта с приращением $K(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m + y, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ при $1 \leqslant m \leqslant n$.

Домашние задания

31 Найдите выражение в замкнутой форме для коэффициентов $\left|{n \atop k}\right|$ в представлении возрастающих степеней через убывающие:

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left|{n \atop k}\right| x^{\underline{k}}, \qquad \text{целое } n \geqslant 0.$$

(К примеру, $x^{\overline{4}} = x^{\underline{4}} + 12x^{\underline{3}} + 36x^{\underline{2}} + 24x^{\underline{1}}$, следовательно $\left|{4 \atop 2}\right| = 36$.)

32 В гл. 5 мы получили формулы

$$\sum_{k\leqslant m}\binom{n+k}{k}=\binom{n+m+1}{m} \quad \text{и} \quad \sum_{0\leqslant k\leqslant m}\binom{k}{n}=\binom{m+1}{n+1},$$

развертывая рекуррентность $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ двумя способами. А какие получатся тождества при развертывании аналогичной рекуррентности ${n \brace k}=k{n-1 \brace k}+{n-1 \brace k-1}$?

33 В табл. 294 приведены величины ${n \brack 2}$ и ${n \brace 2}$. Как выглядят выражения в замкнутой форме (не включающие в себя чисел Стирлинга) для последующих величин ${n \brack 3}$ и ${n \brace 3}$?

34 Чему равны $\left\langle {-1 \atop k} \right\rangle$ и $\left\langle {-2 \atop k} \right\rangle$, если считать, что основное рекуррентное соотношение (6.35) справедливо при любых целых k и n, и если $\left\langle {n \atop k} \right\rangle=0$ при любом $k<0$?

35 Докажите, что при всяком $\epsilon>0$ существует целое $n>1$ (зависящее от ϵ), такое, что $H_n \bmod 1<\epsilon$.

Нашим студентам задача про кирпичи известна по Сборнику задач по теоретической механике И. В. Мещерского, 1-е издание которого вышло в 1914 г. — Перев.

36 Можно ли сложить штабель из n кирпичей таким образом, чтобы самый верхний кирпич полностью выступал над самым нижним кирпичом; при этом человек, вес которого равен весу 100 кирпичей, мог бы балансировать на середине верхнего кирпича, не обрушивая весь штабель?

37 Выразите $\sum_{k=1}^{mn}(k \bmod m)/k(k+1)$ через гармонические числа, считая, что m и n — целые положительные числа. Какова предельная величина данной суммы при $n\to\infty$?

38 Вычислите неопределенную сумму $\sum\binom{r}{k}(-1)^k H_k\,\delta k$.

39 Выразите сумму $\sum_{k=1}^{n}H_k^2$ через n и H_n.

Ага! То были простые года.

40 Докажите, что 1979 делит числитель суммы $\sum_{k=1}^{1319}(-1)^{k-1}/k$, и укажите аналогичную сумму для 1987. *Указание:* воспользуйтесь уловкой Гаусса для получения суммы дробей, числители которых равны 1979; см. также упр. 4.

41 Вычислите сумму

$$\sum_{k}\binom{\lfloor(n+k)/2\rfloor}{k}$$

в замкнутой форме, если n — целое (возможно, отрицательное) число.

42 Если S — некоторое множество целых чисел, то пусть $S+1$ будет „сдвинутым“ множеством $\{x+1 \mid x\in S\}$. Сколько подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n\}$ обладают тем свойством, что $S\cup(S+1)=\{1,2,\ldots,n+1\}$?

43 Докажите, что бесконечная сумма

$$\begin{aligned} &.1\\ +&.01\\ +&.002\\ +&.0003\\ +&.00005\\ +&.000008\\ +&.0000013\\ &\vdots \end{aligned}$$

сходится к рациональному числу.

44 Обоснуйте обращение тождества Кассини (6.106): если k и m — целые числа, такие, что $|m^2 - km - k^2| = 1$, то существует целое n, такое, что $k = \pm F_n$ и $m = \pm F_{n+1}$.

45 Воспользуйтесь репертуарным методом для решения обобщенной рекуррентности

$$X_0 = \alpha\,, \qquad X_1 = \beta\,, \qquad X_n = X_{n-1} + X_{n-2} + \gamma n + \delta\,.$$

46 Чему равны $\cos 36°$ и $\cos 72°$?

47 Покажите, что

$$2^{n-1} F_n = \sum_k \binom{n}{2k+1} 5^k\,,$$

и воспользуйтесь этим соотношением для установления величин $F_p \bmod p$ и $F_{p+1} \bmod p$ при простом p.

48 Докажите, что нулевые параметры K-многочленов могут быть удалены путем стягивания их соседей:

$$\begin{aligned} &K_n(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)\\ &\quad = K_{n-2}(x_1, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1} + x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 1 < m < n. \end{aligned}$$

49 Укажите представление числа $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-\lfloor n\phi \rfloor}$ в виде непрерывной дроби.

50 Определим функцию $f(n)$ при любом целом положительном n рекуррентно:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1\,,\\ f(2n) &= f(n)\,,\\ f(2n+1) &= f(n) + f(n+1)\,. \end{aligned}$$

a При каких n значение $f(n)$ четное?

b Покажите, что $f(n)$ может быть выражена через континуанты.

Контрольные работы

51 Пусть p — простое число.

a Докажите, что ${p \brace k} \equiv {p \brack k} \equiv 0 \pmod p$ при $1 < k < p$.

b Докажите, что ${p-1 \brack k} \equiv 1 \pmod p$ при $1 \leqslant k < p$.

c Докажите, что ${2p-2 \brace p} \equiv {2p-2 \brack p} \equiv 0 \pmod p$ при $p > 2$.

d Докажите, что если $p > 3$, то ${p \brack 2} \equiv 0 \pmod{p^2}$. *Указание:* рассмотрите $p^{\underline{p}}$.

52 Пусть число H_n записано в виде несократимой дроби a_n/b_n.

a Докажите, что $p \backslash b_n \iff p \nmid a_{\lfloor n/p \rfloor}$, если p — простое.

b Найдите все $n > 0$, такие, что a_n делится на 5.

53 Выразите в замкнутой форме сумму $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}^{-1}(-1)^k H_k$ при $0 \leqslant m \leqslant n$. *Указание:* такая сумма, без множителя H_k, содержится в упр. 5.42.

54 Пусть $n > 0$. Цель этого упражнения — показать, что знаменатель числа B_{2n} является произведением всех простых p, таких, что $(p-1)\backslash(2n)$.

a Покажите, что $S_m(p) + [(p-1)\backslash m]$ кратно p, когда p — простое и $m > 0$.

b Воспользуйтесь результатом части (a), чтобы показать, что

$$B_{2n} + \sum_{p\ \text{простое}} \frac{[(p-1)\backslash(2n)]}{p} = I_{2n}$$

является целым числом.

Указание: достаточно доказать, что если p — некоторое простое число, то знаменатель дроби $B_{2n} + [(p-1)\backslash(2n)]/p$ не делится на p.

c Докажите, что знаменатель числа B_{2n} всегда является нечетным кратным шести и что он равняется 6 для бесконечно многих n.

55 Выведите (6.70) в качестве следствия некоторого более общего тождества, вычисляя сумму

$$\sum_{0 \leqslant k < n} \binom{k}{m}\binom{x+k}{k}$$

и дифференцируя затем по x.

56 Вычислите $\sum_{k \neq m} \binom{n}{k}(-1)^k k^{n+1}/(k-m)$ в замкнутой форме как функцию целых чисел m и n. (Это сумма по всем целым k, за исключением $k = m$.)

57 „Обернутые биномиальные коэффициенты порядка 5" определяются как

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{(k-1) \bmod 5}\!\right), \qquad n > 0,$$

и $\left(\!\left({0 \atop k}\right)\!\right) = [k=0]$. Пусть Q_n — разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел в n-м ряду:

$$Q_n = \max_{0 \leqslant k < 5} \left(\!\!\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right)\!\!\right) - \min_{0 \leqslant k < 5} \left(\!\!\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right)\!\!\right).$$

Установите и обоснуйте связь между числами Q_n и числами Фибоначчи.

58 Выразите в замкнутой форме суммы $\sum_{n \geqslant 0} F_n^2 z^n$ и $\sum_{n \geqslant 0} F_n^3 z^n$. Что вы можете сказать о величине $F_{n+1}^3 - 4F_n^3 - F_{n-1}^3$?

59 Докажите, что если m и n — целые положительные числа, то существует целое x, такое, что $F_x \equiv m \pmod{3^n}$.

60 Укажите все целые положительные n, такие, что либо $F_n + 1$, либо $F_n - 1$ являются простыми числами.

61 Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n - 1}}{F_{2^n}}, \qquad \text{целое } n \geqslant 1.$$

Чему равна сумма $\sum_{k=0}^{n} 1/F_{3 \cdot 2^k}$?

62 Пусть $A_n = \phi^n + \phi^{-n}$ и $B_n = \phi^n - \phi^{-n}$.

a Найдите константы α и β, такие, что $A_n = \alpha A_{n-1} + \beta A_{n-2}$ и $B_n = \alpha B_{n-1} + \beta B_{n-2}$ при любом $n \geqslant 0$.

b Выразите A_n и B_n через F_n и L_n (см. упр. 28).

c Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} 1/(F_{2k+1} + 1) = B_n / A_{n+1}$.

d Выразите в замкнутой форме сумму $\sum_{k=1}^{n} 1/(F_{2k+1} - 1)$.

Конкурсные задачи

Конкурентные задачи

63 Сколько перестановок $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ содержат ровно k индексов j, таких, что:

a $\pi_i < \pi_j$ при всех $i < j$? (Подобные j называются „левосторонними максимумами".)

b $\pi_j > j$? (Подобные j называются „превышениями".)

64 Чему равен знаменатель дроби $\left[{1/2 \atop 1/2 - n} \right]$, если ее привести к несократимому виду?

65 Докажите тождество

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f\big(\lfloor x_1 + \cdots + x_n \rfloor\big)\, dx_1 \ldots dx_n = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \frac{f(k)}{n!}.$$

66 Чему равна $\sum_k (-1)^k \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ — сумма чисел n-го ряда треугольника Эйлера с чередующимися знаками?

67 Докажите, что

$$\sum_k \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} \binom{n-k}{m-k} (-1)^{m-k} k! = \left\langle {n \atop m} \right\rangle .$$

68 Покажите, что $\left\langle\!\left\langle {n \atop 1} \right\rangle\!\right\rangle = 2\left\langle {n \atop 1} \right\rangle$, и выразите $\left\langle\!\left\langle {n \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle$ в замкнутой форме.

69 Найдите выражение в замкнутой форме для $\sum_{k=1}^{n} k^2 H_{n+k}$.

70 Покажите, что обобщенные гармонические числа из упр. 22 разлагаются в степенной ряд $H_z = \sum_{n\geqslant 2}(-1)^n H_\infty^{(n)} z^{n-1}$.

71 Докажите, что обобщенный факториал из уравнения (5.83) может быть записан как

$$\prod_{k\geqslant 1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = \frac{e^{\gamma z}}{z!} ,$$

рассмотрев предел при $n \to \infty$ первых n сомножителей данного бесконечного произведения. Покажите, что $\frac{d}{dz}(z!)$ связано с обобщенными гармоническими числами из упр. 22.

72 Докажите, что функция тангенс разлагается в степенной ряд (6.92), и найдите соответствующий ряд для $z/\sin z$ и $\ln\big((\operatorname{tg} z)/z\big)$.

73 Докажите, что $z \operatorname{ctg} z$ равен

$$\frac{z}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{z}{2^n} - \frac{z}{2^n} \operatorname{tg} \frac{z}{2^n} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{z}{2^n} \left(\operatorname{ctg} \frac{z+k\pi}{2^n} + \operatorname{ctg} \frac{z-k\pi}{2^n} \right)$$

при любом целом $n \geqslant 1$, и покажите, что при фиксированном k и $n \to \infty$ предел k-го общего члена равен $2z^2/(z^2 - k^2\pi^2)$.

74 Укажите связь между числами $T_n(1)$ и коэффициентами разложения $1/\cos z$.

75 Докажите, что тангенциальные числа и коэффициенты разложения $1/\cos z$ располагаются по сторонам бесконечного треугольника, который начинается следующим образом:

```
            1
          0   1
        1   1   0
      0   1   2   2
    5   5   4   2   0
  0   5  10  14  16  16
61  61  56  46  32  16   0
```

Каждая строка содержит частичные суммы предыдущей строки, поочередно слева-направо и справа-налево. *Указание:* рассмотрите коэффициенты степенного ряда для $(\sin z + \cos z)/\cos(w + z)$.

76 Найдите выражение в замкнутой форме для суммы

$$\sum_k (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} 2^{n-k} k!\,,$$

и покажите, что она равна нулю при четном n.

77 При целых m и n, $n \geqslant 0$, формула (6.48) дает значение $\sigma_n(m)$ при $m < 0$, формула (6.49) — при $m \geqslant n$ и формула (6.101) — при $m = 0$. Покажите, что в остальных случаях имеет место равенство

$$\sigma_n(m) = \frac{(-1)^{m+n-1}}{m!\,(n-m)!} \sum_{k=0}^{m-1} \left[{m \atop m-k} \right] \frac{B_{n-k}}{n-k}, \quad \text{целые } n \geqslant m > 0.$$

78 Докажите следующее соотношение, которое связывает числа Стирлинга, числа Бернулли и числа Каталана:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+k \atop k} \right\} \binom{2n}{n+k} \frac{(-1)^k}{k+1} = B_n \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}\,.$$

79 Покажите, что в парадоксе „$64 = 65$“ четыре части шахматной доски могут быть переставлены и таким образом, что окажется „$64 = 63$“.

80 Последовательность, определенная рекуррентно как $A_1 = x$, $A_2 = y$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$, содержит $A_m = 1000000$ при некотором m. Какие целые положительные числа x и y приводят к максимально возможному m?

81 В тексте описан способ сведения формулы, содержащей числа $F_{n\pm k}$, к формуле, содержащей только числа F_n и F_{n+1}. Поэтому естественно поинтересоваться, могут ли две такие формулы „сведения“ быть равными, если они не совпадают по форме. Пусть $P(x, y)$ будет многочленом относительно x и y с целочисленными коэффициентами. Укажите необходимое и достаточное условие того, что $P(F_{n+1}, F_n) = 0$ при любом $n \geqslant 0$.

82 Объясните, как складывать целые положительные числа, действуя исключительно в фибоначчиевой системе счисления.

83 Возможно ли, чтобы последовательность $\langle A_n \rangle$, удовлетворяющая фибоначчиевой рекуррентности $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$, не содержала простых чисел, если A_0 и A_1 — взаимно простые числа?

84 Пусть m и n — целые нечетные положительные числа. Выразите в замкнутой форме

$$S^+_{m,n} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{F_{2mk+n} + F_m} \quad \text{и} \quad S^-_{m,n} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{F_{2mk+n} - F_m}\,.$$

Указание: суммы из упр. 62 — это $S^+_{1,3} - S^+_{1,2n+3}$ и $S^-_{1,3} - S^-_{1,2n+3}$.

85 Охарактеризуйте все такие N, что вычеты чисел Фибоначчи $F_n \bmod N$ для $n \geqslant 0$ образуют полное множество $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. (См. упр. 59.)

86 Пусть $C_1, C_2, \ldots$ — последовательность ненулевых малых чисел, такая, что

$$\text{нод}(C_m, C_n) = C_{\text{нод}(m,n)}$$

для всех положительных целых m и n. Докажите, что обобщенные биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{C}} = \frac{C_n C_{n-1} \ldots C_{n-k+1}}{C_k C_{k-1} \ldots C_1}$$

все являются целыми числами. (В частности, „фибоначчиевы коэффициенты“, образованные этим способом из чисел Фибоначчи, целые ввиду (6.111).)

87 Покажите, что K-многочлены представимы в виде произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

и в виде определителя

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & -1 & & & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & & -1 & x_n \end{pmatrix}.$$

88 Обобщая (6.146), укажите непрерывную дробь, связанную с производящей функцией $\sum_{n \geqslant 1} z^{\lfloor n\alpha \rfloor}$, если α — некоторое положительное иррациональное число.

89 Пусть α — некоторое иррациональное число из интервала $(0, 1)$, и пусть a_1, a_2, a_3, … — неполные частные в его представлении в виде непрерывной дроби. Покажите, что $|D(\alpha, n)| < 2$, где $n = K(a_1, \ldots, a_m)$, а D — это отклонение, определенное в гл. 3.

90 Пусть Q_n — наибольший знаменатель на n-м уровне дерева Штерна—Броко. (Таким образом, в соответствии со схемой из гл. 4 $\langle Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots \rangle = \langle 1, 2, 3, 5, 8, \ldots \rangle$.) Докажите, что $Q_n = F_{n+2}$.

Исследовательские проблемы

91 Каким способом лучше всего распространить определение $\left\{ n \atop k \right\}$ на произвольные вещественные числа n и k?

92 Пусть число H_n записано в виде несократимой дроби a_n/b_n, как в упр. 52.

a Бесконечно ли много таких n, что $p\backslash a_n$ при некотором фиксированном простом p?

b Бесконечно ли много таких n, что $b_n = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$? (Двумя подобными n являются $n = 250$ и $n = 1000$.)

93 Докажите, что числа γ и e^γ иррациональны.

94 Разработайте общую теорию решения двухпараметрической рекуррентности

$$\left|{n \atop k}\right| = (\alpha n + \beta k + \gamma)\left|{n-1 \atop k}\right| + (\alpha' n + \beta' k + \gamma')\left|{n-1 \atop k-1}\right| + [n=k=0] \quad \text{при } n, k \geqslant 0,$$

считая, что $\left|{n \atop k}\right| = 0$ при $n < 0$ или $k < 0$. (Биномиальные коэффициенты, числа Стирлинга, числа Эйлера и последовательности чисел из упр. 17 и 31 — это все частные случаи.) Какие отдельные значения $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ образуют „фундаментальные решения“, через которые может быть выражено общее решение?

95 Найдите эффективный способ распространить алгоритм Госпера—Зильбергера с гипергеометрических членов на члены, содержащие числа Стирлинга.

7

Производящие функции

САМЫЙ МОЩНЫЙ на сегодняшний день метод работы с последовательностями чисел — это преобразования бесконечных рядов, которые „порождают“ эти последовательности. Мы уже изучили некоторое количество последовательностей и встречались с производящими функциями; теперь самое время заняться более глубоким изучением производящих функций и убедиться в их исключительной полезности.

7.1 ТЕОРИЯ ДОМИНО И РАЗМЕН

Производящие функции настолько важны, а для многих из нас они достаточно новы, чтобы оправдать некоторое расслабление перед тем, как заняться ими вплотную. Поэтому попытаемся в начале главы развить нашу интуицию в отношении производящих функций на примере некоторых игр и забав. Мы рассмотрим два приложения производящих функций — одно, связанное с домино, и другое, связанное с монетами.

Как велико число T_n способов покрытия $2\times n$-прямоугольника костяшками домино размера 2×1? Мы будем считать, что все костяшки идентичны (потому, что лежат лицевой стороной вниз, или, может быть, кто-то сделал их неразличимыми, например, покрасив в красный цвет); следовательно, имеет значение только ориентация костяшки — вертикальная или горизонтальная: мы можем представлять себе, что работаем с плитками в форме домино. Например, существует 3 покрытия 2×3-прямоугольника, а именно, ▯▯▯, ▯⊟ и ⊟▯, так что $T_3 = 3$.

Чтобы найти общее выражение для T_n в замкнутом виде, мы, как обычно, обратимся к простым начальным случаям. Для $n = 1$ существует, очевидно, одно покрытие, ▯; когда $n = 2$ — имеется два покрытия: ▯▯ и ⊟.

А что можно сказать про случай $n = 0$; сколько покрытий возможно здесь? Сразу не ясно, как понимать этот вопрос, но раньше нам уже встречались подобные ситуации. Так, имеется одна перестановка нуля объектов (а именно, пустая перестанов-

ка), поэтому $0! = 1$. Имеется один способ выбрать 0 предметов из n (а именно, не выбрать ничего), поэтому $\binom{n}{0} = 1$. Имеется один способ разбить пустое множество на нулевое число непустых подмножеств, но нет ни одного такого способа для непустого множества; поэтому $\left\{ {n \atop 0} \right\} = [n=0]$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что существует ровно один способ покрыть домино 2×0-прямоугольник; способ состоит в том, чтобы не класть ни одной костяшки; следовательно, $T_0 = 1$. (Это противоречит простой формуле $T_n = n$, справедливой для $n = 1, 2$ и 3; по-видимому, такое простое предположение придется отвергнуть, поскольку, в соответствии с логикой ситуации, T_0 желает быть единицей.) Часто оказывается, что тщательное изучение нулевого случая весьма полезно при решении задач перечисления.

Рассмотрим еще один простой случай, $n = 4$. Имеется две возможности расположения плиток на левом конце прямоугольника — можно положить там либо одну плитку вертикально, либо две горизонтально. Если мы выберем вертикальную плитку, то получим частичное решение ▯▭ и оставшийся 2×3-прямоугольник можно покрыть плитками T_3 способами. Если же выбрать две горизонтальные плитки, то частичное решение ⊟▭ можно завершить T_2 способами. Таким образом, $T_4 = T_3 + T_2 = 5$. (Вот эти пять покрытий: ▯▯▯▯, ▯▯⊟, ▯⊟▯, ⊟▯▯, ⊟⊟.)

Теперь нам известны первые пять значений T_n:

n	0	1	2	3	4
T_n	1	1	2	3	5

Все это подозрительно похоже на числа Фибоначчи, и нетрудно понять почему. Рассуждения, с помощью которых мы доказывали, что $T_4 = T_3 + T_2$, немедленно обобщаются на любое n: $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ для $n \geqslant 2$. Таким образом, здесь мы имеем то же самое рекуррентное соотношение, что для чисел Фибоначчи, только начальные значения $T_0 = 1$ и $T_1 = 1$ другие. Однако это — последовательные члены ряда Фибоначчи F_1 и F_2, так что последовательность чисел T совпадает с последовательностью Фибоначчи, сдвинутой на одну позицию:

$$T_n = F_{n+1} \qquad \text{при } n \geqslant 0.$$

(Мы считаем это выражением в замкнутом виде для T_n, поскольку числа Фибоначчи достаточно важны, чтобы считаться „известными". Кроме того, сами F_n имеют выражение в замкнутом виде (6.123) в терминах алгебраических операций.) Отметим, что это уравнение подтверждает мудрость выбора $T_0 = 1$.

Однако при чем здесь производящие функции? Мы как раз приближаемся к тому, чтобы воспользоваться ими,— и это будет еще один способ нахождения T_n. Этот способ основан на весьма смелой идее. Рассмотрим „сумму" всех возможных расположений плиток в $2 \times n$-прямоугольнике для всех $n \geqslant 0$ и назовем ее T:

Смело пойдем вперед — туда, где нет мощеных дорог.

$$T = | + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ▯▯▯ + ▯⊟ + ⊟▯ + \cdots . \qquad (7.1)$$

(Первое слагаемое '|' в правой части означает пустое покрытие 2×0-прямоугольника.) Эта сумма T содержит массу информации. Польза ее в том, что мы можем доказать что-то относительно T в целом, вместо того чтобы вести доказательство (по индукции) относительно индивидуальных слагаемых.

Слагаемыми в этой сумме являются покрытия, т. е. комбинаторные объекты. Не будем задумываться о том, насколько допустимо суммирование бесконечного числа покрытий; все можно сделать совершенно строго, но сейчас наша цель — выйти в своем сознании за рамки привычных алгебраических формул.

Мы уже сложили покрытия, но можем также и умножать их — приписывая одно вслед за другим. Например, умножив ▯ на ⊟, получим покрытие ▯⊟. Заметьте, однако, что умножение некоммутативно — порядок сомножителей важен: ▯⊟ отличается от ⊟▯.

При таком определении умножения, как легко понять, пустое покрытие играет особую роль — это мультипликативная единица. Например, | × ⊟ = ⊟ × | = ⊟.

Теперь используем арифметику домино для манипулирования с бесконечной суммой T:

T = | + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ▯▯▯ + ▯⊟ + ⊟▯ + ⋯
= | + ▯(| + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ⋯) + ⊟(| + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ⋯)
= | + ▯T + ⊟T.   (7.2)

Я нутром чую, что эти суммы должны сходиться, если только костяшки домино будут достаточно малыми.

В правых частях этих равенств каждое правильное покрытие содержится ровно по одному разу, так что сделанные нами преобразования имеют смысл, даже несмотря на пренебрежение предостережением из гл. 2 об „абсолютной сходимости". Нижняя строка этого уравнения говорит нам, что любое покрытие в T есть либо пустое покрытие, либо вертикальная плитка, за которой приписано что-то из T, либо две горизонтальные плитки, за которыми приписано еще что-то из T.

Попробуем теперь решить это уравнение относительно T. Заменив T в левой части на |T и вычтя два последних слагаемых из обеих частей уравнения, получим

(| − ▯ − ⊟)T = | .   (7.3)

Для проверки раскроем скобки:

| + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ▯▯▯ + ▯⊟ + ⊟▯ + ⋯
− ▯ − ▯▯ − ▯▯▯ − ▯⊟ − ▯▯▯▯ − ▯▯⊟ − ▯⊟▯ − ⋯
− ⊟ − ⊟▯ − ⊟▯▯ − ⊟⊟ − ⊟▯▯▯ − ⊟▯⊟ − ⊟⊟▯ − ⋯
―――――――――――――――――――――――――――――
|

Каждый член верхней строки, за исключением первого, сокращается с каким-либо членом второй или третьей строки, так что наше уравнение правильно.

До сих пор было сравнительно легко находить комбинаторный смысл в получаемых уравнениях. Но теперь, чтобы полу-

чить короткое выражение для T, нам придется выполнить комбинаторное деление. Слепо доверяя алгебраическим преобразованиям, поделим обе части уравнения (7.3) на $\text{I}-▯-⊟$ и получим

$$\mathrm{T} = \frac{\text{I}}{\text{I}-▯-⊟}\,. \qquad (7.4)$$

(Умножение некоммутативно, поэтому, не различая левое и правое деление, мы оказываемся на грани жульничества. Однако в данном случае это неважно, поскольку I коммутирует с чем угодно. Но не будем слишком придирчивы, пока наши заумные идеи не привели к парадоксу.)

Следующий шаг — развернуть эту дробь в степенной ряд, используя правило

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\,.$$

Пустое покрытие I — мультипликативная единица в нашей комбинаторной арифметике — будет играть роль обычной мультипликативной единицы 1, а вместо z используем $▯+⊟$. Получим разложение

$$\begin{aligned}\frac{\text{I}}{\text{I}-▯-⊟} &= \text{I} + (▯+⊟) + (▯+⊟)^2 + (▯+⊟)^3 + \cdots\\ &= \text{I} + (▯+⊟) + (▯▯+▯⊟+⊟▯+⊟⊟)\\ &\quad + (▯▯▯+▯▯⊟+▯⊟▯+▯⊟⊟+⊟▯▯+⊟▯⊟+⊟⊟▯+⊟⊟⊟) + \cdots\,.\end{aligned}$$

Это действительно T, однако покрытия расположены в другом порядке, чем мы записывали ранее. Каждое покрытие встречается в этой сумме ровно один раз; так, ▯⊟⊟▯▯⊟▯ содержится в $(▯+⊟)^7$.

Чтобы извлечь из этой бесконечной суммы какую-нибудь полезную информацию, мы можем сжать ее, проигнорировав детали, не представляющие интереса. Так, например, можно представлять себе, что отдельные плитки не склеены друг с другом и коммутируют между собой; тогда покрытие ▯⊟⊟▯▯⊟▯ превратится в $▯^4▭^6$, поскольку оно содержит 4 вертикальные и 6 горизонтальных плиток. Приведение подобных членов дает ряд

$$\mathrm{T} = \text{I} + ▯ + ▯^2 + ▭^2 + ▯^3 + 2▯▭^2 + ▯^4 + 3▯^2▭^2 + ▭^4 + \cdots\,.$$

Здесь слагаемое $2▯▭^2$ представляет два члена старого разложения ▯⊟ и ⊟▯, имеющих по одному вертикальному и по два горизонтальных домино; аналогично, $3▯^2▭^2$ представляет три члена ▯▯⊟, ▯⊟▯ и ⊟▯▯. По-существу, мы рассматриваем ▯ и ▭ как обычные (коммутирующие) переменные.

Используя биномиальную теорему, можно выразить коэффициенты коммутативного варианта T в замкнутом виде:

$$\begin{aligned}\frac{\text{I}}{\text{I}-(▯+▭^2)} &= \text{I} + (▯+▭^2) + (▯+▭^2)^2 + (▯+▭^2)^3 + \cdots\\ &= \sum_{k\geqslant 0} (▯+▭^2)^k\end{aligned}$$

$$= \sum_{j,k\geqslant 0} \binom{k}{j} ▯^j ▭^{2k-2j}$$
$$= \sum_{j,m\geqslant 0} \binom{j+m}{j} ▯^j ▭^{2m}. \qquad (7.5)$$

(На последнем шаге мы заменили $k - j$ на m; это допустимо, поскольку $\binom{k}{j} = 0$ при $0 \leqslant k < j$.) Мы заключаем таким образом, что $\binom{j+m}{j}$ есть число способов покрытия $2 \times (j + 2m)$-прямоугольника с помощью j вертикальных и $2m$ горизонтальных домино. Так, мы только что рассматривали покрытие ▯⊟⊟▯▯⊟▯ 2×10-прямоугольника, включающее 4 вертикальные и 6 горизонтальных плиток; всего имеется $\binom{4+3}{4} = 35$ таких покрытий, следовательно, одним из членов в коммутативном варианте T будет $35▯^4▭^6$.

Мы можем отбросить еще некоторые детали, если перестанем обращать внимание на ориентацию плиток. Не будем заботиться о том, чтобы различать горизонтальные и вертикальные плитки, мы хотим только узнать общее число $2 \times n$-покрытий. (Это есть как раз число T_n, с которого мы начинали свое исследование.) Требуемую информацию можно получить, просто заменив ▯ и ▭ на некоторую величину z. Можно также заменить | на 1, и в итоге получим

Сейчас я совсем дезориентирован.

$$T = \frac{1}{1 - z - z^2}. \qquad (7.6)$$

Это — производящая функция (6.117) для чисел Фибоначчи, с той только разницей, что в числителе отсутствует множитель z; поэтому мы делаем вывод, что коэффициент при z^n в T равен F_{n+1}.

Найденные компактные представления для T: $|/(|-▯-⊟)$, $|/(|-▯-▭^2)$ и $1/(1-z-z^2)$, называются *производящими функциями*, поскольку из них можно получить (они производят) интересующие нас коэффициенты.

Помимо прочего, из нашего исследования можем заключить, что число покрытий $2\times n$-прямоугольника ровно m парами горизонтальных домино составляет $\binom{n-m}{m}$. (Действительно, в покрытии будет $j = n - 2m$ вертикальных домино, следовательно, в соответствии с нашей формулой найдется

$$\binom{j+m}{j} = \binom{j+m}{m} = \binom{n-m}{m}$$

способов осуществить покрытие.) В гл. 6 мы видели, что $\binom{n-m}{m}$ есть число последовательностей азбуки Морзе длины n, содержащих m тире; и на самом деле нетрудно увидеть прямое соответствие между $2 \times n$-покрытиями и последовательностями азбуки Морзе. (Покрытие ▯⊟⊟▯▯⊟▯ соответствует '•−−••−•'.) Таким образом, покрытия с помощью домино тесно связаны с континуантами, которые мы изучали в гл. 6. Мир так тесен.

Мы решили задачу вычисления T_n двумя способами. Первый способ — угадать ответ и доказать его по индукции — проще; второй способ — использовать бесконечную сумму покрытий и извлечь из нее интересующие нас коэффициенты — более изощренный. Почему же нам понадобился второй способ — не потому ли, что с костяшками домино очень увлекательно играть, считая их алгебраическими переменными? Нет; истинная причина его появления в том, что метод бесконечных сумм обладает заметно бо́льшими возможностями. Этот метод примени́м к значительно более широкому кругу задач, поскольку он не требует от нас сверхъестественных догадок.

Попробуем подняться еще на одну ступень, занявшись задачей, где угадать ответ будет выше наших сил. Сколько существует способов покрыть костяшками домино $3 \times n$-прямоугольник (обозначим это число U_n)?

Кое-что можно узнать, проанализировав начальные случаи. Пустое покрытие дает $U_0 = 1$. Для $n = 1$ не существует допустимых покрытий, поскольку одна 2×1-плитка не заполняет 3×1-прямоугольник, а для двух нет места. Следующий случай, $n = 2$, легко анализируется вручную: имеется три покрытия ⊞, ⊞ и ⊟, так что $U_2 = 3$. (Мы на самом деле уже знали это, поскольку из предыдущей задачи известно, что $T_3 = 3$, а способов покрытия 3×2-прямоугольника ровно столько же, сколько и для 2×3-прямоугольника.) Для $n = 3$, как и для $n = 1$, нет покрытий. В этом можно убедиться, либо быстренько перебрав все варианты, либо же взглянув на проблему с более высокого уровня: площадь 3×3-прямоугольника нечетна, так что его, наверное, не удастся покрыть домино с четной площадью. (Очевидно, что те же рассуждения применимы в случае любого нечетного n.) Наконец, когда $n = 4$, имеется, вроде бы, около дюжины покрытий; чтобы найти точное число, надо потратить изрядное время, проверяя полноту списка.

Испробуем поэтому подход с бесконечной суммой, который успешно сработал в прошлый раз:

$$U = | + ⊞ + ⊞ + ⊟ + ⊞⊞ + ⊞⊞ + ⊞⊟ + ⊟⊞ + ⊞⊞ + \cdots . \quad (7.7)$$

Каждое непустое покрытие начинается с ⊑, ⊏ или с ⊟; но, к сожалению, в первых двух из этих трех случаев нельзя просто вынести множитель и прийти снова к U. Однако сумму всех членов U, начинающихся с ⊑, можно записать в виде ⊑V, где

$$V = ▯ + ⊞ + ⊞ + ⊟ + ⊟ + \cdots$$

есть сумма всех покрытий ущербного $3 \times n$-прямоугольника без левого нижнего углового квадратика. Аналогично, члены U, начинающиеся с ⊏, можно записать как ⊏Λ, где

$$\Lambda = ▯ + ⊞ + ⊞ + ⊟ + ⊟ + \cdots$$

состоит из всех покрытий прямоугольника без левого верхнего угла. Ряд Λ представляет собой зеркальное отражение V. Эти разложения позволяют записать

$$U = \mathrm{I} + \text{┗}V + \text{┏}\Lambda + \text{☰}U .$$

Точно так же разлагаются сами V и Λ, поскольку входящие в них покрытия могут начинаться лишь двумя способами:

$$V = \text{▯}U + \text{⊟}V ,$$
$$\Lambda = \text{▯}U + \text{⊟}'\Lambda .$$

Теперь мы имеем три уравнения с тремя неизвестными (U, V и Λ). Их можно решить, выразив сначала V и Λ через U и подставив результаты в уравнение для U:

$$V = (\mathrm{I} - \text{⊟})^{-1}\text{▯}U , \qquad \Lambda = (\mathrm{I} - \text{⊟}')^{-1}\text{▯}U ,$$

$$U = \mathrm{I} + \text{┗}(\mathrm{I} - \text{⊟})^{-1}\text{▯}U + \text{┏}(\mathrm{I} - \text{⊟}')^{-1}\text{▯}U + \text{☰}U .$$

Это последнее уравнение можно решить относительно U, получив компактную формулу

$$U = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - \text{┗}(\mathrm{I} - \text{⊟})^{-1}\text{▯} - \text{┏}(\mathrm{I} - \text{⊟}')^{-1}\text{▯} - \text{☰}} . \qquad (7.8)$$

Из другого курса я узнал кое-что о „регулярных" выражениях. Если я не ошибаюсь, то на языке регулярных выражений можно записать

$$U = (\text{┗}\,\text{⊟}^{*}\,\text{▯} + \text{┏}\,\text{⊟}'^{*}\,\text{▯} + \text{☰})^{*} ;$$

поэтому должна быть какая-то связь между регулярными выражениями и производящими функциями.

Это выражение определяет U так же, как (7.4) определяет T.

Наш следующий шаг — использовать коммутативность. Все замечательно упрощается, если мы разрешим домино свободно перемещаться и запишем только степени ▯ и ▭:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{1 - \text{▯}^2\text{▭}(1-\text{▭}^3)^{-1} - \text{▯}^2\text{▭}(1-\text{▭}^3)^{-1} - \text{▭}^3} \\
&= \frac{1-\text{▭}^3}{(1-\text{▭}^3)^2 - 2\text{▯}^2\text{▭}} \\
&= \frac{(1-\text{▭}^3)^{-1}}{1 - 2\text{▯}^2\text{▭}(1-\text{▭}^3)^{-2}} \\
&= \frac{1}{1-\text{▭}^3} + \frac{2\text{▯}^2\text{▭}}{(1-\text{▭}^3)^3} + \frac{4\text{▯}^4\text{▭}^2}{(1-\text{▭}^3)^5} + \frac{8\text{▯}^6\text{▭}^3}{(1-\text{▭}^3)^7} + \cdots \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \frac{2^k\text{▯}^{2k}\text{▭}^k}{(1-\text{▭}^3)^{2k+1}} \\
&= \sum_{k,m\geqslant 0} \binom{m+2k}{m} 2^k\text{▯}^{2k}\text{▭}^{k+3m} .
\end{aligned}$$

(Этот вывод заслуживает тщательной проверки. На последнем шаге использована формула $(1-w)^{-2k-1} = \sum_m \binom{m+2k}{m} w^m$, тождество (5.56).) Посмотрим внимательно на нижнюю строку и

попытаемся понять, о чем она может рассказать. Во-первых, из формулы следует, что любое $3 \times n$-покрытие использует четное число вертикальных домино. Кроме того, если имеется $2k$ вертикальных домино, то горизонтальных домино должно быть не менее k и общее число горизонтальных домино должно равняться $k + 3m$ для некоторого $m \geqslant 0$. И, наконец, число возможных покрытий с $2k$ вертикальными и $k+3m$ горизонтальными домино равняется $\binom{m+2k}{m}2^k$.

Теперь мы в состоянии проанализировать 3×4-покрытия, что вызвало затруднения в начале нашего исследования задачи $3 \times n$. Если $n = 4$, то общая площадь равна 12, поэтому всего потребуется 6 домино. Из них будет $2k$ вертикальных и $k + 3m$ горизонтальных костяшек для некоторых k и m; следовательно, $2k + k + 3m = 6$. Иначе говоря, $k + m = 2$. Если вертикальные костяшки не использовать вообще, то $k = 0$ и $m = 2$; число вариантов равно $\binom{2+0}{2}2^0 = 1$. (Здесь мы учли покрытие ⊞.) Если мы используем две вертикальные плитки, то $k = 1$ и $m = 1$; всего имеется $\binom{1+2}{1}2^1 = 6$ таких покрытий. Если, наконец, использовать 4 вертикальные плитки, то $k = 2$ и $m = 0$; таких покрытий $\binom{0+4}{0}2^2 = 4$, а всего покрытий будет $U_4 = 11$. В общем случае для четного n те же рассуждения показывают, что $k + m = \frac{1}{2}n$, следовательно, $\binom{m+2k}{m} = \binom{n/2+k}{n/2-k}$ и общее число $3 \times n$-покрытий равно

$$U_n = \sum_k \binom{n/2+k}{n/2-k} 2^k = \sum_m \binom{n-m}{m} 2^{n/2-m}. \qquad (7.9)$$

Как и ранее, можно заменить оба символа ▯ и ▭ на z, получая производящую функцию без дискриминации домино по их убеждениям. Результатом будет функция

$$U = \frac{1}{1-z^3(1-z^3)^{-1}-z^3(1-z^3)^{-1}-z^3} = \frac{1-z^3}{1-4z^3+z^6}. \qquad (7.10)$$

Раскладывая эту дробь в степенной ряд, получим

$$U = 1 + U_2 z^3 + U_4 z^6 + U_6 z^9 + U_8 z^{12} + \cdots,$$

производящую функцию для чисел U_n. (Курьезное несоответствие индексов и показателей степеней в этой формуле легко объяснимо. Коэффициент при z^9, например, есть U_6, отвечающий за покрытия 3×6-прямоугольника. Это как раз то, чего мы хотели, поскольку каждое такое покрытие включает девять костяшек домино.)

Можно было бы продолжить анализ (7.10) и выразить коэффициенты в замкнутом виде, но отложим это до лучших времен в этой главе, когда наберемся опыта. Поэтому оставим пока домино и обратимся к следующей объявленной задаче, „размену“.

Сколько существует способов заплатить 50 центов? Мы считаем, что платить можно пенни ①, никелями ⑤, даймами ⑩,

Ну да, я еще помню те времена, когда в ходу были полудоллары.

четвертями $\textcircled{25}$ и полудолларами $\textcircled{50}$. Дьёрдь Пойа [243] популяризовал эту задачу, продемонстрировав поучительный способ ее решения с помощью производящих функций.

Запишем бесконечную сумму, представляющую все возможные способы размена, так же, как ранее в задаче про домино бесконечные суммы представляли все покрытия. Начать проще всего со случая, когда имеется меньше разновидностей монет, поэтому положим для начала, что у нас нет никаких монет, кроме пенни. Сумму всех способов заплатить некоторое количество пенни (и только пенни) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P &= \not{1} + \textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} + \cdots \\ &= \not{1} + \textcircled{1} + \textcircled{1}^2 + \textcircled{1}^3 + \textcircled{1}^4 + \cdots . \end{aligned}$$

Первое слагаемое обозначает вариант не заплатить ничего, второе слагаемое означает одно пенни, затем два пенни, три пенни и т. д. Если теперь кроме пенни допускается использовать еще и никели, то суммой всех возможных способов будет

$$\begin{aligned} N &= P + \textcircled{5}\,P + \textcircled{5}\textcircled{5}\,P + \textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\,P + \textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\,P + \cdots \\ &= (\not{5} + \textcircled{5} + \textcircled{5}^2 + \textcircled{5}^3 + \textcircled{5}^4 + \cdots)\,P , \end{aligned}$$

поскольку каждый вариант выплаты включает некоторое количество никелей, выбираемых из первого множителя, и некоторое количество пенни, выбираемых из P. (Заметьте, что N *не равняется* сумме $\not{1} + \textcircled{1} + \textcircled{5} + (\textcircled{1} + \textcircled{5})^2 + (\textcircled{1} + \textcircled{5})^3 + \cdots$, поскольку эта сумма включает многие виды выплат более чем по одному разу. Например, член $(\textcircled{1} + \textcircled{5})^2 = \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{5} + \textcircled{5}\textcircled{1} + \textcircled{5}\textcircled{5}$ трактует $\textcircled{1}\textcircled{5}$ и $\textcircled{5}\textcircled{1}$, как если бы они были различными, но мы хотим перечислить все множества монет по одному разу безотносительно к их порядку.)

Аналогично, если допустить еще и даймы, то получим бесконечную сумму

$$D = (\not{10} + \textcircled{10} + \textcircled{10}^2 + \textcircled{10}^3 + \textcircled{10}^4 + \cdots)\,N ,$$

которая, если ее полностью раскрыть, будет содержать слагаемые вида $\textcircled{10}^3\textcircled{5}^3\textcircled{1}^5 = \textcircled{10}\textcircled{10}\textcircled{10}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}$. Каждое такое слагаемое есть какой-то способ размена. Добавление к банку допустимых монет четвертей и полудолларов даст

Банковские монеты.

$$\begin{aligned} Q &= (\not{25} + \textcircled{25} + \textcircled{25}^2 + \textcircled{25}^3 + \textcircled{25}^4 + \cdots)\,D ; \\ C &= (\not{50} + \textcircled{50} + \textcircled{50}^2 + \textcircled{50}^3 + \textcircled{50}^4 + \cdots)\,Q . \end{aligned}$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти, сколько слагаемых в C сто́ят ровно 50 центов.

Задача решается с помощью простого трюка. Заменим $\textcircled{1}$ на z, $\textcircled{5}$ на z^5, $\textcircled{10}$ на z^{10}, $\textcircled{25}$ на z^{25} и $\textcircled{50}$ на z^{50}. Каждое слагаемое тогда заменится на z^n, где n — стоимость исходного слагаемого в пенни. Например, слагаемое $\textcircled{50}\textcircled{10}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{1}$ превратится в $z^{50+10+5+5+1} = z^{71}$. Каждый из четырех возможных способов заплатить 13 центов, а

именно, ⑩①^3, ⑤①^8, ⑤^{2}①^3 и ①^{13}, сведется к z^{13}; следовательно, коэффициентом при z^{13} после z-подстановки будет 4.

Пусть P_n, N_n, D_n, Q_n и C_n обозначают число способов заплатить сумму в n центов, если можно использовать монеты не старше, соответственно, 1, 5, 10, 25 и 50 центов. Наш анализ показал, что эти числа суть коэффициенты при z^n в соответствующих степенных рядах

$$\begin{aligned} P &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots, \\ N &= (1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + z^{20} + \cdots)P, \\ D &= (1 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + z^{40} + \cdots)N, \\ Q &= (1 + z^{25} + z^{50} + z^{75} + z^{100} + \cdots)D, \\ C &= (1 + z^{50} + z^{100} + z^{150} + z^{200} + \cdots)Q. \end{aligned}$$

Очевидно, что $P_n = 1$ для всех $n \geqslant 0$. По кратком размышлении легко доказать, что $N_n = \lfloor n/5 \rfloor + 1$: для того чтобы составить сумму в n центов из пенни и никелей, мы должны взять 0, или 1, или ..., или $\lfloor n/5 \rfloor$ никелей, после чего останется лишь единственный способ выбрать требуемое число пенни. Итак, значения P_n и N_n легко вычисляются, однако с D_n, Q_n и C_n дело обстоит гораздо сложнее.

Сколько пенни существует реально? Если n больше, скажем, 10^{10}, то я готов поспорить, что „в реальном мире“ $P_n = 0$.

Один из подходов к исследованию этих формул основан на замечании, что $1 + z^m + z^{2m} + \cdots$ есть просто $1/(1 - z^m)$. Следовательно, мы можем записать

$$\begin{aligned} P &= 1/(1 - z), \\ N &= P/(1 - z^5), \\ D &= N/(1 - z^{10}), \\ Q &= D/(1 - z^{25}), \\ C &= Q/(1 - z^{50}). \end{aligned}$$

Умножая на знаменатель, получим

$$\begin{aligned} (1 - z)P &= 1, \\ (1 - z^5)N &= P, \\ (1 - z^{10})D &= N, \\ (1 - z^{25})Q &= D, \\ (1 - z^{50})C &= Q. \end{aligned}$$

Теперь, приравнивая коэффициенты при z^n в этих уравнениях, получим рекуррентные соотношения, из которых желаемые коэффициенты легко вычисляются:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + [n = 0], \\ N_n &= N_{n-5} + P_n, \\ D_n &= D_{n-10} + N_n, \\ Q_n &= Q_{n-25} + D_n, \\ C_n &= C_{n-50} + Q_n. \end{aligned}$$

Например, коэффициент при z^n в $D = (1-z^{25})Q$ равен $Q_n - Q_{n-25}$; поэтому должно быть $Q_n - Q_{n-25} = D_n$, как и записано выше.

Можно было бы раскрыть эти соотношения и выразить Q_n, например, в виде $Q_n = D_n + D_{n-25} + D_{n-50} + D_{n-75} + \cdots$, где сумма обрывается, когда индексы становятся отрицательными. Однако, исходная, неитеративная форма удобна тем, что каждый коэффициент вычисляется с помощью всего одного сложения, как в треугольнике Паскаля.

Используем эти соотношения, чтобы найти C_{50}. Во-первых, $C_{50} = C_0 + Q_{50}$, так что нам нужно знать Q_{50}. Далее, $Q_{50} = Q_{25} + D_{50}$ и $Q_{25} = Q_0 + D_{25}$; поэтому нас также интересует D_{50} и D_{25}. Эти значения D_n, в свою очередь, зависят от D_{40}, D_{30}, D_{20}, D_{15}, D_{10} и D_5 и от N_{50}, N_{45}, ..., N_5. Таким образом, чтобы определить все нужные коэффициенты, достаточно выполнить простые вычисления:

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
P_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	1	2	4	6	9	12	16		25		36
Q_n	1					13					49
C_n	1										50

В самом низу таблицы находится ответ C_{50}: имеется ровно 50 способов дать 50 центов „на чай".

(Не считая такого способа, как заплатить чаевые кредитной карточкой.)

А что можно сказать о замкнутой форме для C_n? Перемножение всех уравнений дает нам компактное выражение

$$C = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-z^5}\,\frac{1}{1-z^{10}}\,\frac{1}{1-z^{25}}\,\frac{1}{1-z^{50}}, \qquad (7.11)$$

однако сразу не очевидно, как извлечь отсюда коэффициенты при z^n. Это все же возможно; мы еще вернемся к этой задаче позднее в этой главе.

Формулы в задаче размена получаются более элегантными в стране, где чеканятся монеты любого положительного достоинства (①, ②, ③, ...), а не только те пять, с которыми мы работали раньше. Соответствующая производящая функция является бесконечным произведением дробей,

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots},$$

и коэффициент при z^n в этом выражении, если перемножить и раскрыть все скобки, называется $p(n)$ — число *разбиений* n. Разбиение n — это представление n в виде суммы положительных целых слагаемых без учета порядка. Например, имеется семь раз-

личных разбиений пятерки, а именно,

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 \\ = 1+1+1+1+1;$$

следовательно, $p(5) = 7$. (Кроме того, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ и $p(6) = 11$; судя по началу, все $p(n)$ — простые числа. Однако $p(7) = 15$, и замечательная гипотеза гибнет.) Для $p(n)$ неизвестно выражение в замкнутом виде, однако теория разбиений представляет собой захватывающую область математики, в которой было сделано немало замечательных открытий. Например, Рамануджан, выполнив остроумные преобразования производящих функций, доказал, что $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$, $p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$ и $p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$ (см. Эндрюс [386, гл. 10]).

7.2 ОСНОВНЫЕ МАНЕВРЫ

Сконцентрируем теперь свое внимание на методах, которые и позволяют говорить о степенных рядах в превосходной степени.

Сначала несколько слов о терминологии и обозначениях. Всякая производящая функция может быть произведена из следующего общего выражения

$$G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} g_n z^n . \tag{7.12}$$

Мы говорим, что $G(z)$ или, кратко, G является производящей функцией последовательности $\langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$, которую мы также записываем как $\langle g_n \rangle$. Коэффициент g_n при z^n в $G(z)$ часто обозначается $[z^n]\,G(z)$, как в разд. 5.4.

Сумма в (7.12) включает все $n \geqslant 0$, но иногда удобнее распространить диапазон суммирования на все целые n. Мы можем сделать это, просто положив $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = 0$. В таких случаях можно по-прежнему говорить о последовательности $\langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$, как если бы g_n не существовали для отрицательных n.

При работе с производящими функциями можно говорить о двух разновидностях выражений в „замкнутом виде“. Возможно, мы выразим $G(z)$ через z в замкнутом виде или же нам удастся найти выражение g_n через n. Например, производящая функция для чисел Фибоначчи записывается в замкнутом виде как $z/(1-z-z^2)$; сами же числа Фибоначчи выражаются как $(\phi^n - \hat{\phi}^n)/\sqrt{5}$. Из контекста будет ясно, какой замкнутый вид мы имеем в виду.

Теперь поговорим о перспективах. Производящая функция $G(z)$ может являться нам в двух ипостасях в зависимости от того, как мы ее рассматриваем. Иногда это функция комплексного переменного z, имеющая все стандартные свойства, доказываемые в учебниках анализа. В других же случаях производящая

Если физики преуспели в том, чтобы считать свет по обстоятельствам волной или частицей, то почему бы математикам не рассматривать производящие функции двумя различными способами?

функция — просто формальный степенной ряд, в котором z стоит потому, что ведь что-то надо написать. В предыдущем разделе, например, мы использовали вторую точку зрения; несколько раз мы подставляли z в „сумму" комбинаторных объектов вместо каких-либо качеств этих объектов. После этого коэффициент при z^n отвечал числу комбинаторных объектов, имеющих это качество в количестве n.

Если мы рассматриваем $G(z)$ как функцию комплексного переменного, то встает вопрос о сходимости ряда. Как мы определили в гл. 2, бесконечная сумма $\sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$ сходится (абсолютно) тогда и только тогда, когда существует константа A, такая, что конечная сумма $\sum_{0\leqslant n\leqslant N} |g_n z^n|$ ни для каких N не превосходит A. Отсюда легко усмотреть, что если сумма $\sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$ сходится для некоторого значения $z = z_0$, то она сходится и для всех z при $|z| < |z_0|$. Кроме того, должно выполняться $\lim_{n\to\infty} |g_n z_0^n| = 0$; следовательно, в обозначениях гл. 9, $g_n = O(|1/z_0|^n)$, если имеется сходимость в точке z_0. Обратно, если $g_n = O(M^n)$, то ряд $\sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$ сходится для всех $|z| < 1/M$. Это — основные факты о сходимости степенных рядов.

Однако, как правило, сходимость не будет играть для нас существенной роли, если только мы не изучаем асимптотическое поведение коэффициентов. Почти всем операциям над производящими функциями, которые мы проделывали, можно дать строгое истолкование как операциям над формальными степенными рядами, и такие операции являются корректными, даже если ряд расходится. (Соответствующую теорию можно найти, например, в работах Белла [19], Найвена [228] и Хенричи [336, гл. 1].)

И даже если отбросим всякие условности.

С другой стороны, даже если мы отбросим все предосторожности и выведем какую-либо формулу без строгого обоснования, то обычно оказывается возможным просто взять окончательную формулу и доказать ее по индукции. Например, производящая функция для чисел Фибоначчи сходится лишь при $|z| < 1/\phi \approx 0.618$, но нам совсем не нужно знать об этом при доказательстве формулы $F_n = (\phi^n - \hat{\phi}^n)/\sqrt{5}$. Однажды обнаружив эту формулу, мы можем доказать ее непосредственно, если не доверяем теории формальных степенных рядов. Таким образом, в этой главе мы будем пренебрегать вопросами сходимости; исследование сходимости было бы только помехой.

До сих пор речь шла о перспективах. А теперь рассмотрим наш инструментарий, т. е. набор приемов преобразования производящих функций — их сложения, сдвига, замены переменных в производящих функциях, дифференцирования, интегрирования и перемножения. В последующем изложении мы примем, если не оговорено противное, что $F(z)$ и $G(z)$ — производящие функции последовательностей $\langle f_n \rangle$ и $\langle g_n \rangle$. Будем также считать, что f_n и g_n нулевые для отрицательных n, поскольку такое предположение позволит в некоторых случаях не заботиться о пределах суммирования.

Вполне очевидно, что получится, если умножить каждую из производящих функций F и G на константу и сложить результаты:

$$\alpha F(z) + \beta G(z) = \alpha \sum_n f_n z^n \; + \; \beta \sum_n g_n z^n$$
$$= \sum_n (\alpha f_n + \beta g_n) z^n . \qquad (7.13)$$

Мы получаем производящую функцию последовательности $\langle \alpha f_n + \beta g_n \rangle$.

Сдвиг производящей функции ненамного сложнее. Чтобы сдвинуть $G(z)$ вправо на m позиций, т. е. построить производящую функцию для последовательности $\langle 0, \ldots, 0, g_0, g_1, \ldots \rangle = \langle g_{n-m} \rangle$, начинающуюся с m нулей, просто умножим функцию на z^m:

$$z^m G(z) = \sum_n g_n z^{n+m} = \sum_n g_{n-m} z^n , \quad \text{целое } m \geqslant 0. \qquad (7.14)$$

Когда мы в гл. 6 искали выражение в замкнутом виде для чисел Фибоначчи, то использовали (дважды) именно эту операцию, а также сложение, чтобы вывести уравнение $(1 - z - z^2)F(z) = z$.

Чтобы сдвинуть $G(z)$ на m позиций влево, т. е. построить производящую функцию последовательности $\langle g_m, g_{m+1}, g_{m+2}, \ldots \rangle = \langle g_{n+m} \rangle$, из которой удалены первые m элементов, вычтем первые m членов и затем поделим на z^m:

$$\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{n \geqslant m} g_n z^{n-m}$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} g_{n+m} z^n . \qquad (7.15)$$

(Последнюю сумму нельзя распространить на все n, если только не окажется $g_0 = \cdots = g_{m-1} = 0$.)

Еще один из наших трюков — это умножение z на константу:

$$G(cz) = \sum_n g_n (cz)^n = \sum_n c^n g_n z^n ; \qquad (7.16)$$

получили производящую функцию последовательности $\langle c^n g_n \rangle$. Особенно важен частный случай $c = -1$.

Часто оказывается нужным добавить к коэффициентам множитель n. Сделать это позволяет дифференцирование:

Не нравится мне это дифференцирование — разложение — разрушение. Не вяжется оно с производящими — созидающими функциями.

$$G'(z) = g_1 + 2g_2 z + 3g_3 z^2 + \cdots = \sum_n (n+1) g_{n+1} z^n . \qquad (7.17)$$

Выполнив сдвиг на одну позицию вправо, получим формулу, которая иногда даже более полезна:

$$zG'(z) = \sum_n n g_n z^n . \qquad (7.18)$$

Это — производящая функция последовательности $\langle n g_n \rangle$. Повторное дифференцирование позволяет умножить g_n на любой желаемый многочлен от n.

Обратная операция, интегрирование, дает способ поделить элементы последовательности на n:

$$\int_0^z G(t)\,dt = g_0 z + \frac{1}{2} g_1 z^2 + \frac{1}{3} g_2 z^3 + \cdots = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n . \qquad (7.19)$$

(Заметьте, что постоянный член равен нулю.) Если вместо $\langle g_{n-1}/n \rangle$ нужна производящая функция для $\langle g_n/n \rangle$, то следует сначала выполнить сдвиг на одну позицию влево, заменив в интеграле $G(t)$ на $\bigl(G(t) - g_0\bigr)/t$.

И, наконец, продемонстрируем умножение производящих функций:

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= (f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots) \\ &= (f_0 g_0) + (f_0 g_1 + f_1 g_0) z + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) z^2 + \cdots \\ &= \sum_n \Bigl(\sum_k f_k g_{n-k} \Bigr) z^n . \end{aligned} \qquad (7.20)$$

Как мы видели в гл. 5, полученная сумма есть производящая функция последовательности $\langle h_n \rangle$, *свертки* $\langle f_n \rangle$ и $\langle g_n \rangle$. Сумму $h_n = \sum_k f_k g_{n-k}$ можно записать и как $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$, поскольку $f_k = 0$ при $k < 0$, а $g_{n-k} = 0$ при $k > n$. Умножение/свертка немного сложнее других операций, однако очень полезна — настолько полезна, что мы посвятим весь разд. 7.5 разбору примеров ее использования.

Имеется ряд частных случаев умножения, которые заслуживают того, чтобы рассматривать их как отдельные операции. Один из таких случаев мы уже видели: если $F(z) = z^m$, то получаем операцию сдвига (7.14). В этом случае сумма h_n превращается в один член g_{n-m}, поскольку все коэффициенты f_k равны 0, за исключением $f_m = 1$.

Еще один полезный частный случай получается, когда $F(z)$ — хорошо знакомая нам функция $1/(1-z) = 1 + z + z^2 + \cdots$; здесь все f_k (для $k \geqslant 0$) равны 1, и мы получаем важную формулу

$$\frac{1}{1-z} G(z) = \sum_n \Bigl(\sum_{k \geqslant 0} g_{n-k} \Bigr) z^n = \sum_n \Bigl(\sum_{k \leqslant n} g_k \Bigr) z^n . \qquad (7.21)$$

Умножение производящей функции на $1/(1-z)$ дает производящую функцию для последовательности частичных сумм исходной последовательности.

В табл. 368 собраны все операции, которые мы рассмотрели. Для эффективного использования этих операций полезно иметь в запасе достаточно большой набор производящих функций. В табл. 369 перечислены простейшие из них; используя для начала их, мы уже сможем решить кое-какие задачи.

Таблица 368 Преобразования производящих функций.

$$\alpha F(z) + \beta G(z) = \sum_n (\alpha f_n + \beta g_n) z^n$$

$$z^m G(z) = \sum_n g_{n-m} z^n, \quad \text{целое } m \geqslant 0$$

$$\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{n\geqslant 0} g_{n+m} z^n, \quad \text{целое } m \geqslant 0$$

$$G(cz) = \sum_n c^n g_n z^n$$

$$G'(z) = \sum_n (n+1) g_{n+1} z^n$$

$$zG'(z) = \sum_n n g_n z^n$$

$$\int_0^z G(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n$$

$$F(z)G(z) = \sum_n \Bigl(\sum_k f_k g_{n-k}\Bigr) z^n$$

$$\frac{1}{1-z} G(z) = \sum_n \Bigl(\sum_{k\leqslant n} g_k\Bigr) z^n$$

Каждая производящая функция, включенная в табл. 369, сама по себе достаточно важна, чтобы ее стоило запомнить. Многие функции здесь — частные случаи других, а некоторые могут быть легко получены применением операций из табл. 368; таким образом, работа по запоминанию не очень велика.

Рассмотрим, например, последовательность $\langle 1,2,3,4,\ldots\rangle$, производящая функция $1/(1-z)^2$ которой часто бывает нужна. Эта производящая функция находится примерно в середине табл. 369, но, кроме того, это — частный случай $m = 1$ последовательности $\langle 1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots\rangle$, помещенной в таблице ниже; а также частный случай $c = 2$ родственной последовательности $\langle 1, c, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \ldots\rangle$. Мы можем вывести нужную формулу из производящей функции последовательности $\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$, взяв ее частичные суммы как в (7.21); т. е. поделив $1/(1-z)$ на $(1-z)$. Или же можно вывести ее из $\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ дифференцированием, воспользовавшись (7.17).

Подсказка: если последовательность состоит из биномиальных коэффициентов, то ее производящая функция обычно содержит биномы $1 \pm z$.

Хорошо, хорошо, убедили.

Таблица 369 Простые последовательности и их производящие функции.

последовательность	производящая функция	замкнутый вид
$\langle 1,0,0,0,0,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[n=0]\,z^n$	1
$\langle 0,\ldots,0,1,0,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[n=m]\,z^n$	z^m
$\langle 1,1,1,1,1,1,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0} z^n$	$\dfrac{1}{1-z}$
$\langle 1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^n$	$\dfrac{1}{1+z}$
$\langle 1,0,1,0,1,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[2\backslash n]\,z^n$	$\dfrac{1}{1-z^2}$
$\langle 1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[m\backslash n]\,z^n$	$\dfrac{1}{1-z^m}$
$\langle 1,2,3,4,5,6,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,z^n$	$\dfrac{1}{(1-z)^2}$
$\langle 1,2,4,8,16,32,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n$	$\dfrac{1}{1-2z}$
$\langle 1,4,6,4,1,0,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{4}{n} z^n$	$(1+z)^4$
$\langle 1,c,\binom{c}{2},\binom{c}{3},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{c}{n} z^n$	$(1+z)^c$
$\left\langle 1,c,\binom{c+1}{2},\binom{c+2}{3},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{c+n-1}{n} z^n$	$\dfrac{1}{(1-z)^c}$
$\langle 1,c,c^2,c^3,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0} c^n z^n$	$\dfrac{1}{1-cz}$
$\left\langle 1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{m+n}{m} z^n$	$\dfrac{1}{(1-z)^{m+1}}$
$\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n} z^n$	$\ln\dfrac{1}{1-z}$
$\langle 0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$\ln(1+z)$
$\langle 1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!} z^n$	e^z

Последовательность $\langle 1,0,1,0,\ldots\rangle$ — еще один пример последовательности, производящую функцию которой можно найти многими способами. Ясно, что можно просто вывести формулу $\sum_n z^{2n} = 1/(1-z^2)$, подставив z^2 вместо z в тождество $\sum_n z^n = 1/(1-z)$; можно также применить суммирование к последовательности $\langle 1,-1,1,-1,\ldots\rangle$ с производящей функцией $1/(1+z)$, получив $1/(1+z)(1-z) = 1/(1-z^2)$. Имеется и третий путь; он основан на общем методе извлечения членов с четными номерами $\langle g_0,0,g_2,0,g_4,0,\ldots\rangle$ из *любой* последовательности: сложив $G(-z)$ и $G(+z)$, получим

$$G(z)+G(-z) = \sum_n g_n\bigl(1+(-1)^n\bigr)z^n = 2\sum_n g_n[n\,\text{— четное}]z^n\,;$$

следовательно,

$$\frac{G(z)+G(-z)}{2} = \sum_n g_{2n}\,z^{2n}\,. \qquad (7.22)$$

Аналогично можно извлечь члены с нечетными номерами:

$$\frac{G(z)-G(-z)}{2} = \sum_n g_{2n+1}\,z^{2n+1}\,. \qquad (7.23)$$

В частном случае $g_n = 1$ и $G(z) = 1/(1-z)$ получаем, что производящая функция для $\langle 1,0,1,0,\ldots\rangle$ есть $\frac{1}{2}\bigl(G(z)+G(-z)\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\bigr) = \frac{1}{1-z^2}$.

Попробуем применить этот прием к производящей функции для чисел Фибоначчи. Мы знаем, что $\sum_n F_n z^n = z/(1-z-z^2)$; поэтому

$$\begin{aligned}\sum_n F_{2n}z^{2n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z-z^2}+\frac{-z}{1+z-z^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z+z^2-z^3-z+z^2+z^3}{(1-z^2)^2-z^2}\right) = \frac{z^2}{1-3z^2+z^4}\,.\end{aligned}$$

Эта функция производит последовательность $\langle F_0,0,F_2,0,F_4,\ldots\rangle$; таким образом, последовательность чисел Фибоначчи через один, $\langle F_0,F_2,F_4,F_6,\ldots\rangle = \langle 0,1,3,8,\ldots\rangle$, имеет простую производящую функцию

$$\sum_n F_{2n}z^n = \frac{z}{1-3z+z^2}\,. \qquad (7.24)$$

7.3 РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Настало время заняться вплотную одним из самых важных применений производящих функций — решением рекуррентных соотношений.

Для рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет последовательность $\langle g_n \rangle$, нам интересно получить выражение g_n через n в замкнутом виде. С помощью производящих функций эта задача решается в четыре шага, которые выполняются достаточно механически и их почти можно запрограммировать на компьютере:

1 Запишите одно уравнение, выражающее g_n через другие элементы последовательности. Это уравнение должно оставаться справедливым для всех целых n с учетом того, что $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = 0$.

2 Умножьте обе части уравнения на z^n и просуммируйте по всем n. В левой части получится сумма $\sum_n g_n z^n$, которая равна производящей функции $G(z)$. Правую часть следует преобразовать с тем, чтобы она превратилась в какое-то другое выражение, включающее $G(z)$.

3 Решите полученное уравнение, получив для $G(z)$ выражение в замкнутом виде.

4 Разложите $G(z)$ в степенной ряд и прочитайте коэффициент при z^n; это и будет замкнутый вид для g_n.

Причина работоспособности этого метода в том, что единая функция $G(z)$ представляет всю последовательность $\langle g_n \rangle$ и это представление допускает многие преобразования.

Пример 1: снова числа Фибоначчи

Попробуем в качестве примера повторить вывод формулы для чисел Фибоначчи из гл. 6. Там мы нащупывали путь, изучая новый метод; теперь будем действовать более систематически. Вот перед нами заданное рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} g_0 &= 0\,, \qquad g_1 = 1\,, \\ g_n &= g_{n-1} + g_{n-2} \qquad \text{при } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Найдем выражение для g_n в замкнутом виде, выполнив приведенные выше четыре шага.

Шаг 1 требует записать рекуррентное соотношение в виде „одного уравнения“ для g_n. Мы могли бы записать

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \leqslant 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \\ g_{n-1} + g_{n-2}, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

но это самообман. В действительности на шаге 1 нужна формула, не содержащая конструкций с перечислением случаев. Одно

уравнение

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$$

имеет место для $n \geqslant 2$, и, кроме того, оно справедливо при $n \leqslant 0$ (поскольку $g_0 = 0$ и $g_{\text{отриц.}} = 0$). Однако для $n = 1$ имеем 1 в левой части и 0 — в правой. К счастью, это затруднение легко преодолеть, достаточно просто прибавить $[n=1]$ к правой части; это увеличивает правую часть на 1 при $n = 1$ и не изменяет ее при $n \neq 1$. Итак, мы имеем

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + [n=1];$$

это как раз то уравнение, которое требуется на шаге 1.

Теперь шаг 2 предлагает преобразовать уравнение для $\langle g_n \rangle$ в уравнение для $G(z) = \sum_n g_n z^n$. Это несложная задача:

$$\begin{aligned} G(z) = \sum_n g_n z^n &= \sum_n g_{n-1} z^n + \sum_n g_{n-2} z^n + \sum_n [n=1] z^n \\ &= \sum_n g_n z^{n+1} + \sum_n g_n z^{n+2} + z \\ &= zG(z) + z^2 G(z) + z. \end{aligned}$$

Шаг 3 в нашем случае тоже прост; имеем

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2},$$

что, конечно, неудивительно.

Вся загвоздка в шаге 4. В гл. 6 выполнить этот шаг помогло внезапное озарение; теперь же будем двигаться медленнее, с тем чтобы позднее без затруднений справиться с этим шагом в более сложных задачах. Чему же равен

$$[z^n] \frac{z}{1 - z - z^2},$$

коэффициент при z^n в разложении $z/(1-z-z^2)$ в степенной ряд? Как в более общем случае, имея произвольную рациональную функцию

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P и Q — многочлены, определить коэффициент $[z^n]\, R(z)$?

Имеется один вид рациональных функций с особенно хорошими коэффициентами, а именно,

$$\frac{a}{(1 - \rho z)^{m+1}} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{m+n}{m} a \rho^n z^n. \qquad (7.25)$$

(В табл. 369 содержится эта формула в случае $\rho = 1$; общую формулу, показанную здесь, можно получить подстановкой ρz вместо z.) Коэффициенты конечной суммы функций вида (7.25),

$$S(z) = \frac{a_1}{(1-\rho_1 z)^{m_1+1}} + \frac{a_2}{(1-\rho_2 z)^{m_2+1}} + \cdots + \frac{a_l}{(1-\rho_l z)^{m_l+1}}, \qquad (7.26)$$

тоже неплохие:

$$[z^n]\,S(z) = a_1\binom{m_1+n}{m_1}\rho_1^n + a_2\binom{m_2+n}{m_2}\rho_2^n + \cdots + a_l\binom{m_l+n}{m_l}\rho_l^n. \qquad (7.27)$$

Мы покажем, что любая рациональная функция $R(z)$, такая, что $R(0) \neq \infty$, может быть выражена в виде

$$R(z) = S(z) + T(z), \qquad (7.28)$$

где $S(z)$ имеет вид (7.26), а $T(z)$ — многочлен. Таким образом, для коэффициентов $[z^n]\,R(z)$ имеется выражение в замкнутом виде. Нахождение $S(z)$ и $T(z)$ эквивалентно нахождению „разложения в элементарные дроби“ функции $R(z)$.

Заметьте, что $S(z) = \infty$ для значений z, равных $1/\rho_1, \ldots, 1/\rho_l$. Следовательно, числа ρ_k, которые нам надо найти, если мы хотим представить $R(z)$ в виде $S(z) + T(z)$, должны представлять собой обратные величины к числам α_k, для которых $Q(\alpha_k) = 0$. (Напомним, что $R(z) = P(z)/Q(z)$, где P и Q — многочлены; поэтому $R(z) = \infty$, только если $Q(z) = 0$.)

Допустим, что $Q(z)$ имеет вид

$$Q(z) = q_0 + q_1 z + \cdots + q_m z^m, \qquad \text{где } q_0 \neq 0 \text{ и } q_m \neq 0.$$

„Обращенный“ многочлен

$$Q^R(z) = q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \cdots + q_m$$

имеет важную взаимосвязь с $Q(z)$:

$$Q^R(z) = q_0(z-\rho_1)\ldots(z-\rho_m) \iff Q(z) = q_0(1-\rho_1 z)\ldots(1-\rho_m z).$$

Таким образом, корни Q^R обратны к корням Q и наоборот. Следовательно, для нахождения нужных нам чисел ρ_k достаточно разложить обращенный многочлен $Q^R(z)$ на множители.

Например, в случае последовательности Фибоначчи имеем

$$Q(z) = 1 - z - z^2; \qquad Q^R(z) = z^2 - z - 1.$$

Корни Q^R можно найти с помощью общей формулы для корней квадратного уравнения $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, положив в ней $(a, b, c) = (1, -1, -1)$; они оказываются равными

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, $Q^R(z) = (z - \phi)(z - \hat{\phi})$ и $Q(z) = (1 - \phi z)(1 - \hat{\phi} z)$.

Найдя числа ρ, можно перейти к построению разложения на элементарные дроби. Сделать это проще всего в случае различных корней; поэтому рассмотрим сначала этот частный случай. Мы можем сформулировать и доказать общий результат:

Теорема о разложении рациональных функций в случае различных корней

Если $R(z) = P(z)/Q(z)$, *где* $Q(z) = q_0(1 - \rho_1 z) \ldots (1 - \rho_l z)$, *и числа* $(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ *различны, а* $P(z)$ — *многочлен степени меньше* l, *то*

$$[z^n]\, R(z) = a_1 \rho_1^n + \cdots + a_l \rho_l^n\,, \quad \text{где} \;\; a_k = \frac{-\rho_k P(1/\rho_k)}{Q'(1/\rho_k)}. \qquad (7.29)$$

Доказательство: Пусть a_1, ..., a_l — константы с указанными выше значениями. Формула (7.29) будет справедлива, если $R(z) = P(z)/Q(z)$ равняется

$$S(z) = \frac{a_1}{1 - \rho_1 z} + \cdots + \frac{a_l}{1 - \rho_l z}\,.$$

Мы можем доказать, что $R(z) = S(z)$, если установим, что функция $T(z) = R(z) - S(z)$ не бесконечна при $z \to 1/\rho_k$. Отсюда будет следовать, что рациональная функция $T(z)$ вообще не обращается в бесконечность; следовательно $T(z)$ — многочлен. Кроме того, мы можем увидеть, что $T(z) \to 0$ при $z \to \infty$; следовательно $T(z)$ должна быть нулем.

Оставьте книгу открытой на этой странице — это потрясет ваших родителей.

Пусть $\alpha_k = 1/\rho_k$. Нам нужно доказать, что $\lim_{z \to \alpha_k} T(z) \neq \infty$, а для этого достаточно установить, что $\lim_{z \to \alpha_k} (z - \alpha_k) T(z) = 0$, поскольку $T(z)$ — рациональная функция z. Таким образом, мы хотим показать, что

$$\lim_{z \to \alpha_k} (z - \alpha_k) R(z) = \lim_{z \to \alpha_k} (z - \alpha_k) S(z)\,.$$

Предел в правой части равен $\lim_{z \to \alpha_k} a_k(z - \alpha_k)/(1 - \rho_k z) = -a_k/\rho_k$, поскольку $(1 - \rho_k z) = -\rho_k(z - \alpha_k)$ и $(z - \alpha_k)/(1 - \rho_j z) \to 0$ для $j \neq k$. Предел в левой части равен

$$\lim_{z \to \alpha_k} (z - \alpha_k) \frac{P(z)}{Q(z)} = P(\alpha_k) \lim_{z \to \alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{Q(z)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,,$$

по правилу Лопиталя. Таким образом, теорема доказана.

Вернемся к примеру с числами Фибоначчи. Здесь $P(z) = z$, а $Q(z) = 1 - z - z^2 = (1 - \phi z)(1 - \hat{\phi} z)$; следовательно $Q'(z) = -1 - 2z$ и

$$\frac{-\rho P(1/\rho)}{Q'(1/\rho)} = \frac{-1}{-1 - 2/\rho} = \frac{\rho}{\rho + 2}.$$

Значит, в соответствии с (7.29), коэффициент, с которым ϕ^n входит в $[z^n]\,R(z)$, равняется $\phi/(\phi + 2) = 1/\sqrt{5}$; коэффициент при $\hat{\phi}^n$ равен $\hat{\phi}/(\hat{\phi} + 2) = -1/\sqrt{5}$. Таким образом, теорема утверждает, что $F_n = (\phi^n - \hat{\phi}^n)/\sqrt{5}$, как в (6.123).

Если $Q(z)$ имеет кратные корни, то вычисления становятся более сложными, но мы можем усовершенствовать доказательство и установить справедливость следующего, более общего результата:

Общая теорема о разложении рациональных производящих функций

Если $R(z) = P(z)/Q(z)$, *где* $Q(z) = q_0(1 - \rho_1 z)^{d_1} \ldots (1 - \rho_l z)^{d_l}$ *и числа* $(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ *различны, а* $P(z)$ *— многочлен степени меньше, чем* $d_1 + \cdots + d_l$, *то*

$$[z^n]\,R(z) = f_1(n)\rho_1^n + \cdots + f_l(n)\rho_l^n \quad \text{при любом } n \geqslant 0, \tag{7.30}$$

где все $f_k(n)$ *являются многочленами степени* $d_k - 1$ *со старшим коэффициентом*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-\rho_k)^{d_k} P(1/\rho_k) d_k}{Q^{(d_k)}(1/\rho_k)} \\ &= \frac{P(1/\rho_k)}{(d_k - 1)!\, q_0 \prod_{j \neq k} (1 - \rho_j/\rho_k)^{d_j}}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Этот результат можно доказать индукцией по $\max(d_1, \ldots, d_l)$, используя тот факт, что

$$R(z) - \frac{a_1(d_1 - 1)!}{(1 - \rho_1 z)^{d_1}} - \cdots - \frac{a_l(d_l - 1)!}{(1 - \rho_l z)^{d_l}}$$

является рациональной функцией, в знаменателе которой стоит многочлен, не делящийся на $(1 - \rho_k z)^{d_k}$ для любых k.

Пример 2: довольно произвольное рекуррентное соотношение

Сейчас, познакомившись с более общими методами, мы готовы взяться за новые задачи. Попробуем решить в замкнутом виде рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} g_0 &= g_1 = 1, \\ g_n &= g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n \qquad \text{при } n \geqslant 2. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Всегда неплохо составить таблицу нескольких начальных значений, и рекуррентное соотношение позволяет легко сделать это:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$(-1)^n$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
g_n	1	1	4	5	14	23	52	97

Простой формулы не просматривается, и, более того, эта последовательность отсутствует в справочнике по целочисленным последовательностям Слоана [276]; так что нам никуда не деться от четырехшагового процесса, если только мы действительно хотим найти решение.

Шаг 1 прост; здесь требуется просто состряпать какие-то поправочные члены, чтобы учесть случаи $n < 2$. Уравнение

$$g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n[n \geqslant 0] + [n=1]$$

выполняется для всех целых n. Теперь можно выполнить шаг 2:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_n g_n z^n \\ &= \sum_n g_{n-1}z^n + 2\sum_n g_{n-2}z^n + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^n + \sum_{n=1} z^n \\ &= zG(z) + 2z^2G(z) + \frac{1}{1+z} + z\,. \end{aligned}$$

Замечание: верхний индекс в $\sum_{n=1} z^n$ не пропущен!

(В данном случае мы могли бы записать $\binom{-1}{n}$ вместо $(-1)^n[n \geqslant 0]$, что дает $\sum_n \binom{-1}{n} z^n = (1+z)^{-1}$ по биномиальной теореме.) Шаг 3 требует лишь элементарной алгебры и дает

$$G(z) = \frac{1+z(1+z)}{(1+z)(1-z-2z^2)} = \frac{1+z+z^2}{(1-2z)(1+z)^2}\,.$$

Теперь нам остался только шаг 4.

Некоторую сложность представляет множитель в квадрате в знаменателе, поскольку, как мы знаем, в случае кратных корней анализ труднее, чем в случае различных; но здесь встретился именно этот случай. У знаменателя два корня, $\rho_1 = 2$ и $\rho_2 = -1$; общая теорема о разложении (7.30) говорит нам, что

$$g_n = a_1 2^n + (a_2 n + c)(-1)^n$$

с некоторой константой c, причем

$$a_1 = \frac{1+1/2+1/4}{(1+1/2)^2} = \frac{7}{9}\,; \qquad a_2 = \frac{1-1+1}{1-2/(-1)} = \frac{1}{3}\,.$$

(Когда знаменатель имеет простые множители, удобнее использовать для вычисления a_k вторую формулу в (7.31), а не первую.

Нам нужно всего лишь подставить $z = 1/\rho_k$ всюду в $R(z)$, за исключением множителя, обращающегося в нуль, и поделить результат на $(d_k - 1)!$; это даст коэффициент перед $n^{d_k-1}\rho_k^n$.) Подстановка $n = 0$ показывает, что неизвестная пока константа c должна быть равна $\frac{2}{9}$; таким образом, ответом будет

$$g_n = \tfrac{7}{9}2^n + \left(\tfrac{1}{3}n + \tfrac{2}{9}\right)(-1)^n . \qquad (7.33)$$

Не составит большого труда проверить случаи $n = 1$ и 2, просто для того чтобы быть уверенными, что мы нигде не ошиблись. Может быть стоит попробовать и $n = 3$, поскольку формула выглядит несколько странно. Но она правильна: все так и должно быть.

Могли ли мы угадать формулу (7.33)? Возможно, включив в таблицу еще несколько значений, мы заметили бы, что $g_{n+1} \approx 2g_n$ для больших n. И, при большой удаче, мы, может быть, додумались бы до константы $\frac{7}{9}$. Однако определенно проще и надежнее использовать в качестве инструмента производящие функции.

Пример 3: взаимно рекуррентные последовательности

Иногда встречаются два или более рекуррентных соотношения, зависящие одно от другого. В таких случаях можно образовать производящие функции для обеих последовательностей и решить их, слегка расширив наш четырехшаговый метод.

Обратимся в качестве примера к задаче о покрытии костяшками домино $3 \times n$-прямоугольника, которую мы исследовали ранее в этой главе. Если мы хотим узнать только U_n — общее число вариантов покрытия домино $3 \times n$-прямоугольника, не разделяя случаи вертикальных и горизонтальных домино, то нет необходимости вдаваться в такие подробности, как раньше. Мы можем просто записать рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &U_0 = 1, \qquad U_1 = 0; \qquad V_0 = 0, \qquad V_1 = 1; \\ &U_n = 2V_{n-1} + U_{n-2}, \qquad V_n = U_{n-1} + V_{n-2} \qquad \text{при } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Здесь V_n — число покрытий $3 \times n$-прямоугольника без угла с использованием $(3n-1)/2$ костяшек домино. Эти соотношения легко вывести, если рассмотреть возможные расположения домино на левой стороне прямоугольника, как мы делали раньше. Здесь выписаны значения U_n и V_n для малых n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
U_n	1	0	3	0	11	0	41	0
V_n	0	1	0	4	0	15	0	56

(7.34)

Найдем, в четыре шага, выражения в замкнутом виде. Сначала (шаг 1) запишем

$$U_n = 2V_{n-1} + U_{n-2} + [n=0], \qquad V_n = U_{n-1} + V_{n-2}$$

при любых n. Следовательно (шаг 2),

$$U(z) = 2zV(z) + z^2U(z) + 1\,, \qquad V(z) = zU(z) + z^2V(z)\,.$$

Теперь (шаг 3) нам требуется решить два уравнения с двумя неизвестными; это легко сделать, получив из второго уравнения $V(z) = zU(z)/(1-z^2)$; далее находим

$$U(z) = \frac{1-z^2}{1-4z^2+z^4}\,, \qquad V(z) = \frac{z}{1-4z^2+z^4}\,. \tag{7.35}$$

(Мы уже видели эту формулу для $U(z)$ в (7.10), но там вместо z^2 стояло z^3. В тот раз n было числом костяшек, а здесь n — ширина прямоугольника.)

Знаменатель $1-4z^2+z^4$ есть функция от z^2; это обеспечивает $U_{2n+1} = 0$ и $V_{2n} = 0$, как и должно быть. Можно извлечь выгоду из этого свойства, сохранив z^2 при разложении знаменателя на множители: нам вовсе не обязательно разлагать $1-4z^2+z^4$ в произведение четырех множителей вида $(1-\rho_k z)$, поскольку двух множителей вида $(1-\rho_k z^2)$ будет достаточно для определения коэффициентов. Иными словами, если определить производящую функцию

$$W(z) = \frac{1}{1-4z+z^2} = W_0 + W_1 z + W_2 z^2 + \cdots\,, \tag{7.36}$$

то будем иметь $V(z) = zW(z^2)$ и $U(z) = (1-z^2)W(z^2)$; следовательно, $V_{2n+1} = W_n$ и $U_{2n} = W_n - W_{n-1}$. Работая с более простой функцией $W(z)$, мы сэкономим силы и время.

Многочлен $1-4z+z^2$ разлагается на множители $(z-2-\sqrt{3}\,)$ и $(z-2+\sqrt{3}\,)$, их можно также записать в виде $\bigl(1-(2+\sqrt{3}\,)z\bigr)$ и $\bigl(1-(2-\sqrt{3}\,)z\bigr)$, поскольку этот многочлен обратен сам себе. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} V_{2n+1} = W_n &= \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3}\,)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3}\,)^n\,,\\ U_{2n} = W_n - W_{n-1} &= \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3}\,)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3}\,)^n\\ &= \frac{(2+\sqrt{3}\,)^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3}\,)^n}{3+\sqrt{3}}\,. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Это и есть искомое выражение для числа $3\times n$-покрытий.

В данном случае мы можем упростить формулу для U_{2n}, если заметим, что второе слагаемое всегда лежит между 0 и 1. Число U_{2n} — целое, поэтому

$$U_{2n} = \left\lceil \frac{(2+\sqrt{3}\,)^n}{3-\sqrt{3}} \right\rceil \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{7.38}$$

На самом деле, второе слагаемое $(2-\sqrt{3})^n/(3+\sqrt{3})$ исчезающе мало при больших n, поскольку $2-\sqrt{3} \approx 0.268$. Это следует иметь в виду при использовании формулы (7.38) для расчетов. Например, довольно дорогой карманный калькулятор, выпускаемый фирмой с хорошей репутацией, при вычислении $(2+\sqrt{3})^{10}/(3-\sqrt{3})$ дал в ответе 413403.0005. Этот ответ точен до девятой значащей цифры; однако точное значение чуть *меньше* 413403, а не чуть больше. Следовательно, было бы ошибкой вычислять потолок от 413403.0005; точный ответ, $U_{20} = 413403$, получается *округлением* до ближайшего целого. Потолок может быть опасен.

Полы тоже не всегда надежны, уж поверьте мне.

Пример 4: замкнутое выражение для задачи размена

Мы оставили задачу размена, только лишь подсчитав число способов выплаты 50 центов. А как вычислить то же число для суммы в 1 доллар или в миллион долларов — размен производится по-прежнему пенни, никелями, даймами, четвертями и полудолларами?

Ранее мы вывели производящую функцию

$$C(z) = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-z^5}\,\frac{1}{1-z^{10}}\,\frac{1}{1-z^{25}}\,\frac{1}{1-z^{50}};$$

это рациональная функция от z, знаменатель которой имеет степень 91. Таким образом, мы можем разложить знаменатель на 91 множитель и выразить C_n — число способов дать n центов сдачи — в „замкнутом виде“, состоящем из 91 слагаемого. Но такое ужасное выражение не лезет ни в какие ворота. Нельзя ли в этом частном случае найти что-либо лучшее, а не применять общий метод?

А вот и первый проблеск надежды: оказывается, знаменатель почти является функцией z^5. Тот же трюк, который мы использовали для упрощения вычислений в случае знаменателя $1-4z^2+z^4$, заметив, что это есть функция от z^2, может быть применен и к $C(z)$, если заменить $1/(1-z)$ на $(1+z+z^2+z^3+z^4)/(1-z^5)$:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{1-z^5}\,\frac{1}{1-z^5}\,\frac{1}{1-z^{10}}\,\frac{1}{1-z^{25}}\,\frac{1}{1-z^{50}} \\ &= (1+z+z^2+z^3+z^4)\check{C}(z^5), \\ \check{C}(z) &= \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-z^2}\,\frac{1}{1-z^5}\,\frac{1}{1-z^{10}}. \end{aligned}$$

Степень знаменателя этой „сжатой“ функции $\check{C}(z)$ уже только 19, так что эта функция гораздо лучше исходной. Новое выражение для $C(z)$ показывает, в частности, что $C_{5n} = C_{5n+1} = C_{5n+2} = C_{5n+3} = C_{5n+4}$; и действительно, это соотношение легко объяснить: чаевые в 53 цента можно дать ровно столькими же способами, как и чаевые в 50 центов, поскольку количество пенни по модулю 5 заранее известно.

Однако даже для $\check{C}(z)$ не существует простого выражения, основанного на корнях знаменателя. Вероятно, простейший способ вычисления коэффициентов $\check{C}(z)$ получится, если заметить, что каждый сомножитель в знаменателе является делителем $1-z^{10}$. Следовательно, можем записать

О сжатой функции и рассуждать будем сжато.

$$\check{C}(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{10})^5}, \quad \text{где } A(z) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_{31} z^{31}. \quad (7.39)$$

Вот, для полноты картины, развернутое выражение для $A(z)$:

$$\begin{aligned}
&(1+z+\cdots+z^9)^2(1+z^2+\cdots+z^8)(1+z^5)\\
&\quad = 1+2z+4z^2+6z^3+9z^4+13z^5+18z^6+24z^7\\
&\qquad +31z^8+39z^9+45z^{10}+52z^{11}+57z^{12}+63z^{13}+67z^{14}+69z^{15}\\
&\qquad +69z^{16}+67z^{17}+63z^{18}+57z^{19}+52z^{20}+45z^{21}+39z^{22}+31z^{23}\\
&\qquad +24z^{24}+18z^{25}+13z^{26}+9z^{27}+6z^{28}+4z^{29}+2z^{30}+z^{31}.
\end{aligned}$$

И, в завершение, воспользовавшись тем, что $1/(1-z^{10})^5 = \sum_{k\geqslant 0}\binom{k+4}{4}z^{10k}$, получаем следующее выражение для коэффициентов $\check{C}_n = [z^n]\,\check{C}(z)$, в котором $n = 10q + r$ и $0 \leqslant r < 10$:

$$\begin{aligned}
\check{C}_{10q+r} &= \sum_{j,k} A_j\binom{k+4}{4}[10q+r=10k+j]\\
&= A_r\binom{q+4}{4} + A_{r+10}\binom{q+3}{4} + A_{r+20}\binom{q+2}{4} + A_{r+30}\binom{q+1}{4}.
\end{aligned} \quad (7.40)$$

Здесь фактически содержится 10 различных случаев, по одному на каждое значение r; но это все же неплохая замкнутая формула в сравнении с альтернативами, включающими степени комплексных чисел.

Используя это выражение, можем узнать, например, значение $C_{50q} = \check{C}_{10q}$. Здесь $r=0$, и мы имеем

$$C_{50q} = \binom{q+4}{4} + 45\binom{q+3}{4} + 52\binom{q+2}{4} + 2\binom{q+1}{4}.$$

Число способов заплатить 50 центов составляет $\binom{5}{4} + 45\binom{4}{4} = 50$; для суммы в 1 доллар будет $\binom{6}{4} + 45\binom{5}{4} + 52\binom{4}{4} = 292$ способа; а для миллиона долларов это число составит

$$\binom{2000004}{4} + 45\binom{2000003}{4} + 52\binom{2000002}{4} + 2\binom{2000001}{4}$$
$$= 66666793333412666685000001.$$

Пример 5: расходящийся ряд

Попытаемся теперь найти замкнутое выражение для чисел g_n, определяемых соотношениями:

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1,\\
g_n &= n g_{n-1} \qquad \text{при } n > 0.
\end{aligned}$$

Сегодня говорят уже о <u>фемто</u>секундах.

Поразмышляв над ними несколько наносекунд, мы поймем, что g_n есть просто $n!$; метод суммирующих множителей, описанный в гл. 2, немедленно подскажет этот ответ. Однако попробуем найти решение с помощью производящих функций хотя бы лишь для того, чтобы увидеть, что получится. (Действительно мощный метод должен работать и для простых соотношений, наподобие этого, равно как и в других случаях, когда мы не можем угадать ответ.)

Уравнение

$$g_n = ng_{n-1} + [n=0]$$

справедливо для всех n; оно дает

$$G(z) = \sum_n g_n z^n = \sum_n ng_{n-1} z^n + \sum_{n=0} z^n .$$

Для завершения шага 2 надо выразить $\sum_n ng_{n-1} z^n$ через $G(z)$; таблица основных маневров (табл. 368) подсказывает, что здесь надо как-то использовать $G'(z) = \sum_n ng_n z^{n-1}$. Поэтому подгоним наше выражение к сумме требуемого вида:

$$\begin{aligned} G(z) &= 1 + \sum_n (n+1)g_n z^{n+1} \\ &= 1 + \sum_n ng_n z^{n+1} + \sum_n g_n z^{n+1} \\ &= 1 + z^2G'(z) + zG(z) . \end{aligned}$$

Проверим это уравнение, подставив значения g_n для малых n. Таким образом,

$$\begin{aligned} G &= 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + 24z^4 + \cdots , \\ G' &= 1 + 4z + 18z^2 + 96z^3 + \cdots , \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} z^2G' &= z^2 + 4z^3 + 18z^4 + 96z^5 + \cdots , \\ zG &= z + z^2 + 2z^3 + 6z^4 + 24z^5 + \cdots , \\ 1 &= 1 . \end{aligned}$$

Сложив эти три строки, получим G, так что пока все в порядке. Кстати, часто будет удобнее писать 'G' вместо '$G(z)$'; дополнительное '(z)' просто загромождает формулу, если мы не меняем z на что-нибудь еще.

Теперь предстоит сделать шаг 3, и он отличается от того, что мы делали раньше, поскольку здесь требуется решить дифференциальное уравнение. Однако с этим дифференциальным уравнением мы можем справиться при помощи гипергеометрических рядов из разд. 5.6; так что наши методы не так уж плохи. (Если

вы не знакомы с гипергеометрическими функциями, не беспокойтесь — мы все сделаем очень быстро.)

„Мы все сделаем очень быстро!" Так говорил доктор, втыкая в меня во-о-от такой гипершприц.

Во-первых, следует избавиться от константы '1'; возьмем поэтому производную от обеих частей:

$$G' = (z^2G' + zG + 1)' = (2zG' + z^2G'') + (G + zG')$$
$$= z^2G'' + 3zG' + G\,.$$

По развитой в гл. 5 теории следует переписать это с использованием оператора ϑ, а из упр. 6.13 мы знаем, что

$$\vartheta G = zG'\,, \qquad \vartheta^2 G = z^2G'' + zG'\,.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение запишется так:

$$\vartheta G = z\vartheta^2 G + 2z\vartheta G + zG = z(\vartheta + 1)^2 G\,.$$

В соответствии с (5.109), решением при $g_0 = 1$ будет гипергеометрический ряд $F(1, 1; ; z)$.

Шаг 3 оказался сложнее, чем мы ожидали; но теперь, когда мы знаем функцию G, шаг 4 очень прост — определение гипергеометрического ряда (5.76) дает требуемое разложение:

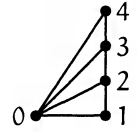
$$G(z) = F\left({1, 1 \atop } \middle| z\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1^{\overline{n}}\, 1^{\overline{n}}\, z^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} n!\, z^n\,.$$

Мы подтвердили выражение, которое знали все время, $g_n = n!$.

Обратите внимание, что метод производящих функций дал правильный ответ даже несмотря на то, что $G(z)$ расходится для всех ненулевых z. Последовательность $n!$ растет слишком быстро и величина $|n!\,z^n|$ стремится к ∞ при $n \to \infty$, если только $z \neq 0$. Это показывает, что с формальными степенными рядами можно выполнять алгебраические действия, не заботясь о сходимости.

Пример 6: рекуррентное соотношение с возвратом к самому началу

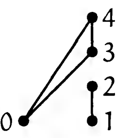
В завершение этого раздела рассмотрим применение производящих функций к задаче из теории графов. *Фан* порядка n — это граф с вершинами $\{0, 1, \ldots, n\}$ и $2n - 1$ ребрами, определяемыми следующим образом: вершина 0 соединяется ребрами с каждой из остальных n вершин, а вершина k соединяется с вершиной $k + 1$ для $1 \leqslant k < n$. Ниже, для примера, нарисован фан порядка 4, имеющий 5 вершин и 7 ребер.



Интересующая нас задача состоит в том, чтобы найти число f_n остовных деревьев в таком графе. *Остовным деревом* называется подграф, содержащий все вершины и такое количество ребер,

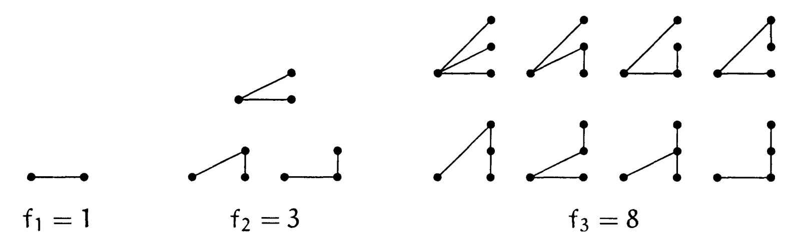
чтобы этот подграф был связным, но не настолько много, чтобы в нем появился цикл. Оказывается, что любое остовное дерево в графе с $n+1$ вершинами имеет ровно n ребер. Подграф, менее чем с n ребрами, не будет связным, а если число ребер превысит n, в подграфе появится цикл; это доказывается в книгах по теории графов.

Существует $\binom{2n-1}{n}$ способов выбрать n ребер из $2n-1$, присутствующих в фане порядка n, но не всякий такой выбор дает остовное дерево. Например, подграф



имеет четыре ребра, но не является остовным деревом; в нем есть цикл, идущий из 0 в 4, затем в 3 и в 0, кроме того, вершины $\{1,2\}$ не имеют связи с остальными вершинами. Мы хотим подсчитать, сколько из $\binom{2n-1}{n}$ вариантов все же дают остовное дерево.

Рассмотрим несколько начальных случаев. Можно легко перечислить все остовные деревья при $n = 1$, 2 и 3:



$f_1 = 1$ $\qquad$ $f_2 = 3$ $\qquad$ $f_3 = 8$

(Не понадобится указывать метки у вершин, если мы будем всегда рисовать вершину 0 слева.) Что можно сказать про случай $n = 0$? На первый взгляд кажется разумным положить $f_0 = 1$; но мы возьмем $f_0 = 0$, поскольку само существование фана порядка 0 (который должен иметь $2n - 1 = -1$ ребро) вызывает серьезные сомнения.

Наша четырехшаговая процедура предписывает найти рекуррентное соотношение для f_n, справедливое при любом n. Для получения такого соотношения рассмотрим, как самая верхняя вершина (вершина n) соединяется с остальным деревом. Если она не соединена с вершиной 0, то должно быть соединение с вершиной $n-1$, поскольку эта последняя вершина должна соединяться с остальным графом. В таком случае любое из f_{n-1} остовных деревьев для остающегося графа (фана с вершинами от 0 до $n-1$) вместе с новым ребром образует остовное дерево для всего графа. В противном случае вершина n *соединена* с вершиной 0 и найдется некоторое число $k \leqslant n$, такое, что вершины $n, n-1, \ldots, k$ непосредственно соединены между собой, но ребро между вершинами k и $k-1$ не входит в поддерево. Тогда в дереве не может быть ребер между 0 и $\{n-1, \ldots, k\}$, иначе получился

бы цикл. Следовательно, для $k = 1$ остовное дерево полностью определено. Если же $k > 1$, то для завершения остовного дерева достаточно добавить любое из f_{k-1} остовных деревьев на вершинах $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Вот, к примеру, что показывает этот анализ для $n = 4$:

$k = 4$ $\quad$ $k = 3$ $\quad$ $k = 2$ $\quad$ $k = 1$

$$f_4 = f_3 + f_3 + f_2 + f_1 + 1$$

Общее уравнение, справедливое для $n \geqslant 1$, имеет вид

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \cdots + f_1 + 1\,.$$

(Выглядит все так, как будто '1' в конце есть f_0 и нам следовало бы взять $f_0 = 1$; но мы будем тверды в своем выборе.) Небольшое изменение — и уравнение будет справедливо при всех целых n:

$$f_n = f_{n-1} + \sum_{k<n} f_k + [n>0]\,. \tag{7.41}$$

Это рекуррентное соотношение как раз и содержит „возврат к самому началу“ от f_{n-1} через все предыдущие значения, и в этом отличие от других рекуррентных соотношений, которые мы видели в этой главе. Чтобы избавиться от аналогичной суммы в правой части рекуррентного соотношения (2.12) для анализа метода быстрой сортировки, мы использовали в гл. 2 специальный метод, а именно вычли один экземпляр соотношения из другого ($f_{n+1} - f_n$). Здесь этот прием тоже годится; но, как мы увидим, метод производящих функций позволяет непосредственно работать с такими суммами. (И это очень хорошо, поскольку вскоре нам встретятся гораздо более сложные рекуррентные соотношения.)

Шаг 1 завершен; теперь, на шаге 2, нам придется применить новый прием:

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_n f_n z^n &= \sum_n f_{n-1} z^n + \sum_{k,n} f_k z^n [k<n] + \sum_n [n>0] z^n \\ &= zF(z) + \sum_k f_k z^k \sum_n [n>k] z^{n-k} + \frac{z}{1-z} \\ &= zF(z) + F(z) \sum_{m>0} z^m + \frac{z}{1-z} \\ &= zF(z) + F(z)\,\frac{z}{1-z} + \frac{z}{1-z}\,. \end{aligned}$$

Ключевой трюк здесь — замена z^n на $z^k\, z^{n-k}$; это позволяет выразить двойную сумму через $F(z)$, как того требует шаг 2.

Шаг 3 теперь сводится к простой алгебре и получаем

$$F(z) = \frac{z}{1 - 3z + z^2}.$$

Тот, кто стремится все запоминать, узнает в этом выражении производящую функцию (7.24) для чисел Фибоначчи с четными номерами. Таким образом, шаг 4 не нужен; мы уже нашли несколько неожиданный ответ для задачи об остовах фанов:

$$f_n = F_{2n} \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{7.42}$$

7.4 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Шаг 4 нашей процедуры станет проще, если мы будем знать коэффициенты многих различных степенных рядов. Разложения из табл. 369 весьма полезны, если они применимы, однако существует и много других типов выражений в замкнутом виде. Таким образом, следует дополнить эту таблицу еще одной, в которую будут включены степенные ряды, соответствующие „специальным числам" из гл. 6.

В табл. 386 содержится то, что нам нужно. Все эти тождества нетрудно доказать, так что нет необходимости задерживаться на них; предполагается, что мы будем обращаться к этой таблице, когда столкнемся с какой-либо новой задачей. Есть, однако, красивое доказательство формулы (7.43), на котором сто́ит остановиться. Начинаем с тождества

$$\frac{1}{(1-z)^{x+1}} = \sum_n \binom{x+n}{n} z^n$$

и дифференцируем его по x. Выражение $(1-z)^{-x-1}$ в левой части равняется $e^{(x+1)\ln(1/(1-z))}$, так что d/dx внесет множитель $\ln\bigl(1/(1-z)\bigr)$. В правой части числитель $\binom{x+n}{n}$ равен $(x+n)\ldots(x+1)$, и d/dx разобьет его на сумму n слагаемых, что эквивалентно умножению $\binom{x+n}{n}$ на

$$\frac{1}{x+n} + \cdots + \frac{1}{x+1} = H_{x+n} - H_x.$$

Замена x на m дает (7.43). Заметьте, что $H_{x+n} - H_x$ имеет смысл, даже если x нецелое.

Кстати, при дифференцировании сложных произведений обычно оказывается гораздо лучше оставлять их в виде произведений, чем записывать производную как сумму. К примеру, правая часть тождества

$$\frac{d}{dx}\bigl((x+n)^n \ldots (x+1)^1\bigr) = (x+n)^n \ldots (x+1)^1 \left(\frac{n}{x+n} + \cdots + \frac{1}{x+1}\right)$$

была бы куда менее наглядной, если записать ее в виде суммы.

Таблица 386 Производящие функции для специальных чисел.

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geqslant 0}(H_{m+n}-H_m)\binom{m+n}{n}z^n \quad (7.43)$$

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n\geqslant 0}B_n\frac{z^n}{n!} \quad (7.44)$$

$$\frac{F_m z}{1-(F_{m-1}+F_{m+1})z+(-1)^m z^2}=\sum_{n\geqslant 0}F_{mn}z^n \quad (7.45)$$

$$\sum_k \left\{ m \atop k \right\}\frac{k!\,z^k}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n\geqslant 0}n^m z^n \quad (7.46)$$

$$(z^{-1})^{\overline{-m}}=\frac{z^m}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-mz)}=\sum_{n\geqslant 0}\left\{ n \atop m \right\}z^n \quad (7.47)$$

$$z^{\overline{m}}=z(z+1)\ldots(z+m-1)=\sum_{n\geqslant 0}\left[m \atop n \right]z^n \quad (7.48)$$

$$(e^z-1)^m=m!\sum_{n\geqslant 0}\left\{ n \atop m \right\}\frac{z^n}{n!} \quad (7.49)$$

$$\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^m=m!\sum_{n\geqslant 0}\left[n \atop m \right]\frac{z^n}{n!} \quad (7.50)$$

$$\left(\frac{z}{\ln(1+z)}\right)^m=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\left\{ m \atop m-n \right\}\Big/\binom{m-1}{n} \quad (7.51)$$

$$\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^m=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\left[m \atop m-n \right]\Big/\binom{m-1}{n} \quad (7.52)$$

$$e^{z+wz}=\sum_{m,n\geqslant 0}\binom{n}{m}w^m\frac{z^n}{n!} \quad (7.53)$$

$$e^{w(e^z-1)}=\sum_{m,n\geqslant 0}\left\{ n \atop m \right\}w^m\frac{z^n}{n!} \quad (7.54)$$

$$\frac{1}{(1-z)^w}=\sum_{m,n\geqslant 0}\left[n \atop m \right]w^m\frac{z^n}{n!} \quad (7.55)$$

$$\frac{1-w}{e^{(w-1)z}-w}=\sum_{m,n\geqslant 0}\left\langle n \atop m \right\rangle w^m\frac{z^n}{n!} \quad (7.56)$$

У общих тождеств из табл. 386 имеется много важных частных случаев. Например, формула (7.43) при $m = 0$ упрощается до производящей функции для чисел H_n:

$$\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_n H_n z^n\,. \tag{7.57}$$

Это уравнение можно вывести и другими способами; например, можно взять степенной ряд для $\ln\bigl(1/(1-z)\bigr)$ и поделить его на $1-z$, получая производящую функцию для частичных сумм.

Тождества (7.51) и (7.52) включают отношения $\left\{{m \atop m-n}\right\}/\binom{m-1}{n}$ и $\left[{m \atop m-n}\right]/\binom{m-1}{n}$ соответственно, которые для $n \geqslant m$ превращаются в неопределенности вида $0/0$. Им, однако, можно придать смысл, воспользовавшись многочленами Стирлинга из (6.45). Действительно, имеем

$$\left\{{m \atop m-n}\right\}\Big/\binom{m-1}{n} = (-1)^{n+1} n!\, m\sigma_n(n-m)\,, \tag{7.58}$$

$$\left[{m \atop m-n}\right]\Big/\binom{m-1}{n} = n!\, m\sigma_n(m)\,. \tag{7.59}$$

Так, например, для $m = 1$ формулу (7.51) следует записывать не как степенной ряд $\sum_{n\geqslant 0}(z^n/n!)\left\{{1 \atop 1-n}\right\}/\binom{0}{n}$, а в следующем виде:

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = -\sum_{n\geqslant 0}(-z)^n\sigma_n(n-1) = 1 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{12}z^2 + \cdots\,.$$

Тождества (7.53), (7.54), (7.55) и (7.56) представляют „дважды производящие функции“ или „суперпроизводящие функции“, поскольку они имеют вид $G(w,z) = \sum_{m,n} g_{m,n} w^m z^n$. Коэффициентом при w^m является производящая функция относительно переменной z; коэффициентом при z^n является производящая функция относительно переменной w. Уравнению (7.56) можно придать более симметричный вид

$$\frac{e^w - e^z}{we^z - ze^w} = \sum_{m,n\geqslant 0}\left\langle {m+n+1 \atop m} \right\rangle \frac{w^m z^n}{(m+n+1)!}\,. \tag{7.60}$$

7.5 СВЕРТКИ

Я всегда считал, что свертка — это то, что происходит с моими мозгами, когда я пытаюсь найти доказательство.

Сверткой двух последовательностей $\langle f_0, f_1, \ldots\rangle = \langle f_n\rangle$ и $\langle g_0, g_1, \ldots\rangle = \langle g_n\rangle$ называется последовательность $\langle f_0g_0,\ f_0g_1 + f_1g_0,\ \ldots\rangle = \langle\sum_k f_k g_{n-k}\rangle$. Мы видели в разд. 5.4 и 7.2, что свертке последовательностей отвечает умножение их производящих функций. Это наблюдение позволяет легко вычислить многие суммы, с которыми было бы трудно справиться другими методами.

Пример 1: фибоначчиевы свертки

Попробуем, для примера, подсчитать в замкнутом виде сумму $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k}$. Это свертка последовательности $\langle F_n \rangle$ с самой собой, поэтому интересующая нас сумма должна быть коэффициентом при z^n в $F(z)^2$, где $F(z)$ — производящая функция для $\langle F_n \rangle$. Все, что от нас требуется,— вычислить значение этого коэффициента.

Производящая функция $F(z)$ есть $z/(1-z-z^2)$ — отношение многочленов; следовательно, как мы знаем из общей теоремы о разложении рациональных функций, ответ можно получить, найдя разложение в правильные дроби. Можно просто применить общую теорему о разложении (7.30) и проделать требуемые вычисления; или же можно использовать представление

$$\begin{aligned} F(z)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\phi z)^2} - \frac{2}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi} z)} + \frac{1}{(1-\hat{\phi} z)^2}\right) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\phi^n z^n - \frac{2}{5}\sum_{n\geqslant 0} F_{n+1} z^n + \frac{1}{5}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\hat{\phi}^n z^n . \end{aligned}$$

Вместо того чтобы записывать ответ через ϕ и $\hat{\phi}$, попробуем найти замкнутое выражение через числа Фибоначчи. Вспоминая, что $\phi + \hat{\phi} = 1$, получим

$$\begin{aligned} \phi^n + \hat{\phi}^n &= [z^n]\left(\frac{1}{1-\phi z} + \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right) \\ &= [z^n]\,\frac{2-(\phi+\hat{\phi})z}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi} z)} = [z^n]\,\frac{2-z}{1-z-z^2} = 2F_{n+1} - F_n . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F(z)^2 = \frac{1}{5}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(2F_{n+1}-F_n)z^n - \frac{2}{5}\sum_{n\geqslant 0} F_{n+1}\, z^n ,$$

и мы получаем желаемый ответ

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5} . \qquad (7.61)$$

Например, для $n = 3$ формула дает $F_0F_3 + F_1F_2 + F_2F_1 + F_3F_0 = 0+1+1+0 = 2$ в левой части и $(6F_4 - 4F_3)/5 = (18-8)/5 = 2$ — в правой.

Пример 2: гармонические свертки

Эффективность работы определенного компьютерного алгоритма, называемого „сортировка по образцу“, определяется значением суммы

$$T_{m,n} = \sum_{0 \leqslant k < n} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k}, \qquad \text{целые } m, n \geqslant 0.$$

В упр. 5.58 эта сумма вычисляется с помощью довольно хитроумной двойной индукции с использованием суммирующих множителей. Можно достичь результата гораздо проще, если заметить, что $T_{m,n}$ есть n-й член свертки $\langle \binom{0}{m}, \binom{1}{m}, \binom{2}{m}, \ldots \rangle$ с $\langle 0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots \rangle$. Для обеих последовательностей в табл. 369 можно найти простые производящие функции:

$$\sum_{n \geqslant 0} \binom{n}{m} z^n = \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}}, \qquad \sum_{n > 0} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}.$$

Следовательно, по (7.43),

$$T_{m,n} = [z^n] \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \ln \frac{1}{1-z} = [z^{n-m}] \frac{1}{(1-z)^{m+1}} \ln \frac{1}{1-z}$$
$$= (H_n - H_m) \binom{n}{n-m}.$$

В действительности имеется еще много сумм, сводящихся к сверткам такого же вида, поскольку для любых r и s

$$\frac{1}{(1-z)^{r+1}} \ln \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{(1-z)^{s+1}} = \frac{1}{(1-z)^{r+s+2}} \ln \frac{1}{1-z}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^n, получаем общее тождество

$$\sum_k \binom{r+k}{k} \binom{s+n-k}{n-k} (H_{r+k} - H_r)$$
$$= \binom{r+s+n+1}{n} (H_{r+s+n+1} - H_{r+s+1}). \qquad (7.62)$$

И так гармонично...

Это тождество выглядит слишком уж хорошо, чтобы быть верным. Но проверка, по крайней мере, для $n = 2$, проходит успешно:

$$\binom{r+1}{1}\binom{s+1}{1}\frac{1}{r+1} + \binom{r+2}{2}\binom{s+0}{0}\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+1}\right)$$
$$= \binom{r+s+3}{2}\left(\frac{1}{r+s+3} + \frac{1}{r+s+2}\right).$$

Частные случаи, например, $s = 0$, столь же замечательны, как и общее тождество.

Но это еще не все. Мы можем, воспользовавшись тождеством для свертки

$$\sum_k \binom{r+k}{k}\binom{s+n-k}{n-k} = \binom{r+s+n+1}{n},$$

перенести H_r в другую часть, поскольку H_r не зависит от k:

$$\sum_k \binom{r+k}{k}\binom{s+n-k}{n-k} H_{r+k} = \binom{r+s+n+1}{n}\left(H_{r+s+n+1} - H_{r+s+1} + H_r\right). \quad (7.63)$$

Но и это не все! Если r и s — неотрицательные целые l и m, то можно заменить $\binom{r+k}{k}$ на $\binom{l+k}{l}$ и $\binom{s+n-k}{n-k}$ на $\binom{m+n-k}{m}$; затем, заменив k на $k-l$ и n на $n-m-l$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{l}\binom{n-k}{m} H_k = \binom{n+1}{l+m+1}\left(H_{n+1} - H_{l+m+1} + H_l\right), \quad \text{целые } l, m, n \geqslant 0. \quad (7.64)$$

Даже частный случай $l = m = 0$ этого тождества вызвал затруднения в гл. 2! (См. (2.36).) Мы прошли немалый путь.

Пример 3: свертки сверток

Если мы образуем свертку последовательностей $\langle f_n \rangle$ и $\langle g_n \rangle$, а затем свернем результат с какой-то третьей последовательностью $\langle h_n \rangle$, то n-й член полученной последовательности будет равен

$$\sum_{j+k+l=n} f_j\, g_k\, h_l\,.$$

Производящей функцией этой тройной свертки будет, разумеется, произведение $F(z)G(z)H(z)$. Аналогично, m-кратная свертка последовательности $\langle g_n \rangle$ с самой собой имеет n-й член вида

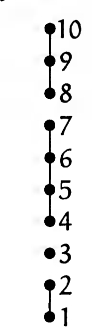
$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} g_{k_1}\, g_{k_2} \cdots g_{k_m},$$

а ее производящая функция равна $G(z)^m$.

Мы можем применить эти соображения к рассмотренной ранее проблеме деревьев в фане (пример 6 в разд. 7.3). Оказывается, существует и другой метод вычислить f_n — число остовных деревьев в n-фане; он основан на анализе конфигураций ребер дерева, соединяющих вершины $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ребро между вершинами k и $k+1$ может быть или включено в поддерево, или же нет; каждый способ выбора таких ребер задает разбиение множества вершин на блоки соединенных соседних вершин. Например, если

Очень прочные блоки.

$n = 10$, мы могли бы соединить вершины $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{4,5,6,7\}$ и $\{8,9,10\}$:



Сколько же можно получить остовных деревьев, добавляя ребра в вершину 0? Нам нужно соединить вершину 0 с каждым из четырех блоков; существует два способа соединения 0 с $\{1,2\}$, один способ соединения с $\{3\}$, четыре способа — с $\{4,5,6,7\}$ и три способа — с $\{8,9,10\}$, что дает в итоге $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ способа. Суммирование по всем способам разбиения на блоки дает следующее выражение для общего числа остовных деревьев:

$$f_n = \sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m>0}} k_1 k_2 \ldots k_m \,. \tag{7.65}$$

Например, $f_4 = 4+3\cdot1+2\cdot2+1\cdot3+2\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot1\cdot1 = 21$.

Это — сумма m-кратных сверток последовательности $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$ для $m = 1, 2, 3, \ldots$; следовательно, производящей функцией для $\langle f_n \rangle$ будет

$$F(z) = G(z) + G(z)^2 + G(z)^3 + \cdots = \frac{G(z)}{1 - G(z)},$$

где $G(z)$ — производящая функция последовательности $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$, а именно $z/(1-z)^2$. Таким образом, имеем

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2 - z} = \frac{z}{1 - 3z + z^2},$$

как и ранее. Такой подход к вычислению $\langle f_n \rangle$ симметричнее и привлекательнее хитроумного рекуррентного соотношения, с которым мы имели дело ранее.

Пример 4: рекуррентное соотношение со сверткой

Наш следующий пример особенно важен; это, на самом деле, „классический пример", иллюстрирующий полезность производящих функций при решении рекуррентных соотношений.

Пусть имеется $n+1$ переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и мы хотим вычислить их произведение при помощи n умножений. Сколько найдется способов (C_n) расставить скобки в произведении $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$

так, чтобы порядок умножений был полностью определен? Например, для $n = 2$ существует два способа: $x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)$ и $(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2$. Для $n = 3$ имеется уже пять способов:

$$x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)), \ x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3), \ (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3),$$
$$(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3, \ ((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 .$$

Таким образом, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$; имеем также $C_1 = 1$ и $C_0 = 1$.

Попробуем применить четырехшаговую процедуру из разд. 7.3. Какому же рекуррентному соотношению удовлетворяет последовательность C_i? Ключевым моментом здесь является то наблюдение, что для $n > 0$ ровно одна операция '$\cdot$' лежит вне всех скобок; это последнее умножение, связывающее все в единое целое. Если эта операция располагается между x_k и x_{k+1}, то имеется C_k способов расстановки скобок в произведении $x_0 \cdot \ldots \cdot x_k$ и C_{n-k-1} способов — в $x_{k+1} \cdot \ldots \cdot x_n$; следовательно,

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 , \qquad \text{если } n > 0.$$

В этом выражении мы легко узнаем свертку, и формулу нетрудно подправить так, чтобы она оставалась справедливой при всех целых n:

$$C_n = \sum_k C_k C_{n-1-k} + [n=0] . \qquad (7.66)$$

Шаг 1 завершен. Шаг 2 предписывает умножить на z^n и просуммировать:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_n C_n z^n \\ &= \sum_{k,n} C_k C_{n-1-k} z^n + \sum_{n=0} z^n \\ &= \sum_k C_k z^k \sum_n C_{n-1-k} z^{n-k} + 1 \\ &= C(z) \cdot z C(z) + 1 . \end{aligned}$$

И вот, подумать только,— произведением стала свертка! В мире производящих функций бывает и не такое.

Авторы прикалываются.

Шаг 3 тоже прост. Функцию $C(z)$ мы находим по формуле корней квадратного уравнения:

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2z} .$$

Но какой знак следует выбрать, $+$ или $-$? Обе функции удовлетворяют уравнению $C(z) = zC(z)^2 + 1$, но лишь одна из них дает решение нашей задачи. Всегда лучше действовать позитивно; так

может нам поэтому выбрать $+$? Однако мы быстро обнаружим, что в этом случае $C(0)$ будет равно ∞, что противоречит фактам. (Для истинной функции $C(z)$ должно быть $C(0) = C_0 = 1$.) Итак, мы приходим к выводу, что

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}\,.$$

Наконец, шаг 4. Чему равен коэффициент $[z^n]\,C(z)$? Биномиальная теорема говорит, что

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{1/2}{k} (-4z)^k = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4z)^k\,;$$

следовательно, используя (5.37), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4z)^{k-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4z)^n}{n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{z^n}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Число C_n способов расстановки скобок равно $\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$.

Итак, рекуррентное соотношение со сверткой привело нас к часто повторяющейся свертке.

В гл. 5 мы предвосхитили этот результат, введя последовательность *чисел Каталана* $\langle 1, 1, 2, 5, 14, \ldots \rangle = \langle C_n \rangle$. Эта последовательность встречается в десятках задач, которые, на первый взгляд, не связаны друг с другом [37], поскольку во многих ситуациях рекурсивная природа задачи отвечает рекуррентному соотношению со сверткой (7.66).

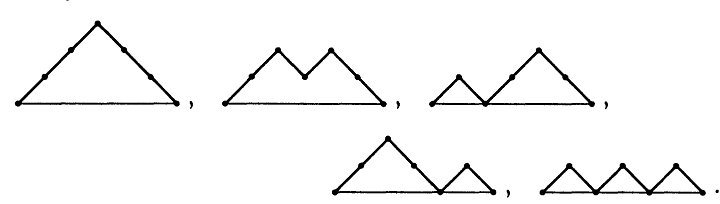
Рассмотрим, например, такую задачу: сколько последовательностей $\langle a_1, a_2 \ldots, a_{2n} \rangle$, состоящих из $+1$ и -1, обладают тем свойством, что

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0,$$

а все их частичные суммы

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$$

неотрицательны? В последовательности должно быть n элементов $+1$ и n элементов -1. Задачу можно представить графически, нарисовав график последовательности частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ как функцию от n: пять возможных решений для $n = 3$ суть



Это „горные хребты“ ширины $2n$, которые можно изобразить при помощи отрезков двух видов: ╱ и ╲. Оказывается, что имеется ровно C_n вариантов; при этом каждую из полученных последовательностей можно соотнести с некоторой расстановкой скобок: добавьте к формуле внешнюю пару скобок, так чтобы получилось n пар скобок, соответствующих n умножениям. Затем замените каждый знак '$\cdot$' на $+1$ и каждую ')' на -1, а все остальное удалите. Например, по этому правилу формуле $x_0\cdot\bigl((x_1\cdot x_2)\cdot(x_3\cdot x_4)\bigr)$ соответствует последовательность $\langle +1,+1,-1,+1,+1,-1,-1,-1\rangle$. Пять способов расстановки скобок в выражении $x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$ соответствуют пяти показанным выше горным хребтам для $n=3$.

Небольшая переформулировка нашей задачи подсчета последовательностей позволяет получить удивительно простое комбинаторное решение, не использующее производящих функций. Новая задача заключается в отыскании числа последовательностей $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\rangle$ из $+1$ и -1, обладающих свойством

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 1\,;$$

при этом все частичные суммы

$$a_0, \quad a_0+a_1, \quad a_0+a_1+a_2, \quad \ldots, \quad a_0+a_1+\cdots+a_{2n}$$

должны быть *положительны*. Очевидно, что это есть в точности последовательности из предыдущей задачи, к которым спереди приписали элемент $a_0=+1$. Однако последовательности в новой задаче можно просто сосчитать, если воспользоваться замечательным фактом, открытым Джорджем Рени [265] в 1959 г.: *Если $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ — любая последовательность целых чисел, сумма которых равна $+1$, то ровно у одного из ее циклических сдвигов*

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle, \ \langle x_2, \ldots, x_m, x_1\rangle, \ \ldots, \ \langle x_m, x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle$$

частичные суммы все положительные. Рассмотрим, например, последовательность $\langle 3,-5,2,-2,3,0\rangle$. Ее циклическими сдвигами являются

$$\begin{array}{ll} \langle 3,-5,2,-2,3,0\rangle & \langle -2,3,0,3,-5,2\rangle \\ \langle -5,2,-2,3,0,3\rangle & \langle 3,0,3,-5,2,-2\rangle \ \checkmark \\ \langle 2,-2,3,0,3,-5\rangle & \langle 0,3,-5,2,-2,3\rangle \end{array}$$

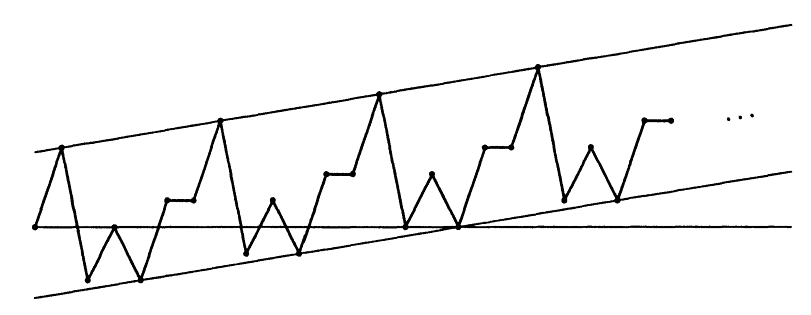
и только отмеченная последовательность имеет сплошь положительные частичные суммы.

Для доказательства леммы Рени достаточно простых геометрических рассуждений. Продолжим нашу последовательность периодически до бесконечной последовательности

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1, x_2, \ldots\rangle\,;$$

таким образом, мы полагаем $x_{m+k}=x_k$ для всех $k \geqslant 0$. Если теперь нарисовать график частичных сумм $s_n = x_1+\cdots+x_n$ как функции от n, то этот график будет иметь „средний наклон“ $1/m$,

поскольку $s_{m+n} = s_n + 1$. Например, для нашего примера последовательности $\langle 3, -5, 2, -2, 3, 0, 3, -5, 2, \ldots \rangle$ график начинается так:



Ах, как было бы здорово, если бы цены росли не быстрее, чем на этом графике.

Весь график может быть заключен между двумя прямыми наклона $1/m$, как показано; в этом примере $m = 6$. Эти граничные прямые касаются графика ровно один раз на каждом периоде из m точек, поскольку прямые с наклоном $1/m$ могут проходить через точки с целыми координатами лишь один раз на m единиц. Единственная нижняя точка касания есть как раз то единственное место в цикле, начиная с которого все частичные суммы будут положительными, поскольку справа от любой другой точки на расстоянии меньше m имеются точки касания.

(Специалисты по информатике, внимание! Частичные суммы в этой задаче показывают изменение со временем размера стека при вычислении произведения $n + 1$ сомножителей, поскольку каждая операция вталкивания в стек операнда изменяет его размер на $+1$, а каждое умножение — на -1.)

С помощью леммы Рени мы можем легко сосчитать последовательности $\langle a_0, \ldots, a_{2n} \rangle$ из чисел $+1$ и -1 с положительными частичными суммами и общей суммой $+1$. Имеется всего $\binom{2n+1}{n}$ последовательностей, содержащих n элементов -1 и $n + 1$ элементов $+1$, и из леммы Рени мы заключаем, что ровно $1/(2n+1)$ часть из них имеет все положительные частичные суммы. (Выпишите все $N = \binom{2n+1}{n}$ последовательностей и все $2n + 1$ их циклических сдвигов в виде массива $N \times (2n + 1)$. Каждая строка содержит ровно одно решение. Каждое решение встречается ровно один раз в каждом столбце. Поэтому во всем массиве содержится $N/(2n+1)$ различных решений, и каждое встречается $(2n+1)$ раз.) Число последовательностей с положительными частичными суммами равно

$$\binom{2n+1}{n}\frac{1}{2n+1} = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1} = C_n \,.$$

Пример 5: рекуррентное соотношение с m-кратной сверткой

Задачу, которой мы только что занимались, можно обобщить, рассмотрев последовательности $\langle a_0, \ldots, a_{mn} \rangle$ из чисел $+1$ и $(1 - m)$, частичные суммы которых все положительны, а общая сумма равна $+1$. Такие последовательности можно назвать *m-последовательностями Рени.* Если в последовательности элемент $(1 - m)$ встречается k раз, а $+1$ встречается

$mn + 1 - k$ раз, то

$$k(1-m) + (mn+1-k) = 1$$

и, следовательно, $k = n$. Всего имеется $\binom{mn+1}{n}$ последовательностей с n вхождениями $(1-m)$ и $mn+1-n$ вхождениями $+1$, и лемма Рени говорит нам, что количество таких последовательностей со сплошь положительными частичными суммами составляет ровно

$$\binom{mn+1}{n}\frac{1}{mn+1} = \binom{mn}{n}\frac{1}{(m-1)n+1}\,. \tag{7.67}$$

(Специалисты по информатике, внимание! Стековая интерпретация применима и здесь, но с m-арными операциями вместо рассматривавшегося ранее бинарного умножения.)

Это и есть число m-последовательностей Рени. Назовем его числом Фусса—Каталана $C_n^{(m)}$, поскольку последовательность $\langle C_n^{(m)}\rangle$ была впервые исследована Н. И. Фуссом [325] в 1791 г. (за много лет до того, как сам Каталан вступил в игру). Обычные числа Каталана суть $C_n = C_n^{(2)}$.

Теперь, зная ответ (7.67), попробуем сформулировать вопрос, ведущий к этому ответу. В случае $m = 2$ вопрос был такой: „Какие числа C_n удовлетворяют рекуррентному соотношению $C_n = \sum_k C_k C_{n-1-k} + [n=0]$?“ Мы попробуем найти аналогичный вопрос (аналогичное соотношение) в общем случае.

Тривиальная последовательность $\langle +1\rangle$ длины 1, очевидно, является m-последовательностью Рени. Если поместить число $(1-m)$ справа от любых m последовательностей, каждая из которых является m-последовательностью Рени, то мы получим снова m-последовательность Рени; частичные суммы остаются положительными — сначала они возрастают до $+2$, $+3$, ..., $+m$, а окончательная сумма равна $+1$. И обратно, можно показать, что все m-последовательности Рени $\langle a_0, \ldots, a_{mn}\rangle$ при $n > 0$ получаются этим способом: последний член a_{mn} должен быть равен $(1-m)$. Частичные суммы $s_j = a_0 + \cdots + a_{j-1}$ положительны для $1 \leqslant j \leqslant mn$ и $s_{mn} = m$, поскольку $s_{mn} + a_{mn} = 1$. Пусть k_1 означает наибольший индекс $\leqslant mn$, такой, что $s_{k_1} = 1$; пусть k_2 — наибольший индекс, такой, что $s_{k_2} = 2$; и т. д. Таким образом, $s_{k_j} = j$ и $s_k > j$ для $1 \leqslant j \leqslant m$ и $k_j < k \leqslant mn$. Отсюда следует, что $k_m = mn$, и мы можем легко проверить, что каждая из подпоследовательностей $\langle a_0, \ldots, a_{k_1-1}\rangle$, $\langle a_{k_1}, \ldots, a_{k_2-1}\rangle$, ..., $\langle a_{k_{m-1}}, \ldots, a_{k_m-1}\rangle$ является m-последовательностью Рени. При этом должно выполняться $k_1 = mn_1 + 1$, $k_2 - k_1 = mn_2 + 1$, ..., $k_m - k_{m-1} = mn_m + 1$ для некоторых неотрицательных целых n_1, n_2, ..., n_m.

Следовательно, $\binom{mn+1}{n}\frac{1}{mn+1}$ является ответом на следующие два интересных вопроса: „Чему равны числа $C_n^{(m)}$, определяемые рекуррентным соотношением

$$C_n^{(m)} = \Biggl(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n-1} C_{n_1}^{(m)} C_{n_2}^{(m)} \ldots C_{n_m}^{(m)}\Biggr) + [n=0] \tag{7.68}$$

при любом целом n?" и „Если $G(z)$ — степенной ряд, удовлетворяющий уравнению

$$G(z) = zG(z)^m + 1, \qquad (7.69)$$

то какие коэффициенты $[z^n]\,G(z)$ он имеет?"

Заметим, что это непростые вопросы. В случае обычных чисел Каталана ($m = 2$) мы решили уравнение (7.69) для $G(z)$ и его коэффициентов при помощи формулы корней квадратного уравнения и биномиальной теоремы; однако для $m = 3$ ни один из стандартных методов не дает ни малейшего намека на то, как решить кубическое уравнение $G = zG^3 + 1$. Таким образом, оказывается проще сначала ответить на вопрос, а затем задать его.

Сейчас, однако, мы знаем уже достаточно для того, чтобы поставить еще более сложные вопросы и получить ответы на них. Вот такой, например, вопрос: „Чему равен коэффициент $[z^n]\,G(z)^l$, где l — положительное целое, а $G(z)$ — степенной ряд, определяемый (7.69)?" Рассуждая подобно тому, как мы делали ранее, получим, что $[z^n]\,G(z)^l$ есть число последовательностей длины $mn + l$ со следующими тремя свойствами:

- Каждый элемент равен либо $+1$, либо $(1 - m)$.
- Все частичные суммы положительны.
- Общая сумма равна l.

Действительно, все такие последовательности мы можем единственным образом получить, приписав друг за другом l последовательностей, имеющих свойство m-последовательности Рени. Число способов выполнить это равно

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_l=n} C_{n_1}^{(m)} C_{n_2}^{(m)} \ldots C_{n_l}^{(m)} = [z^n]\,G(z)^l.$$

Доказанное Рени обобщение его леммы говорит нам, как подсчитать эти последовательности: *если* $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ *— любая последовательность целых чисел, такая, что* $x_j \leqslant 1$ *для любых* j *и* $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = l > 0$, *то ровно* l *из циклических сдвигов*

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle,\ \langle x_2, \ldots, x_m, x_1\rangle,\ \ldots,\ \langle x_m, x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle$$

имеют сплошь положительные частичные суммы.

Например, можно проверить это утверждение на последовательности $\langle -2, 1, -1, 0, 1, 1, -1, 1, 1, 1\rangle$. Ее циклические сдвиги суть

$\langle -2, 1, -1, 0, 1, 1, -1, 1, 1, 1\rangle$	$\langle 1, -1, 1, 1, 1, -2, 1, -1, 0, 1\rangle$
$\langle 1, -1, 0, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -2\rangle$	$\langle -1, 1, 1, 1, -2, 1, -1, 0, 1, 1\rangle$
$\langle -1, 0, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -2, 1\rangle$	$\langle 1, 1, 1, -2, 1, -1, 0, 1, 1, -1\rangle$ ✓
$\langle 0, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -2, 1, -1\rangle$	$\langle 1, 1, -2, 1, -1, 0, 1, 1, -1, 1\rangle$
$\langle 1, 1, -1, 1, 1, 1, -2, 1, -1, 0\rangle$ ✓	$\langle 1, -2, 1, -1, 0, 1, 1, -1, 1, 1\rangle$

и только две последовательности, помеченные '$\surd$', имеют все положительные частичные суммы. Эта обобщенная лемма доказывается в упр. 13.

Последовательность из элементов $+1$ и $(1-m)$ длины $mn+l$ с общей суммой l должна содержать ровно n элементов $(1-m)$. Обобщенная лемма говорит нам, что $l/(mn+l)$ из этих $\binom{mn+l}{n}$ последовательностей имеют только положительные частичные суммы; следовательно, наш трудный вопрос имеет удивительно простой ответ:

$$[z^n]\,G(z)^l = \binom{mn+l}{n}\frac{l}{mn+l} \qquad (7.70)$$

для любых целых $l > 0$.

Читатели, не забывшие гл. 5, вполне могут подумать что-нибудь вроде: „Эта формула выглядит знакомой, не встречалась ли она раньше?" Да, действительно, встречалась; вот что записано в уравнении (5.60):

$$[z^n]\,\mathcal{B}_t(z)^r = \binom{tn+r}{n}\frac{r}{tn+r}\,.$$

Следовательно, производящая функция $G(z)$ из (7.69) должна совпадать с обобщенным биномиальным рядом $\mathcal{B}_m(z)$. И действительно, из уравнения (5.59) имеем

$$\mathcal{B}_m(z)^{1-m} - \mathcal{B}_m(z)^{-m} = z\,,$$

а это эквивалентно

$$\mathcal{B}_m(z) - 1 = z\mathcal{B}_m(z)^m\,.$$

Теперь, зная, что мы работаем с обобщенным биномиальным рядом, перейдем к обозначениям гл. 5. В этой главе были сформулированы без доказательства ряд тождеств. Сейчас мы отчасти восполним этот пробел, доказав, что степенной ряд $\mathcal{B}_t(z)$, определяемый как

$$\mathcal{B}_t(z) = \sum_n \binom{tn+1}{n}\frac{z^n}{tn+1}\,,$$

обладает следующим замечательным свойством:

$$\mathcal{B}_t(z)^r = \sum_n \binom{tn+r}{n}\frac{r z^n}{tn+r}\,,$$

если только t и r — положительные целые.

Можно ли распространить эти результаты на *произвольные* значения t и r? Да, можно, поскольку коэффициенты $\binom{tn+r}{n}\frac{r}{tn+r}$

являются многочленами от t и r. Общая r-я степень, определяемая как

$$\mathcal{B}_t(z)^r = e^{r \ln \mathcal{B}_t(z)} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\bigl(r \ln \mathcal{B}_t(z)\bigr)^n}{n!}$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{n!} \left(-\sum_{m \geqslant 1} \frac{\bigl(1 - \mathcal{B}_t(z)\bigr)^m}{m} \right)^n,$$

имеет в качестве коэффициентов некоторые многочлены от t и r; эти многочлены совпадают с $\binom{tn+r}{n}\frac{r}{tn+r}$ для бесконечно многих значений t и r. Таким образом, эти две последовательности многочленов должны тождественно совпадать.

В гл. 5 упоминается также обобщенный экспоненциальный ряд

$$\mathcal{E}_t(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(tn+1)^{n-1}}{n!} z^n,$$

относительно которого формула (5.60) утверждает не менее замечательное свойство:

$$[z^n]\, \mathcal{E}_t(z)^r = \frac{r(tn+r)^{n-1}}{n!}. \qquad (7.71)$$

Мы можем доказать это как предельный случай формулы для $\mathcal{B}_t(z)$, поскольку, как нетрудно показать,

$$\mathcal{E}_t(z)^r = \lim_{x \to \infty} \mathcal{B}_{xt}(z/x)^{xr}.$$

7.6 ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Иногда производящая функция последовательности $\langle g_n \rangle$ весьма сложна, тогда как связанная с ней последовательность $\langle g_n/n! \rangle$ имеет простую производящую функцию. В таких случаях мы, естественно, предпочтем работать с $\langle g_n/n! \rangle$ и в самом конце выполним умножение на $n!$. Этот трюк применяется достаточно часто и заслуживает специального названия: будем называть степенной ряд

$$\widehat{G}(z) = \sum_{n \geqslant 0} g_n \frac{z^n}{n!} \qquad (7.72)$$

экспоненциальной производящей функцией или ЭПФ последовательности $\langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$. Прилагательное „экспоненциальная“ употреблено потому, что функция экспоненты e^z есть ЭПФ последовательности $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$.

Многие из производящих функций в табл. 386 есть на самом деле ЭПФ. Например, уравнение (7.50) говорит нам, что

$\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^m/m!$ есть ЭПФ последовательности $\left\langle \left[{0 \atop m}\right], \left[{1 \atop m}\right], \left[{2 \atop m}\right], \ldots \right\rangle$. Обычная производящая функция для этой последовательности много сложнее (и, к тому же, она расходится).

Для экспоненциальных производящих функций имеются свои собственные базисные маневры, аналогичные тем операциям, что мы изучали в разд. 7.2. Так, если мы умножим ЭПФ последовательности $\langle g_n \rangle$ на z, то получим

$$\sum_{n\geqslant 0} g_n \frac{z^{n+1}}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} g_{n-1} \frac{z^n}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 0} n g_{n-1} \frac{z^n}{n!};$$

это ЭПФ последовательности $\langle 0, g_0, 2g_1, \ldots \rangle = \langle n g_{n-1} \rangle$.

Дифференцирование ЭПФ последовательности $\langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$ по z дает

Не слишком ли много удовольствия?

$$\sum_{n\geqslant 0} n g_n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} g_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 0} g_{n+1} \frac{z^n}{n!}; \qquad (7.73)$$

это ЭПФ последовательности $\langle g_1, g_2, \ldots \rangle$. Таким образом, дифференцирование ЭПФ соответствует операции сдвига влево $\left(G(z) - g_0\right)/z$ для обычных производящих функций. (Мы использовали это свойство ЭПФ, когда занимались гипергеометрическими рядами (5.106).) Интегрирование ЭПФ дает

$$\int_0^z \sum_{n\geqslant 0} g_n \frac{t^n}{n!}\,dt = \sum_{n\geqslant 0} g_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geqslant 1} g_{n-1} \frac{z^n}{n!}; \qquad (7.74)$$

т. е. сдвиг вправо, ЭПФ последовательности $\langle 0, g_0, g_1, \ldots \rangle$.

Самая интересная операция над ЭПФ, как и в случае обычных производящих функций, это умножение. Если $\widehat{F}(z)$ и $\widehat{G}(z)$ — ЭПФ последовательностей $\langle f_n \rangle$ и $\langle g_n \rangle$, то $\widehat{F}(z)\widehat{G}(z) = \widehat{H}(z)$ является ЭПФ для последовательности $\langle h_n \rangle$, которая называется *биномиальной сверткой* $\langle f_n \rangle$ и $\langle g_n \rangle$:

$$h_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k\, g_{n-k}\,. \qquad (7.75)$$

Биномиальные коэффициенты появляются здесь из-за того, что $\binom{n}{k} = n!/k!\,(n-k)!$, следовательно,

$$\frac{h_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{k!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!};$$

другими словами, $\langle h_n/n! \rangle$ — обычная свертка последовательностей $\langle f_n/n! \rangle$ и $\langle g_n/n! \rangle$.

Биномиальные свертки часто встречаются в приложениях. Так, в (6.79) мы определили числа Бернулли посредством неявного рекуррентного соотношения

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = [m=0] \qquad \text{при любом } m \geqslant 0;$$

это соотношение можно переписать в виде биномиальной свертки, если заменить $m+1$ на n и добавить к обеим частям B_n:

$$\sum_{k} \binom{n}{k} B_k = B_n + [n=1] \qquad \text{при любом } n \geqslant 0. \qquad (7.76)$$

Теперь можно перевести это соотношение на язык степенных рядов (как было обещано в гл. 6), если ввести в рассмотрение ЭПФ для чисел Бернулли, $\widehat{B}(z) = \sum_{n\geqslant 0} B_n z^n/n!$. Левая часть (7.76) есть биномиальная свертка $\langle B_n \rangle$ с постоянной последовательностью $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$; таким образом, ЭПФ левой части равна $\widehat{B}(z)e^z$. Для правой части экспоненциальной производящей функцией является $\sum_{n\geqslant 0}(B_n + [n=1])z^n/n! = \widehat{B}(z) + z$. Следовательно, должно выполняться тождество $\widehat{B}(z) = z/(e^z - 1)$; мы доказали равенство (6.81), которое встречается также в табл. 386 как формула (7.44).

А теперь займемся вновь суммой, неоднократно появляющейся в этой книге:

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = \sum_{0\leqslant k<n} k^m .$$

На сей раз попробуем применить к этой задаче производящие функции: вдруг это упростит дело. Будем считать n фиксированным, а m — переменным; наша задача, таким образом,— разобраться с поведением коэффициентов степенного ряда

$$S(z) = S_0(n) + S_1(n)\,z + S_2(n)\,z^2 + \cdots = \sum_{m\geqslant 0} S_m(n)\,z^m .$$

Мы знаем, что производящая функция последовательности $\langle 1, k, k^2, \ldots \rangle$ равна

$$\frac{1}{1-kz} = \sum_{m\geqslant 0} k^m z^m ,$$

следовательно,

$$S(z) = \sum_{m\geqslant 0} \sum_{0\leqslant k<n} k^m z^m = \sum_{0\leqslant k<n} \frac{1}{1-kz} ,$$

если поменять местами порядок суммирования. Эту сумму можно записать в замкнутом виде:

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^{-1}-0}+\frac{1}{z^{-1}-1}+\cdots+\frac{1}{z^{-1}-n+1}\right) \\ &= \frac{1}{z}\left(H_{z^{-1}}-H_{z^{-1}-n}\right); \end{aligned} \tag{7.77}$$

но мы абсолютно ничего не знаем о разложении подобной замкнутой формулы по степеням z.

На выручку приходят экспоненциальные производящие функции. Для последовательности $\langle S_0(n), S_1(n), S_2(n), \ldots\rangle$ ЭПФ равна

$$\widehat{S}(z,n) = S_0(n) + S_1(n)\frac{z}{1!} + S_2(n)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{m\geqslant 0} S_m(n)\frac{z^m}{m!}.$$

Для получения коэффициентов $S_m(n)$ воспользуемся известной ЭПФ последовательности $\langle 1, k, k^2, \ldots\rangle$, а именно,

$$e^{kz} = \sum_{m\geqslant 0} k^m \frac{z^m}{m!},$$

и найдем

$$\widehat{S}(z,n) = \sum_{m\geqslant 0}\sum_{0\leqslant k<n} k^m\frac{z^m}{m!} = \sum_{0\leqslant k<n} e^{kz}.$$

Последняя же сумма есть сумма геометрической прогрессии, имеющая замкнутый вид

$$\widehat{S}(z,n) = \frac{e^{nz}-1}{e^z-1}. \tag{7.78}$$

Эврика! Все, что нам остается сделать,— это выписать коэффициенты этой сравнительно простой функции, и мы получим выражение для $S_m(n)$, поскольку $S_m(n) = m!\,[z^m]\widehat{S}(z,n)$.

Здесь вступают в игру числа Бернулли. Совсем недавно мы заметили, что ЭПФ для чисел Бернулли есть

$$\widehat{B}(z) = \sum_{k\geqslant 0} B_k\frac{z^k}{k!} = \frac{z}{e^z-1};$$

следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \widehat{S}(z,n) &= \widehat{B}(z)\,\frac{e^{nz}-1}{z} \\ &= \left(B_0\frac{z^0}{0!}+B_1\frac{z^1}{1!}+B_2\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(n\frac{z^0}{1!}+n^2\frac{z^1}{2!}+n^3\frac{z^2}{3!}+\cdots\right). \end{aligned}$$

Сумма $S_m(n)$ равняется коэффициенту при z^m в этой функции, умноженному на $m!$. Например,

$$S_0(n) = 0!\left(B_0\frac{n}{1!\,0!}\right) = n\,,$$
$$S_1(n) = 1!\left(B_0\frac{n^2}{2!\,0!} + B_1\frac{n}{1!\,1!}\right) = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n\,,$$
$$S_2(n) = 2!\left(B_0\frac{n^3}{3!\,0!} + B_1\frac{n^2}{2!\,1!} + B_2\frac{n}{1!\,2!}\right) = \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n\,.$$

Таким образом, мы в очередной раз вывели формулу $\Box_n = S_2(n) = \frac{1}{3}n(n-\frac{1}{2})(n-1)$, и это самый простой вывод из всех: при помощи нескольких строк найдено поведение $S_m(n)$ при любых m.

Можно записать общую формулу

$$S_{m-1}(n) = \frac{1}{m}\bigl(B_m(n) - B_m(0)\bigr)\,, \qquad (7.79)$$

где $B_m(x)$ — *многочлен Бернулли,* определяемый как

$$B_m(x) = \sum_k \binom{m}{k} B_k\, x^{m-k}\,. \qquad (7.80)$$

Вот почему это так: многочлен Бернулли является биномиальной сверткой последовательности $\langle B_0, B_1, B_2, \ldots\rangle$ с $\langle 1, x, x^2, \ldots\rangle$; следовательно, экспоненциальная производящая функция для $\langle B_0(x), B_1(x), B_2(x), \ldots\rangle$ есть произведение ЭПФ этих последовательностей,

$$\widehat{B}(z,x) = \sum_{m\geqslant 0} B_m(x)\frac{z^m}{m!} = \frac{z}{e^z-1}\sum_{m\geqslant 0} x^m\frac{z^m}{m!} = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}\,. \qquad (7.81)$$

Отсюда вытекает равенство (7.79), поскольку ЭПФ для $\langle 0, S_0(n), 2S_1(n), \ldots\rangle$ есть, по (7.78),

$$z\frac{e^{nz}-1}{e^z-1} = B(z,n) - B(z,0)\,.$$

Обратимся теперь еще к одной задаче, где ЭПФ есть как раз то, что нужно: сколько существует остовных деревьев в *полном графе* с n вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$? Обозначим это число t_n. Полный граф содержит $\frac{1}{2}n(n-1)$ ребер, по одному ребру, соединяющему каждую пару различных вершин; так что мы, по существу, ищем полное число способов соединить n данных объектов, проведя $n-1$ линий между ними.

Имеем $t_1 = t_2 = 1$. Кроме того, $t_3 = 3$, поскольку полный граф с тремя вершинами есть фан порядка 2; мы знаем, что $f_2 = 3$. А

в случае $n = 4$ имеется 16 остовных деревьев:

(7.82)

Следовательно, $t_4 = 16$.

Опыт работы с аналогичной задачей для фанов подсказывает, что наилучший способ справиться с этой задачей состоит в том, чтобы выделить одну вершину и посмотреть на те связные компоненты или блоки, на которые разобьется остовное дерево, если проигнорировать все ребра, проходящие через выделенную вершину. Если невыделенные вершины образуют m компонент размеров $k_1, k_2, \ldots, k_m$, то их можно соединить с выделенной вершиной $k_1k_2\ldots k_m$ способами. Например, в случае $n = 4$, можно считать выделенной нижнюю левую вершину. В верхнем ряду (7.82) изображены $3t_3$ случаев, когда три остальные вершины соединены между собой одним из t_3 способов и затем соединены с левой нижней вершиной одним из трех способов. В нижнем ряду изображены $2\cdot 1 \times t_2t_1 \times \binom{3}{2}$ решений, в которых остальные три вершины разбиты на компоненты размеров 2 и 1 одним из $\binom{3}{2}$ способов; там же показан случай, где три остальные вершины полностью изолированы.

Подобные рассуждения приводят к рекуррентному соотношению

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \times \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} k_1k_2\ldots k_m\, t_{k_1}t_{k_2}\ldots t_{k_m}$$

при любом $n > 1$. Действительно, имеется $\binom{n-1}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ способов представить $n-1$ элементов в виде последовательности из m компонент размеров, соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_m$; имеется $t_{k_1}t_{k_2}\ldots t_{k_m}$ способов соединить вершины внутри этих компонент какими-то остовными деревьями; имеется $k_1k_2\ldots k_m$ способов соединить вершину n с этими компонентами; и мы делим на $m!$, поскольку не должны учитывать порядок компонент. Например, для $n = 4$ это рекуррентное соотношение дает

$$\begin{aligned} t_4 &= 3t_3 + \frac{1}{2}\left(\binom{3}{1,2}2t_1t_2 + \binom{3}{2,1}2t_2t_1\right) + \frac{1}{6}\left(\binom{3}{1,1,1}t_1^3\right) \\ &= 3t_3 + 6t_2t_1 + t_1^3 . \end{aligned}$$

Рекуррентное соотношение для t_n выглядит на первый взгляд устрашающе, на самом же деле оно не столь уж плохо, только

слегка свернуто. Обозначим

$$u_n = n\,t_n$$

и тогда все существенно упростится:

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \frac{u_{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}, \qquad \text{если } n > 1. \tag{7.83}$$

Внутренняя сумма представляет собой коэффициент при z^{n-1} в ЭПФ $\widehat{U}(z)$, возведенной в m-ю степень; формула будет правильной и для $n = 1$, если добавить слагаемое $\widehat{U}(z)^0$, отвечающее случаю $m = 0$. Итак,

$$\frac{u_n}{n!} = [z^{n-1}] \sum_{m\geqslant 0} \frac{1}{m!} \widehat{U}(z)^m = [z^{n-1}]\, e^{\widehat{U}(z)} = [z^n]\, z e^{\widehat{U}(z)}$$

при любом $n > 0$, и мы получаем уравнение

$$\widehat{U}(z) = z\, e^{\widehat{U}(z)}. \tag{7.84}$$

Это прогресс! Уравнение (7.84) выглядит почти так же, как уравнение

$$\mathcal{E}(z) = e^{z\,\mathcal{E}(z)},$$

определяющее обобщенный экспоненциальный ряд $\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_1(z)$ в (5.59) и (7.71); и действительно, имеется связь между этими функциями:

$$\widehat{U}(z) = z\,\mathcal{E}(z).$$

Таким образом, мы можем просто прочитать ответ к нашей задаче:

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n} [z^n]\, \widehat{U}(z) = (n-1)!\, [z^{n-1}]\, \mathcal{E}(z) = n^{n-2}. \tag{7.85}$$

При любом $n > 0$ полный граф с вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеет ровно n^{n-2} остовных деревьев.

7.7 ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ

Помимо рассмотренных, возможны многие другие способы порождения последовательностей по рядам; здесь можно использовать, по крайней мере, в принципе, любую систему „ядер“ $K_n(z)$, обладающих тем свойством, что

$$\sum_n g_n\, K_n(z) = 0 \implies g_n = 0 \text{ при любом } n.$$

Для обычных производящих функций мы использовали ядра $K_n(z) = z^n$, а для экспоненциальных производящих функций $K_n(z) = z^n/n!$; можно попробовать также убывающие факториальные степени $z^{\underline{n}}$ или биномиальные коэффициенты $z^{\underline{n}}/n! = \binom{z}{n}$.

Наиболее важная альтернатива производящим функциям и ЭПФ получается, если использовать ядра $1/n^z$; они рассчитаны на последовательности $\langle g_1, g_2, \ldots \rangle$, начинающиеся с $n = 1$, а не с $n = 0$:

$$\widetilde{G}(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{g_n}{n^z}. \tag{7.86}$$

Эта функция называется *производящей функцией Дирихле* (ПФД), поскольку немецкий математик Густав Дирихле (1805–1859) внес большой вклад в ее изучение.

Например, для постоянной последовательности $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$ ПФД равна

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z} = \zeta(z). \tag{7.87}$$

Это *дзета-функция* Римана, которую мы называли также обобщенным гармоническим числом $H_\infty^{(z)}$ для $z > 1$.

Произведение производящих функций Дирихле отвечает специальному виду свертки:

$$\widetilde{F}(z)\widetilde{G}(z) = \sum_{l,m \geqslant 1} \frac{f_l}{l^z} \frac{g_m}{m^z} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z} \sum_{l,m \geqslant 1} f_l \, g_m \, [l \cdot m = n].$$

Таким образом, $\widetilde{F}(z)\widetilde{G}(z) = \widetilde{H}(z)$ есть ПФД последовательности

$$h_n = \sum_{d \backslash n} f_d \, g_{n/d}. \tag{7.88}$$

Например, мы знаем из (4.55), что $\sum_{d \backslash n} \mu(d) = [n = 1]$; это свертка Дирихле последовательности Мёбиуса $\langle \mu(1), \mu(2), \mu(3), \ldots \rangle$ с последовательностью $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$, следовательно,

$$\widetilde{M}(z)\zeta(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{[n = 1]}{n^z} = 1. \tag{7.89}$$

Иначе говоря, ПФД последовательности $\langle \mu(1), \mu(2), \mu(3), \ldots \rangle$ равна $\zeta(z)^{-1}$.

Производящие функции Дирихле особенно полезны, когда последовательность $\langle g_1, g_2, \ldots \rangle$ является *мультипликативной функцией*, т. е.

$$g_{mn} = g_m \, g_n \qquad \text{при } m \perp n.$$

В таких случаях значения g_n для всех n определяются значениями для n, являющихся степенями простых чисел, и мы можем разложить ПФД в произведение по простым числам:

$$\widetilde{G}(z) = \prod_{p\ \text{простое}} \left(1 + \frac{g_p}{p^z} + \frac{g_{p^2}}{p^{2z}} + \frac{g_{p^3}}{p^{3z}} + \cdots\right). \qquad (7.90)$$

Если, например, положить $g_n = 1$ для всех n, то получим представление дзета-функции Римана в виде произведения:

$$\zeta(z) = \prod_{p\ \text{простое}} \left(\frac{1}{1 - p^{-z}}\right). \qquad (7.91)$$

Для функции Мёбиуса $\mu(p) = -1$ и $\mu(p^k) = 0$ при $k > 1$, следовательно, ее ПФД равна

$$\widetilde{M}(z) = \prod_{p\ \text{простое}} (1 - p^{-z}), \qquad (7.92)$$

что, разумеется, согласуется с (7.89) и (7.91). Для функции Эйлера φ имеем $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, поэтому ее ПФД имеет вид

$$\widetilde{\Phi}(z) = \prod_{p\ \text{простое}} \left(1 + \frac{p-1}{p^z - p}\right) = \prod_{p\ \text{простое}} \frac{1 - p^{-z}}{1 - p^{1-z}}. \qquad (7.93)$$

Отсюда мы заключаем, что $\widetilde{\Phi}(z) = \zeta(z-1)/\zeta(z)$.

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Один эксцентричный коллекционер покрытий при помощи домино $2 \times n$-прямоугольника платит 4 доллара за каждую вертикально расположенную костяшку и 1 доллар — за горизонтальную. Сколько покрытий будут оценены по этому способу ровно в m долларов? Например, для $m = 6$ имеем три решения: ▯⊟, ⊟▯ и ⊟⊟⊟.

2 Выпишите в замкнутой форме производящую функцию и экспоненциальную производящую функцию для последовательности $\langle 2, 5, 13, 35, \ldots \rangle = \langle 2^n + 3^n \rangle$.

3 Чему равна $\sum_{n \geqslant 0} H_n/10^n$?

4 Общая теорема о разложении рациональной функции $P(z)/Q(z)$ не вполне общая, поскольку степень P в ней должна быть меньше степени Q. Что произойдет, если степень P окажется больше?

5 Найдите производящую функцию $S(z)$, такую, что

$$[z^n]\,S(z) = \sum_k \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k}.$$

Обязательные упражнения

6 Покажите, что рекуррентное соотношение (7.32) можно решить репертуарным методом, не используя производящих функций.

7 Решите рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} g_0 &= 1; \\ g_n &= g_{n-1} + 2g_{n-2} + \cdots + ng_0 \qquad \text{при } n > 0. \end{aligned}$$

8 Вычислите $[z^n]\,\bigl(\ln(1-z)\bigr)^2/(1-z)^{m+1}$.

9 Используйте результат предыдущего упражнения для вычисления $\sum_{k=0}^{n} H_k H_{n-k}$.

10 Положите в тождестве (7.62) $r = s = -1/2$ и затем избавьтесь от всех вхождений $1/2$ с помощью трюков, подобных (5.36). К какому замечательному тождеству вы пришли?

От чего ушел, к тому и пришел.

11 Эта задача, состоящая из трех независимых частей, позволяет попрактиковаться в манипуляциях с производящими функциями. Пусть $A(z) = \sum_n a_n z^n$, $B(z) = \sum_n b_n z^n$, $C(z) = \sum_n c_n z^n$, причем все коэффициенты равны нулю для отрицательных n.

a Выразите C через A и B, если $c_n = \sum_{j+2k\leqslant n} a_j b_k$.

b Выразите A через B, если $nb_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_k/(n-k)!$.

c Выразите A через B, если $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} b_{n-k}$, где r — вещественное число; затем используйте вашу формулу, чтобы отыскать коэффициенты $f_k(r)$, такие, что $b_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(r)\, a_{n-k}$.

12 Сколько существует способов разместить числа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ в виде массива размера $2 \times n$ так, чтобы и строки и столбцы массива были упорядочены по возрастанию слева направо и сверху вниз? Например, для $n = 5$ одним из решений будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

13 Докажите обобщенную лемму Рени, сформулированную непосредственно перед (7.70).

14 Используя экспоненциальную производящую функцию, решите рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} g_0 &= 0, \qquad g_1 = 1, \\ g_n &= -2ng_{n-1} + \sum_k \binom{n}{k} g_k g_{n-k} \qquad \text{при } n > 1. \end{aligned}$$

15 *Число Белла* ϖ_n есть число способов разбиения n предметов на подмножества. Например, $\varpi_3 = 5$, поскольку множество $\{1,2,3\}$ можно разбить на такие подмножества:

$$\{1,2,3\};\quad \{1,2\}\cup\{3\};\ \{1,3\}\cup\{2\};\ \{1\}\cup\{2,3\};\ \{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}.$$

Докажите, что $\varpi_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k}\mathrm{varpi}_{n-k}$, и используйте это рекуррентное соотношение для нахождения в замкнутом виде экспоненциальной производящей функции $P(z)=\sum_n \varpi_n z^n/n!$.

16 Две последовательности $\langle a_n\rangle$ и $\langle b_n\rangle$ связаны между собой формулой свертки

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots nk_n=n} \binom{a_1+k_1-1}{k_1}\binom{a_2+k_2-1}{k_2}\ldots\binom{a_n+k_n-1}{k_n};$$

кроме того, $a_0 = 0$ и $b_0 = 1$. Докажите, что соответствующие производящие функции удовлетворяют уравнению $\ln B(z) = A(z) + \frac{1}{2}A(z^2) + \frac{1}{3}A(z^3) + \cdots$.

17 Покажите, что экспоненциальная производящая функция $\widehat{G}(z)$ связана с обычной производящей функцией той же последовательности соотношением

$$\int_0^\infty \widehat{G}(zt)e^{-t}\,dt = G(z)\,,$$

если этот интеграл существует.

18 Найдите производящие функции Дирихле для последовательностей

a $g_n = \sqrt{n}$,
b $g_n = \ln n$,
c $g_n = [n$ свободно от квадратов$]$.

Выразите ответы в терминах дзета-функции. (Свойство свободы от квадратов определено в упр. 4.13.)

19 Любой степенной ряд $F(z) = \sum_{n\geqslant 0} f_n z^n$ с $f_0 = 1$ определяет последовательность многочленов $f_n(x)$ по правилу

$$F(z)^x = \sum_{n\geqslant 0} f_n(x)z^n\,;$$

при этом $f_n(1) = f_n$ и $f_n(0) = [n=0]$. В общем случае $f_n(x)$ имеет степень n. Покажите, что эти многочлены удовлетворяют формулам свертки:

Что означает это „в общем случае“? Если $f_1 = f_2 = \cdots = f_{m-1} = 0$, то степень $f_n(x)$ не превосходит $\lfloor n/m\rfloor$.

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x)f_{n-k}(y) = f_n(x+y)\,,$$

$$(x+y)\sum_{k=0}^{n} kf_k(x)f_{n-k}(y) = xnf_n(x+y)\,.$$

(Тождества в табл. 229 и 302 — частные случаи этого приема.)

20 Степенной ряд $G(z)$ называется *дифференцируемо конечным*, если найдутся многочлены (в конечном числе) $P_0(z)$, ..., $P_m(z)$, не все равные нулю и такие, что

$$P_0(z)G(z) + P_1(z)G'(z) + \cdots + P_m(z)G^{(m)}(z) = 0\,.$$

Последовательность чисел $\langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$ называется *полиномиально рекурсивной*, если найдутся многочлены (в конечном числе) $p_0(z)$, ..., $p_m(z)$, не все равные нулю и такие, что

$$p_0(n)g_n + p_1(n)g_{n+1} + \cdots + p_m(n)g_{n+m} = 0$$

для всех целых $n \geqslant 0$. Докажите, что производящая функция дифференцируемо конечна тогда и только тогда, когда ее последовательность коэффициентов полиномиально рекурсивна.

Домашние задания

21 Грабитель врывается в банк и требует 500 долларов десяти- и двадцатидолларовыми банкнотами. Он также желает знать, сколькими способами кассир может дать ему эти деньги. Найдите производящую функцию $G(z)$, содержащую это число в коэффициенте $[z^{500}]\,G(z)$, а также более компактную функцию $\check{G}(z)$, в которой это число равно $[z^{50}]\,\check{G}(z)$. Используйте для решения (a) элементарные дроби; (b) метод, аналогичный (7.39).

Не собирается ли он сыграть в домино $2 \times n$?
(Дело в другом — он боится обмена сто- и пятидесятидолларовых купюр. — Перев.)

22 Пусть P есть сумма всех возможных способов „триангуляции“ многоугольников:

$$P = __ + \triangle + \square + \square + ⬠ + ⬠ + ⬠ + ⬠ + ⬠ + \cdots\,.$$

(Первое слагаемое представляет вырожденный многоугольник всего с двумя вершинами; все остальные слагаемые изображают многоугольники, разбитые на треугольники. Пятиугольник, например, можно триангулировать пятью способами.) Определите операцию „умножения“ $A \triangle B$ триангулированных многоугольников A и B так, чтобы было справедливо уравнение

$$P = __ + P\triangle P\,.$$

Затем замените каждый треугольник на 'z'; что вы тогда сможете сказать о числе разбиений n-угольника на треугольники?

Столько, сколько вы сможете позволить себе по нынешним ценам, и еще чуть-чуть.

23 Сколько существует способов построить $2 \times 2 \times n$-колонну из кирпичей размера $2 \times 1 \times 1$?

24 Сколько имеется остовных деревьев в n-колесе (т. е. графе с циклом из n „внешних“ вершин, каждая из которых соединена с $(n+1)$-й вершиной „осью“) при $n \geqslant 3$?

25 Пусть $m \geqslant 2$ — целое число. Выразите в замкнутом виде, как функцию z и m, производящую функцию последовательности $\langle n \bmod m \rangle$. Используя эту производящую функцию, выразите '$n \bmod m$' в терминах комплексного числа $\omega = e^{2\pi i/m}$. (Например, для $m = 2$ будем иметь $\omega = -1$ и $n \bmod 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$.)

26 Числа Фибоначчи второго порядка $\langle \mathfrak{F}_n \rangle$ определяются рекуррентным соотношением

$$\mathfrak{F}_0 = 0, \qquad \mathfrak{F}_1 = 1,$$
$$\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{n-1} + \mathfrak{F}_{n-2} + F_n \qquad \text{при } n > 1.$$

Выразите $\mathfrak{F}_n$ через обычные числа Фибоначчи F_n и F_{n+1}.

27 Каждое покрытие $2 \times n$-прямоугольника костяшками домино можно рассматривать также как некоторый способ нарисовать n несоприкасающихся отрезков в массиве точек размера $2 \times n$:

.

Если наложить друг на друга две подобные схемы, то мы получим несколько циклов, так как с каждой точкой связаны два отрезка. Если, например, приведенная выше картинка объединяется с

,

то в результате получится

.

Такой же набор циклов получается при объединении

с .

Однако мы сможем однозначно восстановить исходные схемы по результату их наложения, если припишем каждому вертикальному отрезку некоторую ориентацию при помощи стрелок. Стрелки расставим поочередно вверх/вниз/вверх/вниз/$\cdots$ в первой схеме и поочередно вниз/вверх/вниз/вверх/$\cdots$ — во второй. Например,

+ = .

Число таких ориентированных циклических схем должно быть, следовательно, равно $T_n^2 = F_{n+1}^2$, и мы должны уметь доказывать это с помощью алгебры. Пусть Q_n будет числом ориентированных циклических схем размера $2 \times n$. Найдите рекуррентное соотношение для Q_n, решите его с помощью производящих функций и получите алгебраическое доказательство того, что $Q_n = F_{n+1}^2$.

28 Коэффициенты $A(z)$ в (7.39) удовлетворяют соотношению $A_r + A_{r+10} + A_{r+20} + A_{r+30} = 100$ для $0 \leqslant r < 10$. Дайте „простое“ объяснение этому факту.

29 Чему равна сумма фибоначчиевых произведений

$$\sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m>0}} F_{k_1} F_{k_2} \ldots F_{k_m}\ ?$$

30 Если производящая функция $G(z) = 1/(1-\alpha z)(1-\beta z)$ имеет разложение на элементарные дроби $a/(1-\alpha z) + b/(1-\beta z)$, то каким будет разложение на элементарные дроби функции $G(z)^n$?

31 Какая функция $g(n)$, определенная на положительных целых n, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sum_{d \backslash n} g(d)\,\varphi(n/d) = 1\,?$$

Здесь φ — функция Эйлера.

32 *Арифметическая прогрессия* — это бесконечное множество целых чисел

$$\{an+b\} = \{b, a+b, 2a+b, 3a+b, \ldots\}.$$

Множество арифметических прогрессий $\{a_1 n + b_1\}, \ldots, \{a_m n + b_m\}$ называется *точным покрытием*, если всякое неотрицательное целое встречается в одной и только в одной прогрессии. Например, точное покрытие образуют три прогрессии $\{2n\}$, $\{4n+1\}$, $\{4n+3\}$. Покажите, что если $\{a_1 n + b_1\}, \ldots, \{a_m n + b_m\}$ — точное покрытие, причем $2 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$, то $a_{m-1} = a_m$. *Указание:* используйте производящие функции.

Контрольные работы

33 Чему равно $[w^m z^n]\,\bigl(\ln(1+z)\bigr)/(1-wz)$?

34 Найдите замкнутое выражение для производящей функции $\sum_{n\geqslant 0} G_n(z) w^n$, если

$$G_n(z) = \sum_{k\leqslant n/m} \binom{n-mk}{k} z^{mk}.$$

(Здесь m — фиксированное положительное целое.)

35 Вычислите сумму $\sum_{0<k<n} 1/k(n-k)$ двумя способами:

a Разложите слагаемые в простейшие дроби.

b Представьте сумму как свертку и используйте производящие функции.

36 Пусть $A(z)$ — производящая функция для $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$. Выразите $\sum_n a_{\lfloor n/m \rfloor} z^n$ через A, z и m.

37 Пусть a_n обозначает число способов записать положительное целое n в виде суммы степеней 2, без учета порядка. Например, $a_4 = 4$, поскольку $4 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. Положим, по определению, $a_0 = 1$. Обозначим через $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ частичные суммы последовательности a.

a Составьте таблицу чисел a_n и b_n до $n = 10$. Какое замечательное соотношение можно усмотреть в таблице? (Пока не доказывайте его.)

b Выразите производящую функцию $A(z)$ в виде бесконечного произведения.

c Используйте выражение из части (b) для доказательства результата части (a).

38 Найдите замкнутое выражение для двойной производящей функции

$$M(w,z) = \sum_{m,n\geqslant 0} \min(m,n)\, w^m z^n .$$

Обобщите ваш ответ так, чтобы для фиксированного $m \geqslant 2$ получить замкнутое выражение для

$$M(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{n_1,\ldots,n_m\geqslant 0} \min(n_1,\ldots,n_m)\, z_1^{n_1}\ldots z_m^{n_m} .$$

39 Для заданных положительных целых m и n найдите замкнутые выражения для

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n} k_1k_2\ldots k_m \quad \text{и} \quad \sum_{1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n} k_1k_2\ldots k_m .$$

(Например, для $m = 2$ и $n = 3$ суммы, соответственно, будут $1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3$ и $1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+2\cdot2+2\cdot3+3\cdot3$.) *Указание:* какие коэффициенты при z^m будут в производящих функциях $(1+a_1z)\ldots(1+a_nz)$ и $1/(1-a_1z)\ldots(1-a_nz)$?

40 Выразите $\sum_k \binom{n}{k}(kF_{k-1}-F_k)(n-k)¡$ в замкнутом виде.

41 *Возрастающе-убывающей перестановкой* порядка n называется перестановка $a_1a_2\ldots a_n$ чисел $\{1,2,\ldots,n\}$, которая поочередно возрастает и убывает:

$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \cdots .$$

Например, 35142 есть возрастающе-убывающая перестановка порядка 5. Пусть A_n обозначает число возрастающе-убывающих перестановок порядка n. Покажите, что экспоненциальной производящей функцией $\langle A_n\rangle$ будет $(1+\sin z)/\cos z$.

42 Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, в состав которой входят пять символов, обозначаемых (a,b,c,d,e), вместо четырех символов в земных ДНК. Четыре пары символов — cd, ce, ed и ee — никогда

не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих запрещенных пар, возможна. (Запрещена, таким образом, цепочка bbcda, а bbdca вполне возможна.) Сколько цепочек ДНК длины n может существовать на Марсе? (Для $n = 2$ ответ 21, поскольку мы различаем левый и правый концы цепочки.)

43 *Производящая функция Ньютона* последовательности $\langle g_n \rangle$ есть, по определению,

$$\dot{G}(z) = \sum_n g_n \binom{z}{n}.$$

Найдите формулу свертки, которая устанавливает соотношение между последовательностями $\langle f_n \rangle$, $\langle g_n \rangle$ и $\langle h_n \rangle$ с производящими функциями Ньютона, удовлетворяющими уравнению $\dot{F}(z)\dot{G}(z) = \dot{H}(z)$. Постарайтесь, чтобы ваша формула была возможно более простой и симметричной.

44 Пусть q_n означает число возможных исходов при попарном сравнении n чисел $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Например, $q_3 = 13$, поскольку возможны следующие исходы

$$\begin{array}{llll} x_1 < x_2 < x_3\,; & x_1 < x_2 = x_3\,; & x_1 < x_3 < x_2\,; & x_1 = x_2 < x_3\,; \\ x_1 = x_2 = x_3\,; & x_1 = x_3 < x_2\,; & x_2 < x_1 < x_3\,; & \\ x_2 < x_1 = x_3\,; & x_2 < x_3 < x_1\,; & x_2 = x_3 < x_1\,; & \\ x_3 < x_1 < x_2\,; & x_3 < x_1 = x_2\,; & x_3 < x_2 < x_1\,. & \end{array}$$

Найдите выражение в замкнутом виде для ЭПФ $\widehat{Q}(z) = \sum_n q_n z^n/n!$. Найдите также последовательности $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$, $\langle c_n \rangle$, такие, что

$$q_n = \sum_{k\geqslant 0} k^n a_k = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} b_k = \sum_k \left\langle n \atop k \right\rangle c_k \quad \text{при любом } n > 0.$$

45 Вычислите $\sum_{m,n>0} [m \perp n]/m^2 n^2$.

46 Вычислите

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n-2k}{k} \left(\frac{-4}{27}\right)^k$$

в замкнутом виде. *Указание:* $z^3 - z^2 + \frac{4}{27} = (z + \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})^2$.

47 Покажите, что приведенные в (7.34) числа U_n и V_n из задачи о покрытии домино $3 \times n$-прямоугольника, тесно связаны с дробями в дереве Штерна—Броко, сходящимися к $\sqrt{3}$.

48 Некоторая определенная последовательность $\langle g_n \rangle$ удовлетворяет соотношению

$$ag_n + bg_{n+1} + cg_{n+2} + d = 0\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0,$$

для каких-то целых чисел (a, b, c, d) с $\text{НОД}(a, b, c, d) = 1$. Она также имеет замкнутый вид

$$g_n = \lfloor \alpha(1+\sqrt{2}\,)^n \rfloor\,, \qquad \text{целое } n \geqslant 0,$$

для какого-то вещественного числа α между 0 и 1. Найдите a, b, c, d и α.

Если о степенях, то о почетных.

49 Задача о степенях и четности.

a Рассмотрите последовательность $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle = \langle 2, 2, 6, \ldots\rangle$, определяемую формулой

$$a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\,.$$

Найдите простое рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет эта последовательность.

b Докажите, что $\lceil (1+\sqrt{2})^n \rceil \equiv n \pmod 2$ для любых целых $n > 0$.

c Найдите число α вида $(p+\sqrt{q})/2$, где p и q — положительные целые, такие, что $\lfloor \alpha^n \rfloor \equiv n \pmod 2$ для любых целых $n > 0$.

Конкурсные задачи

50 В продолжение упр. 22 рассмотрим сумму всех способов разбиения многоугольников на многоугольники:

$$Q = _ + \triangle + \square + \boxbslash + \boxslash + \pentagon + \pentagon + \pentagon + \pentagon + \pentagon + \pentagon + \pentagon + \cdots.$$

Найдите символическое уравнение для Q и постройте с его помощью производящую функцию для числа способов проведения непересекающихся диагоналей в выпуклом n-угольнике. (Дайте выражение в замкнутом виде для производящей функции как функции от z; не требуется находить замкнутое выражение для коэффициентов.)

51 Докажите, что произведение

$$2^{mn/2} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \left(\left(\cos^2 \frac{j\pi}{m+1}\right) \text{▯}^2 + \left(\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}\right) \text{▭}^2 \right)^{1/4}$$

является производящей функцией для покрытий домино $m \times n$-прямоугольника. (Входящие в формулу mn сомножителей можно представлять себе выписанными в mn клетках прямоугольника. Если mn нечетно, то средний сомножитель

нулевой. Коэффициентом при ▯^{j} ▭^{k} является число способов покрытия прямоугольника с помощью j вертикальных и k горизонтальных костяшек домино.) *Указание:* это трудная задача, выходящая за рамки данной книги. Возможно, вы ограничитесь простой проверкой справедливости формулы в случае $m = 3$, $n = 4$.

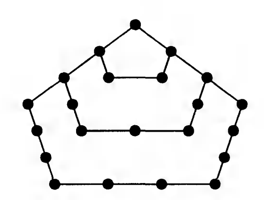
Что это — указание или предостережение?

52 Докажите, что многочлены, определяемые рекуррентным соотношением

$$p_n(y) = \left(y - \frac{1}{4}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-k} p_k(y), \quad \text{целое } n \geqslant 0,$$

имеют вид $p_n(y) = \sum_{m=0}^{n} \left|{n \atop m}\right| y^n$, где $\left|{n \atop m}\right|$ — целое число для $1 \leqslant m \leqslant n$. *Указание:* это упражнение очень поучительно, но не очень просто.

53 Последовательность *пятиугольных чисел* $\langle 1, 5, 12, 22, \ldots \rangle$ является очевидным обобщением треугольных и квадратных чисел:



Пусть $T_n = n(n+1)/2$ есть n-е треугольное число; $P_n = n(3n-1)/2$ — n-е пятиугольное число; и, наконец, пусть U_n означает число покрытий домино $3 \times n$-прямоугольника, определенное в (7.38). Докажите, что треугольное число $T_{(U_{4n+2}-1)/2}$ является также пятиугольным числом. *Указание:* $3U_{2n}^2 = (V_{2n-1} + V_{2n+1})^2 + 2$.

54 Рассмотрим следующую курьезную конструкцию:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
1	2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14		16	...
1	3	6	10		16	23	31	40		51	63	76	90		106	...
1	3	6			16	23	31			51	63	76			106	...
1	4	10			26	49	80			131	194	270			376	...
1	4				26	49				131	194				376	...
1	5				31	80				211	405				781	...
1					31					211					781	...
1					32					243					1024	...

(Начните со строки, содержащей все положительные целые. Затем удалите каждый m-й столбец; здесь $m = 5$. Затем замените оставшиеся элементы на их частичные суммы. Затем

удалите каждый $(m-1)$-й столбец. Затем вновь замените элементы на частичные суммы и т. д.) Используя производящие функции, покажите, что в конце концов получится последовательность m-х степеней. Так, для $m = 5$ получаем, как здесь показано, последовательность $\langle 1^5, 2^5, 3^5, 4^5, \dots \rangle$.

55 Докажите, что если степенные ряды $F(z)$ и $G(z)$ обладают свойством дифференцируемой конечности (определенным в упр. 20), то тем же свойством обладают $F(z) + G(z)$ и $F(z)G(z)$.

Исследовательские проблемы

56 Докажите, что в некотором широком классе „простых замкнутых выражений" не существует „простого замкнутого выражения" для коэффициента при z^n в $(1 + z + z^2)^n$, как функции от n.

57 Докажите или опровергните: если все коэффициенты ряда $G(z)$ равны либо 0, либо 1 и при этом все коэффициенты $G(z)^2$ меньше некоторой константы M, то бесконечно много из коэффициентов $G(z)^2$ равны нулю.

8

Дискретная вероятность

ЭЛЕМЕНТ СЛУЧАЙНОСТИ привлекается практически всегда, когда мы пытаемся объяснить окружающий нас мир. Математическая *теория вероятностей* позволяет вычислять вероятности сложных событий, если мы предположим, что эти события подчиняются определенным аксиомам. Эта теория имеет важные приложения во всех областях науки, и к тому же она тесно связана с методами, изученными нами в предыдущих главах.

Прилагательное „дискретная“ означает, что вероятности всех событий можно вычислить при помощи суммирования, а не интегрирования. Мы уже хорошо знакомы с суммами, поэтому нет ничего удивительного в том, что наши знания можно применить к вычислению ряда интересных вероятностей и средних значений.

8.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория вероятностей начинается с идеи *вероятностного пространства*, которое представляет собой множество Ω всего, что может случиться в рассматриваемой задаче, в совокупности с правилом, приписывающим каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ его вероятность $\Pr(\omega)$. В любом дискретном вероятностном пространстве вероятность $\Pr(\omega)$ должна быть неотрицательным целым числом и, кроме того, должно выполняться условие

(Читатели, не знакомые с теорией вероятностей, с большой вероятностью получат пользу от изучения классического введения Феллера в этот предмет [310].)

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega) = 1\,. \qquad (8.1)$$

Таким образом, все значения $\Pr(\omega)$ должны быть заключены в диапазоне $[0, 1]$. Мы называем $\Pr$ *распределением вероятностей*, поскольку функция $\Pr$ распределяет суммарную вероятность 1 между событиями ω.

Вот пример. Если мы бросаем пару игральных кубиков, то множество Ω элементарных событий представляет собой $D^2 =$

{⚀⚀, ⚀⚁, ..., ⚅⚅}, где

$$D = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

— множество всех шести возможностей падения одного определенного кубика. Два таких исхода, как ⚀⚁ и ⚁⚀, считаются различными; следовательно, это вероятностное пространство содержит всего $6^2 = 36$ элементов.

Обычно мы предполагаем, что кубики „правильные“, т. е. все шесть вариантов для одного кубика имеют вероятности $\frac{1}{6}$ и все 36 возможных исходов в Ω имеют вероятность $\frac{1}{36}$. Но можно рассмотреть также и кубики, содержащие в некоторых местах какую-либо „начинку“, из-за чего центр тяжести кубика перемещается и распределение вероятностей меняется. Положим, например,

Осторожно: начинка может оказаться взрывоопасной.

$$\Pr_1(⚀) = \Pr_1(⚅) = \tfrac{1}{4};$$

$$\Pr_1(⚁) = \Pr_1(⚂) = \Pr_1(⚃) = \Pr_1(⚄) = \tfrac{1}{8}.$$

Тогда $\sum_{d \in D} \Pr_1(d) = 1$, так что $\Pr_1$ является распределением вероятностей на множестве D, и мы можем приписать вероятности элементам $\Omega = D^2$ при помощи правила

$$\Pr_{11}(d\,d') = \Pr_1(d)\,\Pr_1(d'). \tag{8.2}$$

Например, $\Pr_{11}(⚅⚂) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Это правильное распределение, поскольку

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr_{11}(\omega) = \sum_{dd' \in D^2} \Pr_{11}(d\,d') = \sum_{d,d' \in D} \Pr_1(d)\,\Pr_1(d')$$

$$= \sum_{d \in D} \Pr_1(d) \sum_{d' \in D} \Pr_1(d') = 1 \cdot 1 = 1.$$

Можно рассмотреть также случай, когда один кубик правильный, а другой — с начинкой,

$$\Pr_{01}(d\,d') = \Pr_0(d)\,\Pr_1(d'), \qquad \text{где } \Pr_0(d) = \tfrac{1}{6}; \tag{8.3}$$

в этом случае $\Pr_{01}(⚅⚂) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$. Разумеется, у реальных „физических“ кубиков грани выпадают не в точности одинаково часто, поскольку любой кубик не вполне симметричен; однако значение $\frac{1}{6}$ обычно весьма близко к истинной вероятности.

Если бы все грани кубика были абсолютно одинаковы, то как бы мы узнали, какая грань выпала?

Подмножество множества Ω называется *событием*. В игре в кости, например, множество

{⚀⚀, ⚁⚁, ⚂⚂, ⚃⚃, ⚄⚄, ⚅⚅}

есть событие — „выпадение дублета“. Индивидуальные элементы ω множества Ω называются *элементарными событиями*, поскольку их нельзя разложить на меньшие подмножества. Один элемент ω можно рассматривать как одноэлементное событие $\{\omega\}$.

Вероятность события A определяется формулой

$$\Pr(\omega \in A) = \sum_{\omega \in A} \Pr(\omega)\,; \qquad (8.4)$$

и, в общем случае, если $R(\omega)$ — любое утверждение относительно ω, то будем писать '$\Pr(R(\omega))$' для обозначения суммы всех тех $\Pr(\omega)$, для которых $R(\omega)$ истинно. Так, например, вероятность дублета с правильными кубиками равна $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{1}{6}$; но если оба кубика несимметричны и имеют распределение вероятностей $\Pr_1$, то вероятность дублета будет $\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > \frac{1}{6}$. Смещение центра тяжести кубиков делает событие „выпадение дублета" более вероятным.

(Здесь мы использовали обозначение $\sum$ в более общем смысле, чем было определено в гл. 2: суммы в (8.1) и (8.4) распространяются на все элементы ω произвольного множества, а не только на целые числа. Однако это расширение в действительности не вызывает никаких проблем; мы можем условиться использовать под знаком $\sum$ специальное обозначение, когда подразумеваются не целые числа, и никаких коллизий с нашими обычными соглашениями не будет. Остальные определения из гл. 2 сохраняются в силе; в частности, определение бесконечной суммы в гл. 2 дает подходящую интерпретацию для наших сумм в случае бесконечного множества Ω. Все вероятности неотрицательны, а сумма их всех ограничена, поэтому вероятность события A в (8.4) корректно определена для всех подмножеств $A \subseteq \Omega$.)

Функция, определенная на элементарных событиях ω из вероятностного пространства, называется *случайной величиной*. Если, например, $\Omega = D^2$, то можно определить $S(\omega)$ как сумму очков на выпавших гранях для события ω, так что S(⚅⚂) $= 6 + 3 = 9$. Вероятность того, что сумма очков составит 7, есть вероятность события $S(\omega) = 7$, а именно,

Pr(⚀⚅) + Pr(⚁⚄) + Pr(⚂⚃)

+ Pr(⚃⚂) + Pr(⚄⚁) + Pr(⚅⚀) .

Для правильных кубиков ($\Pr = \Pr_{00}$) это событие происходит с вероятностью $\frac{1}{6}$; в случае смещения центра масс ($\Pr = \Pr_{11}$) вероятность будет $\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ — та же, что мы ранее нашли для дублета.

В рассуждениях о случайных величинах принято опускать обозначение '(ω)', поскольку обычно в каждой конкретной задаче имеется только одно вероятностное пространство. Так, мы будем говорить просто '$S = 7$' для обозначения того, что выпало 7 очков, или '$S = 4$' для обозначения события { ⚀⚂, ⚁⚁, ⚂⚀ }.

Случайную величину можно охарактеризовать распределением вероятностей ее значений. Так, например, S принимает 11 возможных значений $\{2, 3, \ldots, 12\}$, и мы можем выписать вероятность

события $S = s$ для всех s из этого множества:

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Pr_{00}(S=s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\Pr_{11}(S=s)$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}$

Если мы решаем задачу, включающую только случайную величину S, но не другие характеристики кубиков, то мы можем получить ответ, основываясь только на этих вероятностях, не вникая в детальное строение множества $\Omega = D^2$. Фактически мы могли бы определить вероятностное пространство как меньшее множество $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$ с желаемым распределением вероятностей $\Pr(s)$. Тогда '$S = 4$' будет элементарным событием. Таким образом, мы часто можем игнорировать вероятностное пространство Ω и работать непосредственно со случайными величинами и их распределениями.

Если на одном вероятностном пространстве Ω определены две случайные величины X и Y, то, чтобы охарактеризовать их поведение, не зная ничего об Ω, нам требуется знать их „совместное распределение“

$$\Pr(X=x \text{ и } Y=y)$$

для всех x в диапазоне изменения X и всех y в диапазоне изменения Y. Мы будем говорит, что X и Y — *независимые* случайные величины, если

$$\Pr(X=x \text{ и } Y=y) = \Pr(X=x) \cdot \Pr(Y=y) \qquad (8.5)$$

для всех x и y. Интуитивно это означает, что значение X не оказывает влияния на значение Y.

Так, если Ω есть множество бросаний кубиков D^2, то мы можем определить S_1 как число очков на первом кубике и S_2 — как число очков на втором. Тогда случайные величины S_1 и S_2 будут независимыми по отношению к каждому из рассмотренных ранее распределений вероятностей $\Pr_{00}$, $\Pr_{11}$ и $\Pr_{01}$, поскольку мы определяли вероятность каждого элементарного события dd' как произведение вероятностей событий $S_1 = d$ и $S_2 = d'$. Мы могли бы определить вероятности иначе, так, чтобы, скажем,

Неравенство на костях.

Pr(⚀⚄) / Pr(⚀⚅) ≠ Pr(⚁⚄) / Pr(⚁⚅);

но мы так не сделали, поскольку обычно кубики не влияют друг на друга. В наших обозначениях оба эти отношения равны $\Pr(S_2=5)/\Pr(S_2=6)$.

Мы определили S как сумму двух чисел очков, S_1+S_2. Рассмотрим другую случайную величину P: произведение $S_1 S_2$. Являются ли S и P независимыми? Рассуждая неформально, нет; если нам сказали, что $S = 2$, то мы знаем, что P должно равняться 1. Если действовать формально, снова нет, поскольку мы можем эффектно опровергнуть условие независимости (8.5) (по крайней

мере для правильных кубиков): для всех допустимых значений s и p имеем $0 < \Pr_{00}(S=s) \cdot \Pr_{00}(P=p) \leqslant \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9}$, что не может равняться значению $\Pr_{00}(S=s \text{ и } P=p)$, которое кратно $\frac{1}{36}$.

Желая выяснить типичное поведение какой-либо случайной величины, мы часто интересуемся ее „средним" значением. Однако понятие „среднего" неоднозначно; обычно, говоря о последовательности чисел, подразумевают три разновидности средних:

- *среднее арифметическое* (это сумма всех значений, деленная на их количество);
- *медиана* (это средний элемент последовательности, если упорядочить значения);
- *мода* (значение, встречающееся чаще других).

Например, среднее арифметическое значение последовательности $\langle 3, 1, 4, 1, 5 \rangle$ равно $\frac{3+1+4+1+5}{5} = 2.8$, ее медиана равна 3, а мода 1.

Однако объектами, с которыми имеет дело теория вероятностей, являются случайные величины, а не последовательности чисел, так что нужно определить понятие „среднего" и для случайных величин. Предположим, что мы многократно повторяем эксперимент, производя независимые испытания таким образом, чтобы каждое значение X появлялось с частотой, приблизительно пропорциональной его вероятности. (Например, мы могли бы много раз бросать пару кубиков, наблюдая за значениями S или P.) Мы бы хотели так определить среднее значение случайной величины, чтобы последовательность чисел, полученная в результате таких экспериментов, имела бы, как правило, приблизительно те же значения среднего арифметического, медианы и моды, что и соответствующие значения для случайной величины X, как мы их определим.

Вот как можно этого достичь. *Среднее* случайной величины X с вещественными значениями на вероятностном пространстве Ω есть, по определению,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \Pr(X=x)\,, \tag{8.6}$$

если эта, потенциально бесконечная, сумма существует. (Здесь $X(\Omega)$ обозначает множество всех значений, которые может принимать X.) *Медиана* X определяется как множество всех x, для которых

$$\Pr(X \leqslant x) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \Pr(X \geqslant x) \geqslant \frac{1}{2}\,. \tag{8.7}$$

Наконец, *мода* X определяется как множество всех таких x, что

$$\Pr(X=x) \geqslant \Pr(X=x') \qquad \text{для всех } x' \in X(\Omega). \tag{8.8}$$

В нашем примере с парой кубиков среднее значение величины S оказывается равным $2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$ для распределения $\Pr_{00}$; для распределения $\Pr_{11}$ оно также равняется 7. Медианой и модой в обоих распределениях также оказывается $\{7\}$.

Таким образом, S имеет одно и то же среднее значение по всем трем определениям. С другой стороны, случайная величина P при распределении $\Pr_{00}$ имеет среднее арифметическое $\frac{49}{4} = 12.25$; ее медианой является $\{10\}$, а модой $\{6, 12\}$. При переходе к кубикам с распределением $\Pr_{11}$ среднее арифметическое P не изменяется, однако медиана уменьшается до $\{8\}$, а модой становится единственный элемент $\{6\}$.

В теории вероятностей используется специальное название и обозначение для среднего арифметического случайной величины; среднее арифметическое называют *математическим ожиданием* и пишут

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\omega) . \tag{8.9}$$

В нашем примере эта сумма содержит 36 слагаемых (по одному для каждого элемента Ω), тогда как (8.6) есть сумма всего одиннадцати чисел. Однако обе суммы имеют одинаковое значение, поскольку обе они равны

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ x \in X(\Omega)}} x \Pr(\omega) \big[x = X(\omega)\big] .$$

Я понял: в среднем можно ожидать, что „среднее" означает „ожидаемое значение".

В приложениях среднее арифметическое случайной величины оказывается более полезным, чем другие виды средних, поэтому мы впредь практически забудем о медианах и модах и до конца главы будем употреблять термины „ожидаемое значение", „математическое ожидание" и „среднее" как равнозначные.

Если X и Y — две произвольные случайные величины, определенные на одном и том же вероятностном пространстве, то $X+Y$ также является случайной величиной на этом пространстве. По формуле (8.9) среднее суммы случайных величин есть сумма их средних:

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} \big(X(\omega) + Y(\omega)\big) \Pr(\omega) = EX + EY . \tag{8.10}$$

Аналогично, если α — любая константа, то имеет место простое правило

$$E(\alpha X) = \alpha EX . \tag{8.11}$$

Однако для умножения случайных величин соответствующее правило в общем случае будет более сложным; математическое ожидание определяется как сумма по элементарным событиям, а сумма произведений обычно не имеет простого выражения. Несмотря на эту трудность, имеется прекрасная формула для математического ожидания произведения в специальном случае независимых случайных величин:

$$E(XY) = (EX)(EY), \qquad \text{если X и Y независимы.} \tag{8.12}$$

Мы можем доказать это равенство при помощи дистрибутивного закона для произведений:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)Y(\omega)\cdot \Pr(\omega) \\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} xy\cdot \Pr(X=x \text{ и } Y=y) \\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} xy\cdot \Pr(X=x)\Pr(Y=y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\Pr(X=x) \cdot \sum_{y\in Y(\Omega)} y\Pr(Y=y) = (EX)(EY).
\end{aligned}$$

Например, мы знаем, что $S = S_1 + S_2$ и $P = S_1S_2$, где S_1 и S_2 — числа очков на первом и втором кубике. Мы знаем также, что $ES_1 = ES_2 = \frac{7}{2}$, следовательно, $ES = 7$; кроме того, S_1 и S_2 независимы и поэтому $EP = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{49}{4}$, как и утверждалось выше. Имеем также $E(S+P) = ES + EP = 7 + \frac{49}{4}$. Однако S и P не являются независимыми, так что мы не можем утверждать, что $E(SP) = 7\cdot\frac{49}{4} = \frac{343}{4}$. Фактически, ожидаемое значение SP оказывается равным $\frac{637}{6}$ в распределении $\Pr_{00}$, 112 (ровно) — в распределении $\Pr_{11}$.

8.2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ

Следующим по важности свойством случайной величины вслед за математическим ожиданием является ее *дисперсия*, определяемая как средний квадрат отклонения от среднего:

$$VX = E\big((X - EX)^2\big). \tag{8.13}$$

V от английского слова Variance — дисперсия. В отечественной литературе принято обозначать дисперсию величины X как DX. Для обозначения математического ожидания, наряду с EX, используется запись MX. — Перев.

Если обозначить EX через μ, то дисперсия VX будет ожидаемым значением $(X-\mu)^2$. Это характеристика „разброса" распределения X.

В качестве простого примера вычисления дисперсии предположим, что нам только что сделали предложение, от которого мы не в силах отказаться: некто подарил нам два сертификата для участия в одной лотерее. Устроители лотереи продают каждую неделю по 100 билетов, участвующих в отдельном тираже. В тираже выбирается один их этих билетов посредством равномерного случайного процесса — каждый билет имеет равные шансы быть выбранным — и обладатель этого счастливого билета получает сто миллионов долларов. Остальные 99 владельцев лотерейных билетов не выигрывают ничего.

(Тонкое место: в зависимости от нашей стратегии мы должны использовать разные вероятностные пространства, но EX_1 и EX_2 одинаковы в обоих случаях.)

Мы можем использовать подарок двумя способами: купить или два билета в одной лотерее, или по одному для участия в двух разных лотереях. Какая стратегия лучше? Попытаемся провести анализ. Для этого обозначим через X_1 и X_2 случайные величины, представляющие размер нашего выигрыша по первому и второму билету. Ожидаемое значение X_1, в миллионах, равно

$$EX_1 = \tfrac{99}{100} \cdot 0 + \tfrac{1}{100} \cdot 100 = 1\,,$$

и то же самое справедливо для X_2. Ожидаемые значения аддитивны, поэтому наш средний суммарный выигрыш составит

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2 \text{ миллиона долларов},$$

независимо от принятой стратегии.

Тем не менее, две стратегии выглядят различными. Выйдем за рамки ожидаемых значений и изучим полностью распределение вероятностей $X_1 + X_2$:

	выигрыш (миллионы)		
	0	100	200
один тираж	.9800	.0200	
разные тиражи	.9801	.0198	.0001

Если мы купим два билета в одной лотерее, то наши шансы не выиграть ничего составят 98% и 2% — шансы на выигрыш 100 миллионов. Если же мы купим билеты на разные тиражи, то цифры будут такими: 98.01% — шанс не выиграть ничего, что несколько больше, чем ранее; 0.01% — шанс выиграть 200 миллионов, также чуть больше, чем было ранее; и шанс выиграть 100 миллионов теперь составляет 1.98%. Таким образом, во втором случае распределение величины X_1+X_2 несколько более разбросано; среднее значение, 100 миллионов долларов, несколько менее вероятно, тогда как крайние значения более вероятны.

Именно это понятие разброса случайной величины призвана отразить дисперсия. Мы измеряем разброс через квадрат отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Таким образом, в случае 1 дисперсия составит

$$.98(0M - 2M)^2 + .02(100M - 2M)^2 = 196M^2\,;$$

в случае 2 дисперсия равна

$$.9801(0M - 2M)^2 + .0198(100M - 2M)^2 + .0001(200M - 2M)^2 = 198M^2\,.$$

Интересно, что дисперсия долларовых сумм выражается в квадратных долларах.

Как мы и ожидали, последняя величина несколько больше, поскольку распределение в случае 2 несколько более разбросано.

Когда мы работаем с дисперсиями, то все возводится в квадрат, так что в результате могут получиться весьма большие числа. (Множитель M^2 есть один триллион, это должно впечатлить

даже привычных к крупным ставкам игроков.) Для преобразования величин в более осмысленную исходную шкалу часто извлекают квадратный корень из дисперсии. Полученное число называется *стандартным отклонением* и обычно обозначается греческой буквой σ:

$$\sigma = \sqrt{VX}. \tag{8.14}$$

Стандартные отклонения величины $X_1 + X_2$ для наших двух лотерейных стратегий составят $\sqrt{196M^2} = 14.00M$ и $\sqrt{198M^2} \approx 14.071247M$. В некотором смысле второй вариант примерно на 71247 долларов рискованнее.

Каким образом дисперсия помогает в выборе стратегии? Это не ясно. Стратегия с большей дисперсией рискованнее; но что лучше для нашего кошелька — риск или безопасная игра? Пусть у нас есть возможность купить не два билета, а все сто. Тогда мы могли бы гарантировать выигрыш в одной лотерее (и дисперсия была бы нулевой); или же можно было сыграть в сотне разных тиражей, ничего не получая с вероятностью $.99^{100} \approx .366$, зато имея ненулевой шанс на выигрыш вплоть до 10 000 000 000 долларов. Выбор одной из этих альтернатив лежит за рамками этой книги; все, что мы можем сделать здесь,— это объяснить, как произвести подсчеты.

Еще один способ снизить риск — подкупить тиражную комиссию. Я думаю, это как раз тот случай, когда вероятность из дискретной превращается в дискредитирующую.

В действительности имеется более простой способ вычисления дисперсии, чем прямое использование определения (8.13). (Есть все основания подозревать здесь какую-то скрытую от глаз математику; иначе с чего бы дисперсия в лотерейных примерах оказалась целым кратным M^2.) Имеем

(Замечание: высказанные на этих полях мнения не обязательно совпадают с точкой зрения администрации.)

$$\begin{aligned} E\big((X - EX)^2\big) &= E\big(X^2 - 2X(EX) + (EX)^2\big) \\ &= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2, \end{aligned}$$

поскольку (EX) — константа; следовательно,

$$VX = E(X^2) - (EX)^2. \tag{8.15}$$

„Дисперсия есть среднее значение квадрата минус квадрат среднего значения."

Например, в задаче про лотерею средним значением $(X_1+X_2)^2$ оказывается $.98(0M)^2 + .02(100M)^2 = 200M^2$ или $.9801(0M)^2 + .0198(100M)^2 + .0001(200M)^2 = 202M^2$. Вычитание $4M^2$ (квадрата среднего) дает результаты, которые мы уже получили ранее более трудным путем.

Есть, однако, еще более простая формула, применимая, когда мы вычисляем $V(X+Y)$ для независимых X и Y. Имеем

$$\begin{aligned} E\big((X+Y)^2\big) &= E(X^2 + 2XY + Y^2) \\ &= E(X^2) + 2(EX)(EY) + E(Y^2), \end{aligned}$$

поскольку, как мы знаем, для независимых случайных величин $E(XY) = (EX)(EY)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - (EX+EY)^2 \\ &= E(X^2) + 2(EX)(EY) + E(Y^2) \\ &\qquad - (EX)^2 - 2(EX)(EY) - (EY)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2 + E(Y^2) - (EY)^2 \\ &= VX + VY. \end{aligned} \tag{8.16}$$

„Дисперсия суммы независимых случайных величин равняется сумме их дисперсий." Так, например, дисперсия суммы, которую можно выиграть на один лотерейный билет, равняется

$$E(X_1^2) - (EX_1)^2 = .99(0M)^2 + .01(100M)^2 - (1M)^2 = 99M^2 .$$

Следовательно, дисперсия суммарного выигрыша по двум лотерейным билетам в двух различных (независимых) лотереях составит $2 \times 99M^2 = 198M^2$. Соответствующее значение дисперсии для n независимых лотерейных билетов будет $n \times 99M^2$.

Дисперсия суммы S очков, выпавших на двух кубиках, может быть получена по той же формуле, поскольку $S = S_1 + S_2$ есть сумма двух независимых случайных величин. Имеем

$$VS_1 = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

для правильного кубика; следовательно, $VS = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$. В случае смещенного центра масс

$$VS_1 = \frac{1}{8}(2\cdot 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+2\cdot 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{12};$$

следовательно, $VS = \frac{45}{6} = 7.5$, если у обоих кубиков центр масс смещен. Заметьте, что в последнем случае дисперсия S больше, хотя S принимает среднее значение 7 чаще, чем в случае правильных кубиков. Если наша цель — выбросить побольше приносящих удачу семерок, то дисперсия — не лучший показатель успеха.

Ну хорошо, мы установили, как вычислить дисперсию. Но мы пока не дали ответа на вопрос, почему надо вычислять именно дисперсию. Все так делают, но почему? Основная причина заключается в *неравенстве Чебышёва* ([43] и [345]), которое устанавливает важное свойство дисперсии:

$$\Pr\big((X-EX)^2 \geqslant \alpha\big) \leqslant VX/\alpha \qquad \text{при любом } \alpha > 0. \tag{8.17}$$

(Это неравенство отличается от неравенств Чебышёва для сумм, встретившихся нам в гл. 2.) На качественном уровне (8.17) утверждает, что случайная величина X редко принимает значения, далекие от своего среднего EX, если ее дисперсия VX мала. Доказа-

тельство необычайно просто. Действительно,

$$
\begin{aligned}
VX &= \sum_{\omega\in\Omega} \bigl(X(\omega) - EX\bigr)^2 \Pr(\omega) \\
&\geqslant \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ (X(\omega)-EX)^2 \geqslant \alpha}} \bigl(X(\omega) - EX\bigr)^2 \Pr(\omega) \\
&\geqslant \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ (X(\omega)-EX)^2 \geqslant \alpha}} \alpha \Pr(\omega) \;=\; \alpha\cdot\Pr\bigl((X-EX)^2 \geqslant \alpha\bigr)\,;
\end{aligned}
$$

деление на α завершает доказательство.

Если мы обозначим математическое ожидание через μ, а стандартное отклонение — через σ и заменим в (8.17) α на c^2VX, то условие $(X - EX)^2 \geqslant c^2VX$ превратится в $(X-\mu)^2 \geqslant (c\sigma)^2$; следовательно, мы получим из (8.17)

$$
\Pr\bigl(|X-\mu| \geqslant c\sigma\bigr) \leqslant 1/c^2\,. \tag{8.18}
$$

Таким образом, X будет лежать в пределах c-кратного стандартного отклонения от своего среднего значения за исключением случаев, вероятность которых не превышает $1/c^2$. Случайная величина будет лежать в пределах 2σ от μ по крайней мере для 75% испытаний; в пределах от $\mu-10\sigma$ до $\mu+10\sigma$ — по крайней мере для 99%. Это случаи $\alpha = 4VX$ и $\alpha = 100VX$ неравенства Чебышёва.

Если бросить пару кубиков n раз, то общая сумма очков во всех n бросаниях почти всегда, при больших n, будет близка к $7n$. Причина этого следующая: дисперсия n независимых бросаний составит $\frac{35}{6}n$. Дисперсия в $\frac{35}{6}n$ означает стандартное отклонение всего

$$
\sqrt{\tfrac{35}{6}n}\,.
$$

Поэтому из неравенства Чебышёва получаем, что сумма очков будет лежать между

$$
7n - 10\sqrt{\tfrac{35}{6}n} \quad \text{и} \quad 7n + 10\sqrt{\tfrac{35}{6}n}
$$

по крайней мере для 99% всех бросаний n правильных кубиков. Например, итог миллиона бросаний с вероятностью более 99% будет заключен между 6.976 млн и 7.024 млн.

В общем случае, пусть X — *любая* случайная величина на вероятностном пространстве Ω, имеющая конечное математическое ожидание μ и конечное стандартное отклонение σ. Тогда можно ввести в рассмотрение вероятностное пространство Ω^n, элементарными событиями которого являются n-последовательности $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, где каждое $\omega_k \in \Omega$, а вероятность определяется как

$$
\Pr(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \Pr(\omega_1)\Pr(\omega_2)\ldots\Pr(\omega_n)\,.
$$

Если теперь определить случайные величины X_k формулой

$$X_k(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = X(\omega_k)\,,$$

то величина

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

будет суммой n независимых случайных величин, которая соответствует процессу суммирования n независимых реализаций величины X на Ω. Математическое ожидание $X_1+X_2+\cdots+X_n$ будет равно $n\mu$, а стандартное отклонение — $\sqrt{n}\,\sigma$; следовательно, среднее значение n реализаций,

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\,,$$

будет лежать в пределах от $\mu - 10\sigma/\sqrt{n}$ до $\mu + 10\sigma/\sqrt{n}$ по крайней мере в 99% временно́го периода. Иными словами, если выбрать достаточно большое n, то среднее арифметическое n независимых испытаний будет почти всегда очень близко к ожидаемому значению EX. (В учебниках теории вероятностей доказывается еще более сильная теорема, называемая усиленным законом больших чисел; но нам достаточно и простого следствия неравенства Чебышёва, которое мы только что вывели.)

(То есть среднее попадет в указанные границы по крайней мере в 99% случаев, когда мы наблюдаем набор из n независимых реализаций, для любого фиксированного значения n. Не следует переносить это утверждение на среднее бесконечной последовательности X_1, X_2, X_3, ... при меняющемся n.)

Иногда нам не известны характеристики вероятностного пространства, но требуется оценить математическое ожидание случайной величины X при помощи повторных наблюдений ее значения. (Например, нам могла бы понадобиться средняя полуденная температура января в Сан-Франциско; или же мы хотим узнать ожидаемую продолжительность жизни, на которой должны основывать свои расчеты страховые агенты.) Если в нашем распоряжении имеются независимые эмпирические наблюдения X_1, X_2, ..., X_n, то мы можем предположить, что истинное математическое ожидание приблизительно равно

$$\widehat{E}X = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\,. \tag{8.19}$$

Можно оценить и дисперсию, используя формулу

$$\widehat{V}X = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n-1} - \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2}{n(n-1)}\,. \tag{8.20}$$

Глядя на эту формулу, можно подумать, что $(n-1)$ в ней — типографская ошибка; казалось бы, там должно стоять n, как в (8.19), поскольку истинное значение дисперсии определяется в (8.15) через ожидаемые значения. Однако замена здесь n на $n-1$ позволяет получить лучшую оценку, поскольку из определения (8.20) вытекает, что

$$E(\widehat{V}X) = VX\,. \tag{8.21}$$

Вот доказательство:

$$\begin{aligned}
E(\widehat{V}X) &= \frac{1}{n-1}E\Bigl(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_j X_k\Bigr) \\
&= \frac{1}{n-1}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_j X_k)\Bigr) \\
&= \frac{1}{n-1}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} E(X^2) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bigl(E(X)^2[j\neq k] + E(X^2)[j=k]\bigr)\Bigr) \\
&= \frac{1}{n-1}\Bigl(nE(X^2) - \frac{1}{n}\bigl(nE(X^2) + n(n-1)E(X)^2\bigr)\Bigr) \\
&= E(X^2) - E(X)^2 = VX\,.
\end{aligned}$$

(В этой выкладке мы опираемся на независимость наблюдений, когда заменяем $E(X_j X_k)$ на $(EX)^2[j\neq k] + E(X^2)[j=k]$.)

На практике для оценки результатов эксперимента со случайной величиной X обычно вычисляют эмпирическое среднее $\hat{\mu} = \widehat{E}X$ и эмпирическое стандартное отклонение $\hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{V}X}$, после чего записывают ответ в виде ‘ $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}/\sqrt{n}$ ’. Вот, например, результаты бросаний пары кубиков, предположительно правильных:

⚃⚂ ⚄⚂ ⚂⚀ ⚅⚃ ⚁⚅

⚄⚅ ⚃⚀ ⚄⚀ ⚁⚅ ⚃⚂

эмпирическое среднее суммы очков S равняется

$$\hat{\mu} = (7+11+8+5+4+6+10+8+8+7)/10 = 7.4\,;$$

эмпирическая дисперсия равна

$$(7^2+11^2+8^2+5^2+4^2+6^2+10^2+8^2+8^2+7^2-10\hat{\mu}^2)/9 \approx 2.1^2\,.$$

Таким образом, из этого эксперимента мы получаем оценку суммы очков для этих кубиков $7.4 \pm 2.1/\sqrt{10} = 7.4 \pm 0.7$.

Разберем еще один пример, чтобы показать, как вычислять среднее и дисперсию теоретически, а не эмпирически. Одной из задач, рассматривавшихся в гл. 5, была „задача о футбольной победе“; в ней n шляп подбрасывалось в воздух, в результате чего проистекала их случайная перестановка. Мы показали в (5.51), что с вероятностью $n¡/n! \approx 1/e$ никто не получит обратно свою шляпу. Мы вывели также формулу

$$P(n,k) = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(n-k)¡ = \frac{1}{k!}\frac{(n-k)¡}{(n-k)!} \tag{8.22}$$

вероятности того, что ровно к k болельщикам вернутся их шляпы.

Для переформулировки этих результатов с использованием только что изученного формализма рассмотрим вероятностное

пространство Π_n, состоящее из всех $n!$ перестановок π чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, при этом $\Pr(\pi) = 1/n!$ для всех $\pi \in \Pi_n$. Случайная величина

Не путать с числом Фибоначчи.

$$F_n(\pi) = \text{число „неподвижных точек" в перестановке } \pi \in \Pi_n,$$

отвечает числу правильных „шляпопопаданий" в задаче о футбольной победе. Уравнение (8.22) дает $\Pr(F_n = k)$; но мы пока забудем, что нам известны формулы вроде этой; мы хотим только изучить ожидаемое значение величины F_n и ее стандартное отклонение.

Вычислить ожидаемое значение, обойдя при этом все сложности гл. 5, оказывается очень легко. Достаточно просто заметить, что

$$\begin{aligned} F_n(\pi) &= F_{n,1}(\pi) + F_{n,2}(\pi) + \cdots + F_{n,n}(\pi)\,, \\ F_{n,k}(\pi) &= [\text{позиция } k \text{ перестановки } \pi \text{ — неподвижная точка}]\,, \\ &\qquad\qquad \pi \in \Pi_n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$EF_n = EF_{n,1} + EF_{n,2} + \cdots + EF_{n,n}\,.$$

Однако ожидаемое значение $F_{n,k}$ есть просто вероятность события $F_{n,k} = 1$, которая равна $1/n$, поскольку ровно $(n-1)!$ из $n!$ перестановок $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n \in \Pi_n$ имеют $\pi_k = k$. Следовательно,

$$EF_n = n/n = 1 \qquad \text{при } n > 0. \tag{8.23}$$

Средняя шляпа.

В среднем одна шляпа попадет на свое место. „Случайная перестановка имеет в среднем одну неподвижную точку."

Теперь попытаемся найти стандартное отклонение. Этот вопрос труднее, поскольку величины $F_{n,k}$ не являются независимыми друг от друга. Однако дисперсию можно вычислить, проанализировав их взаимозависимость:

$$\begin{aligned} E(F_n^2) &= E\Bigl(\Bigl(\sum_{k=1}^{n} F_{n,k}\Bigr)^2\Bigr) = E\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{n,j}\,F_{n,k}\Bigr) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(F_{n,j}\,F_{n,k}) \\ &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} E(F_{n,k}^2) + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} E(F_{n,j}\,F_{n,k})\,. \end{aligned}$$

(При выводе (2.33) в гл. 2 мы уже использовали подобный трюк.) Далее, $F_{n,k}^2 = F_{n,k}$, поскольку $F_{n,k}$ равняется 0 или 1; следовательно, $E(F_{n,k}^2) = EF_{n,k} = 1/n$, как и ранее. Кроме того, если $j < k$, то $E(F_{n,j}\,F_{n,k}) = \Pr(\text{в перестановке } \pi \text{ точки } j \text{ и } k \text{ неподвижные}) = (n-2)!/n! = 1/n(n-1)$. Следовательно,

$$E(F_n^2) = \frac{n}{n} + \binom{n}{2}\frac{2}{n(n-1)} = 2 \qquad \text{при } n \geqslant 2. \tag{8.24}$$

(Проверим для $n = 3$: $\frac{2}{6}0^2 + \frac{3}{6}1^2 + \frac{0}{6}2^2 + \frac{1}{6}3^2 = 2$.) Дисперсия равна $E(F_n^2) - (EF_n)^2 = 1$, поэтому стандартное отклонение (как и среднее) равно 1. „Случайная перестановка $n \geqslant 2$ элементов имеет 1 ± 1 неподвижных точек."

8.3 ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если X — случайная величина, принимающая только целые неотрицательные значения, то мы можем компактно представить ее распределение вероятностей, используя методы гл. 7. *Производящей функцией случайной величины* (пфсв) X называется ряд

$$G_X(z) = \sum_{k\geqslant 0} \Pr(X=k)\, z^k\,. \tag{8.25}$$

Этот степенной ряд по степеням z содержит всю информацию о случайной величине X. Его можно записать еще двумя способами:

$$G_X(z) = \sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega)\, z^{X(\omega)} = E(z^X)\,. \tag{8.26}$$

Коэффициенты $G_X(z)$ неотрицательны и их сумма равна 1; последнее условие можно записать как

$$G_X(1) = 1\,. \tag{8.27}$$

Обратно, любой степенной ряд $G(z)$ с неотрицательными коэффициентами и со свойством $G(1) = 1$ является пфсв для некоторой случайной величины.

Самое приятное свойство производящих функций случайных величин — то, что они обычно упрощают вычисление средних и дисперсий. Вот как просто выражается, например, математическое ожидание:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k\geqslant 0} k\cdot \Pr(X=k) \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \Pr(X=k)\cdot kz^{k-1}\Big|_{z=1} = G'_X(1)\,. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Надо просто продифференцировать пфсв по z и подставить $z = 1$.

Вычислить дисперсию лишь немногим сложнее:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k\geqslant 0} k^2\cdot \Pr(X=k) \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \Pr(X=k)\cdot \bigl(k(k-1)z^{k-2} + kz^{k-1}\bigr)\Big|_{z=1} \\ &= G''_X(1) + G'_X(1)\,. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$VX = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 . \tag{8.29}$$

Мы видим из уравнений (8.28) и (8.29), что для нахождения математического ожидания и дисперсии нам достаточно суметь вычислить значения двух производных, $G'_X(1)$ и $G''_X(1)$. Нет необходимости в замкнутом выражении для вероятностей; нам даже не требуется знать саму функцию $G_X(z)$ в замкнутом виде.

Удобно ввести обозначения

$$\mathrm{Mean}(G) = G'(1) , \tag{8.30}$$

$$\mathrm{Var}(G) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 \tag{8.31}$$

для произвольной функции G, поскольку нам часто придется вычислять именно эти комбинации производных.

Следующее хорошее свойство ПФСВ — то, что во многих важных случаях производящие функции оказываются относительно простыми функциями z. Рассмотрим в качестве примера *равномерное распределение* порядка n, т. е. случайную величину, принимающую каждое из значений $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ с вероятностью $1/n$. В этом случае ПФСВ равна

$$U_n(z) = \frac{1}{n}(1 + z + \cdots + z^{n-1}) = \frac{1}{n}\frac{1 - z^n}{1 - z} , n \geqslant 1. \tag{8.32}$$

Мы получили замкнутый вид для $U_n(z)$, поскольку это — геометрическая прогрессия.

Это замкнутое выражение, однако, несколько обманчиво: если подставить в него $z = 1$ (наиболее важное для ПФСВ значение z), то получится неопределенное отношение $0/0$, хотя сама функция $U_n(z)$ является многочленом и вполне определена для любых z. То, что $U_n(1) = 1$, очевидно из исходного, незамкнутого выражения $(1 + z + \cdots + z^{n-1})/n$, хотя, по всей видимости, мы можем определить $U_n(1)$ и из его замкнутого выражения, обратившись к правилу Лопиталя и вычислив с его помощью $\lim_{z\to 1} U_n(z)$. Вычисление $U'_n(1)$ по правилу Лопиталя будет еще сложнее, поскольку в знаменателе окажется множитель $(z-1)^2$; $U''_n(1)$ создаст еще бо́льшие трудности.

К счастью, есть простой выход из этого затруднения. Если степенной ряд $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$ сходится по крайней мере для одного z с $|z| > 1$, то тем же свойством обладает и ряд $G'(z) = \sum_{n\geqslant 0} n g_n z^{n-1}$, и то же верно для $G''(z)$, $G'''(z)$ и т. д. Поэтому по формуле Тейлора можем записать

$$G(1+t) = G(1) + \frac{G'(1)}{1!}t + \frac{G''(1)}{2!}t^2 + \frac{G'''(1)}{3!}t^3 + \cdots ; \tag{8.33}$$

и все производные $G(z)$ при $z = 1$ появятся в качестве коэффициентов, если разложить $G(1+t)$ по степеням t.

Например, этим способом легко находятся производные для равномерной ПФСВ $U_n(z)$:

$$U_n(1+t) = \frac{1}{n}\frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}t + \frac{1}{n}\binom{n}{3}t^2 + \cdots + \frac{1}{n}\binom{n}{n}t^{n-1}.$$

Сравнение с (8.33) дает

$$U_n(1) = 1; \quad U_n'(1) = \frac{n-1}{2}; \quad U_n''(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}; \quad (8.34)$$

и, в общем случае, $U_n^{(m)}(1) = (n-1)^{\underline{m}}/(m+1)$, однако для вычисления среднего и дисперсии нам понадобятся лишь случаи $m = 1$ и $m = 2$. Математическое ожидание равномерного распределения равно

$$U_n'(1) = \frac{n-1}{2}, \quad (8.35)$$

а дисперсия равна

$$U_n''(1) + U_n'(1) - U_n'(1)^2 = 4\,\frac{(n-1)(n-2)}{12} + 6\,\frac{(n-1)}{12} - 3\,\frac{(n-1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}. \quad (8.36)$$

Третье место в реестре удобств занимает то свойство ПФСВ, что произведение ПФСВ отвечает сумме независимых случайных величин. В гл. 5 и 7 мы выяснили, что произведение производящих функций соответствует свертке последовательностей; однако для приложений даже более важно то, что свертка вероятностей отвечает сумме независимых случайных величин. Действительно, если X и Y — случайные величины, принимающие только целочисленные значения, то вероятность события $X + Y = n$ составляет

$$\Pr(X+Y=n) = \sum_k \Pr(X=k \quad \text{и} \quad Y=n-k).$$

Если X и Y независимы, то получаем

$$\Pr(X+Y=n) = \sum_k \Pr(X=k)\,\Pr(Y=n-k),$$

а это не что иное, как свертка. Следовательно, мы получаем эффектную формулу

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)\,G_Y(z), \qquad \text{если } X \text{ и } Y \text{ независимы.} \quad (8.37)$$

Ранее в этой главе мы видели, что $V(X+Y) = VX+VY$, если X и Y независимы. Пусть $F(z)$ и $G(z)$ — ПФСВ для X и Y, а $H(z)$ — ПФСВ для $X+Y$. Тогда

$$H(z) = F(z)G(z),$$

и из формул (8.28)–(8.31) для среднего и дисперсии мы можем сделать вывод, что должны выполняться равенства

$$\mathrm{Mean}(H) = \mathrm{Mean}(F) + \mathrm{Mean}(G)\,; \tag{8.38}$$
$$\mathrm{Var}(H) = \mathrm{Var}(F) + \mathrm{Var}(G)\,. \tag{8.39}$$

Эти формулы, выражающие некоторые свойства производных $\mathrm{Mean}(H) = H'(1)$ и $\mathrm{Var}(H) = H''(1) + H'(1) - H'(1)^2$, не выполняются для произведения произвольных функций $H(z) = F(z)G(z)$; вместо этого имеем

$$H'(z) = F'(z)G(z) + F(z)G'(z)\,,$$
$$H''(z) = F''(z)G(z) + 2F'(z)G'(z) + F(z)G''(z)\,.$$

Однако, подставив $z = 1$, можно увидеть, что (8.38) и (8.39) будут справедливы в общем случае, если выполнено условие

$$F(1) = G(1) = 1 \tag{8.40}$$

и требуемые производные существуют. Для справедливости этих формул не требуется, чтобы „вероятности" лежали в диапазоне $[0, 1]$. Чтобы удовлетворить условию (8.40) мы можем нормализовать функции $F(z)$ и $G(z)$, поделив их всюду на $F(1)$ и $G(1)$, если только $F(1)$ и $G(1)$ не равны нулю.

Математическое ожидание и дисперсия — это еще не все. Эти характеристики всего лишь два первых члена из бесконечного ряда так называемых *кумулянтов* (или *семиинвариантов*), введенных датским астрономом Торвальдом Николаи Тиеле [293] в 1903 г. Первые два кумулянта κ_1 и κ_2 случайной величины — это то, что мы до сих пор называли математическим ожиданием и дисперсией; вдобавок к ним имеются и кумулянты более высокого порядка, выражающие более тонкие свойства распределения. Если $G(z)$ — пфсв, то ее кумулянты любого порядка выражаются с помощью общей формулы

$$\ln G(e^t) = \frac{\kappa_1}{1!}t + \frac{\kappa_2}{2!}t^2 + \frac{\kappa_3}{3!}t^3 + \frac{\kappa_4}{4!}t^4 + \cdots\,. \tag{8.41}$$

Приглядимся к кумулянтам внимательнее. Если $G(z)$ — пфсв для X, то

$$G(e^t) = \sum_{k\geqslant 0}\Pr(X=k)e^{kt} = \sum_{k,m\geqslant 0}\Pr(X=k)\frac{k^m t^m}{m!}$$
$$= 1 + \frac{\mu_1}{1!}t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots\,, \tag{8.42}$$

где

$$\mu_m = \sum_{k\geqslant 0}k^m\Pr(X=k) = E(X^m)\,. \tag{8.43}$$

Эта величина μ_m называется „m-м моментом" случайной величины X. Мы можем взять экспоненту от обеих частей (8.41) и получим другую формулу для $G(e^t)$:

$$G(e^t) = 1 + \frac{(\kappa_1 t + \frac{1}{2}\kappa_2 t^2 + \cdots)}{1!} + \frac{(\kappa_1 t + \frac{1}{2}\kappa_2 t^2 + \cdots)^2}{2!} + \cdots$$
$$= 1 + \kappa_1 t + \tfrac{1}{2}(\kappa_2 + \kappa_1^2)t^2 + \cdots .$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях t дает следующий ряд формул:

$$\kappa_1 = \mu_1 , \qquad (8.44)$$
$$\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2 , \qquad (8.45)$$
$$\kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 , \qquad (8.46)$$
$$\kappa_4 = \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_2^2 - 6\mu_1^4 , \qquad (8.47)$$
$$\kappa_5 = \mu_5 - 5\mu_1\mu_4 + 20\mu_1^2\mu_3 - 10\mu_2\mu_3 + 30\mu_1\mu_2^2 - 60\mu_1^3\mu_2 + 24\mu_1^5 . \qquad (8.48)$$
$$\vdots$$

Эти формулы выражают кумулянты через моменты. Заметьте, что κ_2 действительно совпадает с дисперсией $E(X^2) - (EX)^2$, как утверждалось выше.

Из уравнения (8.41) ясно, что кумулянты, порождаемые произведением $F(z)G(z)$ двух ПФСВ, будут суммами соответствующих кумулянтов $F(z)$ и $G(z)$, поскольку логарифм произведения есть сумма логарифмов. Следовательно, все кумулянты суммы независимых случайных величин являются аддитивными, так же, как математическое ожидание и дисперсия. Это свойство делает кумулянты более важными, чем моменты.

„Для этих семиинвариантов более высокого порядка мы не предлагаем никаких специальных имен."
— Т. Н. Тиеле [293]

Если пойти несколько иным путем и записать

$$G(1+t) = 1 + \frac{\alpha_1}{1!}t + \frac{\alpha_2}{2!}t^2 + \frac{\alpha_3}{3!}t^3 + \cdots ,$$

то уравнение (8.33) показывает, что числа α — это „факториальные моменты"

$$\alpha_m = G^{(m)}(1) = \sum_{k\geqslant 0} \Pr(X=k)k^{\underline{m}} z^{k-m} \Big|_{z=1}$$
$$= \sum_{k\geqslant 0} k^{\underline{m}} \Pr(X=k) = E(X^{\underline{m}}) . \qquad (8.49)$$

Кроме того,

$$G(e^t) = 1 + \frac{\alpha_1}{1!}(e^t - 1) + \frac{\alpha_2}{2!}(e^t-1)^2 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{\alpha_1}{1!}(t + \tfrac{1}{2}t^2 + \cdots) + \frac{\alpha_2}{2!}(t^2 + t^3 + \cdots) + \cdots$$
$$= 1 + \alpha_1 t + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)t^2 + \cdots ,$$

и мы можем выразить кумулянты через производные $G^{(m)}(1)$:

$$\kappa_1 = \alpha_1\,, \tag{8.50}$$
$$\kappa_2 = \alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_1^2\,, \tag{8.51}$$
$$\kappa_3 = \alpha_3 + 3\alpha_2 + \alpha_1 - 3\alpha_2\alpha_1 - 3\alpha_1^2 + 2\alpha_1^3\,, \tag{8.52}$$
$$\vdots$$

Эта последовательность формул порождает „аддитивные“ тождества, которые продолжают (8.38) и (8.39) на все кумулянты.

А сейчас спустимся с небес на землю и применим рассмотренные идеи к простым примерам. Простейшей случайной величиной является „случайная константа“: случайная величина X принимает одно фиксированное значение x с вероятностью 1. В этом случае $G_X(z) = z^x$ и $\ln G_X(e^t) = xt$; следовательно, математическое ожидание равно x, а все остальные кумулянты — нули. Отсюда следует, что операция умножения любой ПФСВ на z^x увеличивает ожидаемое значение на x, но оставляет неизменными дисперсию и другие кумулянты.

Как применить производящие функции к кубикам? Распределению числа очков на одном правильном кубике отвечает ПФСВ

$$G(z) = \frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6} = zU_6(z)\,,$$

где U_6 — ПФСВ для равномерного распределения порядка 6. Множитель 'z' добавляет 1 к среднему, которое поэтому оказывается равным 3.5 вместо $\frac{n-1}{2} = 2.5$, как записано в (8.35); вместе с тем, этот 'z' не влияет на дисперсию (8.36), которая равняется $\frac{35}{12}$.

Производящая функция $G_S(z)$ суммы очков на двух независимых кубиках равна квадрату ПФСВ для одного кубика, т. е.

$$\frac{z^2+2z^3+3z^4+4z^5+5z^6+6z^7+5z^8+4z^9+3z^{10}+2z^{11}+z^{12}}{36} = z^2U_6(z)^2\,.$$

Если пару кубиков бросают n раз, то вероятность получить в итоге k очков, аналогично предыдущему, равна

$$[z^k]\,G_S(z)^n = [z^k]\,z^{2n}U_6(z)^{2n} = [z^{k-2n}]\,U_6(z)^{2n}\,.$$

Распределение шляп — это разновидность равномерного распределения.

В рассмотренной ранее задаче о подбрасывании шляп в честь победившей футбольной команды, известной также как задача подсчета неподвижных точек случайной перестановки, ПФСВ известна из (5.49):

$$F_n(z) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(n-k)_{¡}}{(n-k)!}\,\frac{z^k}{k!} \qquad \text{при } n \geqslant 0. \tag{8.53}$$

Следовательно,

$$F_n'(z) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(n-k)_{¡}}{(n-k)!}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} \frac{(n-1-k)_{¡}}{(n-1-k)!}\frac{z^k}{k!}$$
$$= F_{n-1}(z)\,.$$

Даже не зная никаких подробностей о коэффициентах, из рекуррентного соотношения $F_n'(z) = F_{n-1}(z)$ заключаем, что $F_n^{(m)}(z) = F_{n-m}(z)$; следовательно,

$$F_n^{(m)}(1) = F_{n-m}(1) = [n \geqslant m]\,. \tag{8.54}$$

Эта формула упрощает вычисление математического ожидания и дисперсии; мы находим (как и раньше, но быстрее), что обе характеристики равны 1 при $n \geqslant 2$.

На самом деле сейчас мы можем показать, что и m-й кумулянт κ_m этой случайной величины равен 1 для любого $n \geqslant m$. Действительно, m-й кумулянт зависит только от $F_n'(1), F_n''(1), \ldots, F_n^{(m)}(1)$, а все эти производные равны 1; следовательно, ответ для m-го кумулянта не изменится, если мы заменим $F_n(z)$ на предельную ПФСВ

$$F_\infty(z) = e^{z-1}\,, \tag{8.55}$$

такую, что $F_\infty^{(m)}(1) = 1$ для всех порядков производной. Кумулянты же F_∞ тождественно равны 1, поскольку

$$\ln F_\infty(e^t) = \ln e^{e^t-1} = e^t - 1 = \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\,.$$

8.4 БРОСАНИЕ МОНЕТЫ

Обратимся теперь к процессам, имеющим ровно два исхода. Если мы ставим монету на стол и щелчком закручиваем ее или подбрасываем монету с закруткой, то имеется некоторая вероятность p, что выпадет решка, и вероятность q — что орел, причем

$$p + q = 1\,.$$

(Мы считаем, что монета не останется стоять на ребре, не провалится в щель и т. п.) На протяжении этого раздела числа p и q всегда будут давать в сумме 1. Если монета *правильная*, то $p = q = \frac{1}{2}$; в противном случае монета называется *несимметричной.*

Виртуозы по подбрасыванию монет знают, что $p \approx 0.1$, если закручивать новое американское пенни на гладком столе. (Распределение масс таково, что голова Линкольна перетягивает и падает вниз.)

Производящая функция случайной величины для числа выпадений решки в результате одного бросания монеты есть

$$H(z) = q + pz\,. \tag{8.56}$$

Если монета брошена n раз (мы всегда будем предполагать, что различные бросания независимы), то число выпавших решек порождается функцией

$$H(z)^n = (q + pz)^n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k, \tag{8.57}$$

в соответствии с биномиальной теоремой. Таким образом, вероятность выбросить ровно k решек в n бросаниях составляет $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$. Эта последовательность вероятностей называется *биномиальным распределением.*

Допустим, мы подбрасываем монету до тех пор, пока впервые не выпадет решка. С какой вероятностью нам потребуется ровно k бросаний? С вероятностью p мы будем иметь $k = 1$ (поскольку это вероятность того, что в первый раз выпадет решка); событие $k = 2$ произойдет с вероятностью qp (это вероятность того, что в первый раз выпадет орел, а во второй — решка); и для произвольного k вероятность равна $q^{k-1}p$. Таким образом, производящая функция есть

$$pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \cdots = \frac{pz}{1 - qz}. \tag{8.58}$$

Повторение этого процесса до получения n решек дает производящую функцию

$$\left(\frac{pz}{1 - qz}\right)^n = p^n z^n \sum_k \binom{n+k-1}{k} (qz)^k$$
$$= \sum_k \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n} z^k. \tag{8.59}$$

Это случайно совпадает с умноженной на z^n функцией

$$\left(\frac{p}{1 - qz}\right)^n = \sum_k \binom{n+k-1}{k} p^n q^k z^k, \tag{8.60}$$

производящей функцией для *отрицательного биномиального распределения.*

Решка — я выигрываю, орел — ты проигрываешь.

Не идет? Ладно; орел — ты проигрываешь, решка — я выигрываю.

Опять нет? Хорошо, тогда решка — ты проигрываешь, орел — я выигрываю.

Вероятностное пространство в примере (8.59), где мы бросаем монету, пока не появится n решек, отличается от вероятностных пространств, с которыми мы имели дело в этой главе ранее. Отличие в том, что это пространство содержит бесконечно много элементов. Каждый элемент — это конечная последовательность решек и орлов, содержащая всего n решек и оканчивающаяся на решку; вероятность такой последовательности равна $p^n q^{k-n}$, где $k - n$ — количество орлов. Если, например, $n = 3$ и мы условимся писать P вместо решки и O вместо орла, то последовательность OPOOOPP является элементом рассматриваемого вероятностного пространства и имеет вероятность $qpqqqpp = p^3q^4$.

Пусть X — случайная величина с биномиальным распределением (8.57), а Y — случайная величина с отрицательным биномиальным распределением (8.60). Оба распределения зависят от параметров n и p. Математическое ожидание X равняется $nH'(1) = np$, поскольку ее ПФСВ есть $H(z)^n$; дисперсия равна

$$n\big(H''(1) + H'(1) - H'(1)^2\big) = n(0 + p - p^2) = npq\,. \qquad (8.61)$$

Таким образом, стандартное отклонение составляет $\sqrt{npq}$: если подбросить монету n раз, то можно ожидать выпадания решки примерно $np \pm \sqrt{npq}$ раз. Математическое ожидание и дисперсию Y можно найти аналогичным образом. Положим

$$G(z) = \frac{p}{1 - qz}\,.$$

Тогда имеем

$$G'(z) = \frac{pq}{(1 - qz)^2}\,,$$

$$G''(z) = \frac{2pq^2}{(1 - qz)^3}\,;$$

следовательно, $G'(1) = pq/p^2 = q/p$ и $G''(1) = 2pq^2/p^3 = 2q^2/p^2$. Поэтому математическое ожидание Y равно nq/p, а дисперсия — nq/p^2.

Среднее и дисперсию Y можно получить более простым путем, если ввести в рассмотрение обратную производящую функцию

$$F(z) = \frac{1 - qz}{p} = \frac{1}{p} - \frac{q}{p}z \qquad (8.62)$$

и записать

$$G(z)^n = F(z)^{-n}\,. \qquad (8.63)$$

Этот многочлен $F(z)$ не является производящей функцией случайной величины, поскольку у него есть отрицательный коэффициент. Однако он удовлетворяет главному условию $F(1) = 1$. Таким образом, $F(z)$ формально есть бином, отвечающий монете, у которой „вероятность“ выпадания решки равна $-q/p$; а $G(z)$ формально соответствует подбрасыванию такой монеты -1 раз(!). Таким образом, отрицательное биномиальное распределение с параметрами (n, p) можно рассматривать как обычное биномиальное распределение с параметрами $(n', p') = (-n, -q/p)$. Действуя формально, получаем, что математическое ожидание должно быть $n'p' = (-n)(-q/p) = nq/p$, а дисперсия должна равняться $n'p'q' = (-n)(-q/p)(1+q/p) = nq/p^2$. Этот формальный вывод, включающий отрицательные вероятности, тем не менее справедлив, поскольку наши предыдущие рассуждения для обычных биномиальных распределений были основаны на тождествах для формальных степенных рядов, в которых нигде не использовалось предположение $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Вот уж точно отрицательна вероятность того, что я становлюсь моложе.

Неужели? Но тогда вероятность того, что вы стареете или остаетесь в том же возрасте, больше 1.

Рассмотрим теперь другой пример. Вопрос будет формулироваться так: сколько раз понадобится подбросить монету, чтобы решка выпала два раза подряд? В этой задаче вероятностное пространство состоит из всех последовательностей букв Р и О, оканчивающихся на РР, но не содержащих двух подряд Р ранее:

$$\Omega = \{\text{РР}, \text{ОРР}, \text{ООРР}, \text{РОРР}, \text{ОООРР}, \text{ОРОРР}, \text{РООРР}, \ldots\}.$$

Чтобы получить вероятность любой определенной последовательности, достаточно заменить Р на p и О на q; так, например, последовательность ОРОРР встречается с вероятностью

$$\Pr(\text{ОРОРР}) = qpqpp = p^3q^2 .$$

Теперь можно поиграть с производящими функциями, как мы это делали в начале гл. 7, обозначив через S бесконечную сумму

$$S = \text{РР} + \text{ОРР} + \text{ООРР} + \text{РОРР} + \text{ОООРР} + \text{ОРОРР} + \text{РООРР} + \cdots$$

всех элементов из Ω. Если заменить каждую букву Р на pz, а каждую букву О на qz, то мы получим производящую функцию случайной величины для числа бросаний до появления двух последовательных решек.

Имеется довольно неожиданная связь между S и суммой всех покрытий домино

T = | + ▯ + ▯▯ + ⊟ + ▯▯▯ + ▯⊟ + ⊟▯ + ⋯

из уравнения (7.1). Оказывается, что можно получить S из T, если заменить каждое домино ▯ на О и каждую пару ⊟ на РО, а затем приписать в конце РР. Не составляет труда доказать это. Действительно, любой элемент из Ω имеет вид $(\text{О} + \text{РО})^n\text{РР}$ для некоторого $n \geqslant 0$, а любое слагаемое в T имеет вид (▯ + ⊟)^n. Следовательно, из (7.4) имеем

$$S = (1 - \text{О} - \text{РО})^{-1}\text{РР},$$

а производящая функция для нашей задачи равна

$$G(z) = \bigl(1 - qz - (pz)(qz)\bigr)^{-1}(pz)^2 = \frac{p^2z^2}{1 - qz - pqz^2}. \qquad (8.64)$$

Наш опыт работы с отрицательным биномиальным распределением подсказывает, что проще всего подсчитать математическое ожидание и дисперсию функции (8.64), если записать

$$G(z) = \frac{z^2}{F(z)},$$

где

$$F(z) = \frac{1 - qz - pqz^2}{p^2},$$

и подсчитать „математическое ожидание“ и „дисперсию“ этой псевдо-ПФСВ $F(z)$. (Вновь введенная функция обладает свойством

$F(1) = 1$.) Имеем

$$F'(1) = (-q-2pq)/p^2 = 2 - p^{-1} - p^{-2};$$
$$F''(1) = -2pq/p^2 = 2 - 2p^{-1}.$$

Теперь поскольку $z^2 = F(z)G(z)$, $\mathrm{Mean}(z^2) = 2$ и $\mathrm{Var}(z^2) = 0$, то математическое ожидание и дисперсия $G(z)$ таковы:

$$\mathrm{Mean}(G) = 2 - \mathrm{Mean}(F) = p^{-2} + p^{-1}; \qquad (8.65)$$
$$\mathrm{Var}(G) = -\mathrm{Var}(F) \quad = p^{-4} + 2p^{-3} - 2p^{-2} - p^{-1}. \qquad (8.66)$$

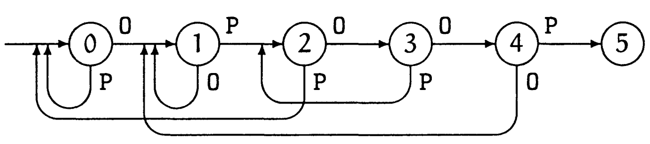
Для $p = \frac{1}{2}$ математическое ожидание и дисперсия составляют, соответственно, 6 и 22. (В упр. 4 обсуждается вычисление средних и дисперсий путем вычитания.)

А теперь представим себе более хитроумный эксперимент: будем бросать монету до тех пор, пока первый раз не встретится последовательность ОРООР. Сумма выигрышных позиций будет теперь

$$S = \mathrm{OPOOP} + \mathrm{POPOOP} + \mathrm{OOPOOP}$$
$$+ \mathrm{PPOPOOP} + \mathrm{POOPOOP} + \mathrm{OPOPOOP} + \mathrm{OOOPOOP} + \cdots;$$

эту сумму сложнее описать, чем предыдущую. Вспоминая, как мы решали в гл. 7 задачи про домино, мы можем получить формулу для S, рассматривая множество слагаемых как „автоматный язык", определяемый следующим „конечным автоматом":

„Да вы просто автомат, вычислительная машина,— воскликнул я.— Временами в вас есть что-то нечеловеческое."
—Дж. Х. Ватсон [162]



Элементарными событиями в вероятностном пространстве являются такие последовательности символов Р и О, которые переводят автомат из состояния 0 в состояние 5. Пусть, например, только что выпало ОРО; автомат оказывается в состоянии 3. Если теперь выпадет орел, то автомат перейдет в состояние 4; решка, выпавшая в состоянии 3, переводит автомат в состояние 2 (не в самое начало, поскольку последние ОР могут быть продолжены последовательностью ООР).

При такой постановке задачи мы можем обозначить через S_k сумму всех последовательностей, ведущих в состояние k; тогда

$$S_0 = 1 + S_0\,\mathrm{P} + S_2\,\mathrm{P},$$
$$S_1 = S_0\,\mathrm{O} + S_1\,\mathrm{O} + S_4\,\mathrm{O},$$
$$S_2 = S_1\,\mathrm{P} + S_3\,\mathrm{P},$$
$$S_3 = S_2\,\mathrm{O},$$
$$S_4 = S_3\,\mathrm{O},$$
$$S_5 = S_4\,\mathrm{P}.$$

Искомая сумма S — это S_5; мы можем найти ее, решая выписанную систему шести уравнений с шестью неизвестными S_0, S_1, ..., S_5. Заменив P на pz и O на qz, получим производящую функцию, причем коэффициент при z^n в S_k равняется вероятности попадания в состояние k после n бросаний.

Подобным же образом любая диаграмма переходов между состояниями, в которой переход из состояния j в состояние k происходит с заданной вероятностью $p_{j,k}$, дает систему линейных уравнений, решениями которой являются производящие функции для вероятностей состояний после n переходов. Объекты такого типа называются *марковскими процессами*, и их теория тесно связана с теорией линейных уравнений.

Однако задачу о бросании монеты можно решить гораздо проще, не прибегая к довольно сложной общей процедуре с построением конечного автомата. Вместо шести уравнений с шестью неизвестными $S_0, S_1, \ldots, S_5$ для полного описания S достаточно всего двух уравнений с двумя неизвестными. Трюк состоит в том, чтобы ввести в рассмотрение сумму $N = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ всех последовательностей результатов бросания, не содержащих заданную подпоследовательность OPOOP:

$$N = 1 + \text{P} + \text{O} + \text{PP} + \cdots + \text{OPOPO} + \text{OPOOO} + \cdots .$$

Имеем

$$1 + N(\text{P} + \text{O}) = N + S, \tag{8.67}$$

поскольку любое слагаемое из левой части либо оканчивается на OPOOP (и тогда принадлежит S), либо нет (и тогда принадлежит N); обратно, любое слагаемое из правой части либо пусто, либо принадлежит $N\,\text{P}$ или $N\,\text{O}$. Кроме того, мы имеем еще одно важное уравнение

$$N\,\text{OPOOP} = S + S\,\text{OOP}, \tag{8.68}$$

поскольку любое слагаемое из левой части содержит в себе член S, оканчивающийся на первую P или на вторую, а любое слагаемое из правой части принадлежит левой.

Эта система легко решается. Из соотношения (8.67) получаем $N = (1 - S)(1 - \text{P} - \text{O})^{-1}$, следовательно,

$$(1 - S)(1 - \text{O} - \text{P})^{-1}\,\text{OPOOP} = S(1 + \text{OOP}).$$

Как и ранее, для получения производящей функции $G(z)$ для числа бросаний монеты следует заменить P на pz и O на qz. Выполнив некоторые упрощения, проистекающие из тождества $p + q = 1$, получим

$$\frac{\bigl(1 - G(z)\bigr)\,p^2q^3z^5}{1 - z} = G(z)(1 + pq^2z^3);$$

следовательно, нашим решением будет

$$G(z) = \frac{p^2q^3z^5}{p^2q^3z^5 + (1+pq^2z^3)(1-z)} . \qquad (8.69)$$

Заметьте, что $G(1) = 1$, если $pq \neq 0$; мы с вероятностью 1 дождемся когда-нибудь последовательности ОРООР, если только монета не настолько несимметричная, что выпадает всегда одной стороной — всегда орлом или всегда решкой.

Чтобы вычислить математическое ожидание и дисперсию распределения (8.69), мы, как делали раньше, обратим $G(z)$, записав $G(z) = z^5/F(z)$, где F — многочлен:

$$F(z) = \frac{p^2q^3z^5 + (1+pq^2z^3)(1-z)}{p^2q^3} . \qquad (8.70)$$

Соответствующие производные равны

$$F'(1) = 5 - (1+pq^2)/p^2q^3 ,$$
$$F''(1) = 20 - 6pq^2/p^2q^3 ;$$

и если X — требуемое число бросаний, то будем иметь

$$EX = \mathrm{Mean}(G) = 5 - \mathrm{Mean}(F) = p^{-2}q^{-3} + p^{-1}q^{-1} ; \qquad (8.71)$$
$$\begin{aligned} VX = \mathrm{Var}(G) &= -\mathrm{Var}(F) \\ &= -25 + p^{-2}q^{-3} + 7p^{-1}q^{-1} + \mathrm{Mean}(F)^2 \\ &= (EX)^2 - 9p^{-2}q^{-3} - 3p^{-1}q^{-1} . \end{aligned} \qquad (8.72)$$

Для $p = \frac{1}{2}$ среднее и дисперсия составят 36 и 996.

Попробуем действовать более общо: уже решенная задача достаточно „произвольная“, чтобы на ее примере можно было понять метод анализа в общем случае, когда мы ждем появления *произвольной* последовательности A решек и орлов. Вновь обозначим через S сумму всех „выигрышных“ последовательностей букв Р и О, а через N — сумму всех последовательностей, в которых подпоследовательность A еще не встретилась. Уравнение (8.67) останется без изменений; уравнение (8.68) превратится в

$$NA = S\big(1 + A^{(1)}\,[A^{(m-1)} = A_{(m-1)}] + A^{(2)}\,[A^{(m-2)} = A_{(m-2)}] + \cdots + A^{(m-1)}\,[A^{(1)} = A_{(1)}]\big) , \qquad (8.73)$$

где m — длина A, а $A^{(k)}$ и $A_{(k)}$ обозначают, соответственно, последние и первые k букв из A. Если, например, в качестве A взять уже рассмотренную последовательность ОРООР, то будем иметь

$$A^{(1)} = \mathrm{P} ,\quad A^{(2)} = \mathrm{OP} ,\quad A^{(3)} = \mathrm{OOP} ,\quad A^{(4)} = \mathrm{POOP} ;$$
$$A_{(1)} = \mathrm{O} ,\quad A_{(2)} = \mathrm{OP} ,\quad A_{(3)} = \mathrm{OPO} ,\quad A_{(4)} = \mathrm{OPOO} .$$

Единственным точным совпадением здесь будет $A^{(2)} = A_{(2)}$, поэтому уравнение (8.73) сводится к (8.68).

Обозначим через $\widetilde{A}$ значение, которое получится, если в последовательности A заменить все P на p^{-1}, а все T на q^{-1}. Тогда нетрудно будет обобщить наш вывод уравнений (8.71) и (8.72) и получить математическое ожидание и дисперсию в общем случае (упр. 20):

$$EX = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_{(k)}\,[A^{(k)} = A_{(k)}]\,; \tag{8.74}$$

$$VX = (EX)^2 - \sum_{k=1}^{m} (2k-1)\widetilde{A}_{(k)}\,[A^{(k)} = A_{(k)}]\,. \tag{8.75}$$

В частном случае $p = \frac{1}{2}$ имеется особенно простая интерпретация этих формул. Если дана последовательность A решек и орлов длины m, то положим

$$A{:}A = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1}\,[A^{(k)} = A_{(k)}]\,. \tag{8.76}$$

Очень легко выписать двоичное представление этого числа. Для этого надо записать '1' под каждой позицией, обладающей тем свойством, что данная последовательность, если ее начало сдвинуть в эту позицию, в точности совпадет с первоначальной последовательностью в их общей части:

```
  A = HTHTHHTHTH
A:A = (1000010101)₂ = 512 + 16 + 4 + 1 = 533
      POPOPPOPOP     ✓
       POPOPPOPOP
        POPOPPOPOP
         POPOPPOPOP
          POPOPPOPOP
           POPOPPOPOP     ✓
            POPOPPOPOP
             POPOPPOPOP     ✓
              POPOPPOPOP
               POPOPPOPOP     ✓
```

Уравнение (8.74) утверждает, в сущности, что ожидаемое число бросаний до появления подпоследовательности A есть в точности 2(A:A) для правильной монеты, поскольку $\widetilde{A}_{(k)} = 2^k$ для $p = q = \frac{1}{2}$. Этот результат, найденный впервые советским математиком А. Д. Соловьевым в 1966 г. [278], выглядит на первый взгляд парадоксально: несамосовмещающиеся последовательности появляются раньше, чем самосовмещающиеся! Появления последовательности PPPPP нам придется ждать почти вдвое дольше, чем последовательностей PPPPO или OPPPP.

„Чем больше периодов у нашего слова, тем позже оно появляется."
— А. Д. Соловьев

Рассмотрим теперь забавную игру, которую изобрел Уолтер Пенни [234] в 1969 г. Алиса и Билл бросают монету до тех пор, пока не встретится РРО или РОО; Алиса выигрывает, если первой появится последовательность РРО, Билл выигрывает, если РОО появится раньше. Эта игра — теперь ее называют „Penney ante" — определенно выглядит справедливой, если используется правильная монета, ведь обе последовательности РРО и РОО имеют одинаковые характеристики, если рассматривать каждую из них по отдельности. Производящая функция случайной величины для времени ожидания последовательности РРО равна

$$G(z) = \frac{z^3}{z^3 - 8(z-1)},$$

и точно такая же ПФСВ для последовательности РОО. Следовательно, ни Алиса, ни Билл не имеют никакого преимущества, если они будут играть каждый сам по себе.

Конечно, никакого! Перед кем же они могут иметь преимущество?

Но если рассматривать обе подпоследовательности вместе, то между ними возникает интересное взаимодействие. Обозначим через S_A сумму конфигураций, выигрышных для Алисы, а через S_B — сумму выигрышных позиций Билла:

$$\begin{aligned} S_A &= \mathrm{PPO} + \mathrm{PPPO} + \mathrm{OPPO} + \mathrm{PPPPO} + \mathrm{POPPO} + \mathrm{OPPPO} + \cdots\,; \\ S_B &= \mathrm{POO} + \mathrm{OPOO} + \mathrm{POPOO} + \mathrm{OOPOO} + \mathrm{OPOPOO} + \mathrm{OOOPOO} + \cdots\,. \end{aligned}$$

Вспоминая наш трюк, использованный в случае одной подпоследовательности, снова обозначим через N сумму всех последовательностей, для которых пока ни один из игроков не выиграл:

$$N = 1 + \mathrm{P} + \mathrm{O} + \mathrm{PP} + \mathrm{PO} + \mathrm{OP} + \mathrm{OO} + \mathrm{PPP} + \mathrm{POP} + \mathrm{OPP} + \cdots. \qquad (8.77)$$

Легко проверить справедливость следующих уравнений:

$$\begin{aligned} 1 + N(\mathrm{P}+\mathrm{O}) &= N + S_A + S_B\,; \\ N\,\mathrm{PPO} &= S_A\,; \\ N\,\mathrm{POO} &= S_A\,\mathrm{O} + S_B\,. \end{aligned} \qquad (8.78)$$

Если положить $\mathrm{P} = \mathrm{O} = \frac{1}{2}$, то полученное значение S_A будет вероятностью выигрыша Алисы, а S_B — вероятностью выигрыша Билла. Наши три уравнения сводятся к следующим:

$$1 + N = N + S_A + S_B\,; \qquad \tfrac{1}{8}N = S_A\,; \qquad \tfrac{1}{8}N = \tfrac{1}{2}S_A + S_B\,;$$

и мы находим $S_A = \frac{2}{3}$, $S_B = \frac{1}{3}$. Алиса будет выигрывать примерно вдвое чаще Билла!

В обобщенной игре Алиса и Билл выбирают образцы A и B — некоторые последовательности решек и орлов — и бросают монету до тех пор, пока в последовательности результатов не встретится одна из подпоследовательностей A или B. Эти две подпоследовательности не обязательно равной длины, однако мы будем считать, что A не входит в B и B не входит в A. (В противном случае игра вырождается. Если, например, $A = \mathrm{PO}$, а $B = \mathrm{OPOP}$,

то бедный Билл никогда не сможет выиграть; если же $A = \text{POP}$, а $B = \text{OP}$, то, возможно, оба игрока одновременно издадут победный клич.) Тогда можно записать три уравнения, аналогичных (8.73) и (8.78):

$$\begin{aligned}
1 + N(P+O) &= N + S_A + S_B\,;\\
NA &= S_A \sum_{k=1}^{l} A^{(l-k)}\,[A^{(k)} = A_{(k)}]\\
&\qquad + S_B \sum_{k=1}^{\min(l,m)} A^{(l-k)}\,[B^{(k)} = A_{(k)}]\,;\\
NB &= S_A \sum_{k=1}^{\min(l,m)} B^{(m-k)}\,[A^{(k)} = B_{(k)}]\\
&\qquad + S_B \sum_{k=1}^{m} B^{(m-k)}\,[B^{(k)} = B_{(k)}]\,.
\end{aligned} \tag{8.79}$$

Здесь l — длина A, а m — длина B. Если взять $A = \text{POOPOPOP}$ и $B = \text{OPOPOOP}$, то последние два уравнения, зависящие от A и B, запишутся как

$$\begin{aligned}
N\,\text{POOPOPOP} &= S_A\,\text{OOPOPOP} + S_A + S_B\,\text{OOPOPOP} + S_B\,\text{OPOP}\,;\\
N\,\text{OPOPOOP} &= S_A\,\text{OPOOP} + S_A\,\text{OOP} + S_B\,\text{OPOOP} + S_B\,.
\end{aligned}$$

Для нахождения вероятностей победы при игре правильной монетой следует положить $P = O = \frac{1}{2}$; тогда два решающих уравнения превратятся в

$$\begin{aligned}
N &= S_A \sum_{k=1}^{l} 2^k\,[A^{(k)} = A_{(k)}] + S_B \sum_{k=1}^{\min(l,m)} 2^k\,[B^{(k)} = A_{(k)}]\,;\\
N &= S_A \sum_{k=1}^{\min(l,m)} 2^k\,[A^{(k)} = B_{(k)}] + S_B \sum_{k=1}^{m} 2^k\,[B^{(k)} = B_{(k)}]\,.
\end{aligned} \tag{8.80}$$

Для дальнейшего нам надо будет обобщить операцию $A{:}A$ из (8.76) на случай двух независимых последовательностей A и B:

$$A{:}B = \sum_{k=1}^{\min(l,m)} 2^{k-1}\,[A^{(k)} = B_{(k)}]\,. \tag{8.81}$$

Уравнения (8.80) упрощаются:

$$S_A(A{:}A) + S_B(B{:}A) = S_A(A{:}B) + S_B(B{:}B)\,;$$

преимущество Алисы выражается отношением

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{B{:}B - B{:}A}{A{:}A - A{:}B}\,. \tag{8.82}$$

(Эта красивая формула обнаружена Джоном Хортоном Конвеем [62].)

Если, как выше, A = POOPOPOP и B = OPOPOOP, то $A{:}A = (10000001)_2 = 129$, $A{:}B = (0001010)_2 = 10$, $B{:}A = (0001001)_2 = 9$ и $B{:}B = (1000010)_2 = 66$; поэтому отношение S_A/S_B составляет $(66-9)/(129-10) = 57/119$. Алиса будет выигрывать в среднем 57 раз из каждых 176.

В игре Пенни могут происходить странные вещи. Так, например, образец PPOP выигрывает у POPP с преимуществом 3/2, а POPP выигрывает у OPPP с преимуществом 7/5. Тогда образец PPOP должен быть гораздо лучше, чем OPPP. На самом же деле OPPP выигрывает у PPOP с преимуществом 7/5! Отношение между образцами в этой игре нетранзитивно. В упр. 57 доказывается, что какой бы образец $\tau_1\tau_2\ldots\tau_l$ длины $l \geqslant 3$ ни выбрала Алиса, Билл всегда может добиться лучшего, чем чисто случайная победа, если он выберет образец $\overline{\tau}_2\tau_1\tau_2\ldots\tau_{l-1}$, где $\overline{\tau}_2$ — противоположный к τ_2 символ при замене решка $\leftrightarrow$ орел.

OPPPигинально.

8.5 ХЕШИРОВАНИЕ

Мы завершим эту главу приложением теории вероятностей к программированию. Ряд важных алгоритмов хранения и выборки информации в ЭВМ основаны на методе, который называется „хеширование“. Общая задача заключается в хранении некоторого множества записей, каждая из которых содержит значение „ключа“ K и некоторые данные $D(K)$ об этом ключе; мы бы хотели иметь возможность быстро находить $D(K)$ по заданному K. Ключами могут, например, быть фамилии студентов, а связанными с ключами данными — оценки за домашнее задание.

Как по волшебству, глагол „хешировать“ в середине 60-х годов стал стандартным термином для преобразования ключа, хотя использовать такое недостойное слово в печати до 1967 г. никто не осмеливался.
— Д. Э. Кнут [141]

Реально используемые компьютеры не настолько вместительны, чтобы можно было выделить по отдельной ячейке для каждого возможного ключа; всего возможны миллиарды ключей, но в каждом конкретном приложении их присутствует не так уж много. Одно из решений состоит в том, чтобы хранить две таблицы, KEY[j] — для ключей и DATA[j] — для данных, $1 \leqslant j \leqslant N$, где N — общее число записей, которые могут быть размещены; еще одна переменная, n, показывает фактическое число записей. Тогда мы можем выполнять поиск заданного ключа K очевидным способом, последовательно просматривая таблицу:

S1 Установить $j := 1$. (Уже просмотрены все позиции $< j$.)
S2 Если $j > n$, остановиться. (Безуспешный поиск.)
S3 Если KEY[j] $= K$, остановиться. (Успешный поиск.)
S4 Увеличить j на 1 и вернуться к шагу S2. (Попробуем еще.)

В случае успешного поиска нужное значение данных $D(K)$ лежит в DATA[j]. После безуспешного поиска можно вставить K и $D(K)$ в таблицу при помощи следующих установок:

$$n := j, \quad \mathtt{KEY}[n] := K, \quad \mathtt{DATA}[n] := D(K),$$

в предположении, что таблица еще не заполнена до предела.

Этот метод работает правильно, но его работа может быть ужасающе медленной; при безуспешном поиске шаг S2 приходится повторить $n+1$ раз, а n может быть весьма большим.

Хеширование было придумано как раз для того, чтобы ускорить поиск. Основная идея, в одном из популярных вариантов, состоит в использовании m отдельных списков вместо одного огромного. „Хеш-функция" преобразует любой возможный ключ K в номер списка $h(K)$, лежащий в диапазоне от 1 до m. Вспомогательная таблица FIRST[i] содержит для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, указатель на первый элемент в списке i; еще одна вспомогательная таблица NEXT[j], $1 \leqslant j \leqslant N$, указывает на запись, следующую за записью j в том списке, которому эта запись принадлежит. Будем считать, что

Значение $h(K)$ часто называют „хеш-кодом" записи k. — Перев.

$$\begin{aligned} \texttt{FIRST[i]} &= -1\,, && \text{если список } i \text{ пуст;}\\ \texttt{NEXT[j]} &= 0\,, && \text{если запись } j \text{ последняя в своем списке.} \end{aligned}$$

Как и ранее, имеется переменная n, содержащая информацию об общем числе хранящихся записей.

Пусть, например, ключами являются имена и имеются $m = 4$ списка, разделяемые по первой букве имени:

$$h(\text{имя}) = \begin{cases} 1 & \text{для букв A–F;}\\ 2 & \text{для G–L;}\\ 3 & \text{для M–R;}\\ 4 & \text{для S–Z.} \end{cases}$$

Поначалу имеем четыре пустых списка и $n = 0$. Если ключом первой записи будет, скажем, имя Nora, то $h(\text{Nora}) = 3$ и поэтому Nora станет ключом первого элемента списка 3. Если следующими двумя именами окажутся Glenn и Jim, то оба они попадут в список 2. В этот момент таблица в памяти будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} &\texttt{FIRST[1]}=-1,\ \ \texttt{FIRST[2]}=2,\ \ \texttt{FIRST[3]}=1,\ \ \texttt{FIRST[4]}=-1.\\ &\texttt{KEY[1]}=\text{Nora}, \qquad \texttt{NEXT[1]}=0;\\ &\texttt{KEY[2]}=\text{Glenn}, \qquad \texttt{NEXT[2]}=3;\\ &\texttt{KEY[3]}=\text{Jim}, \qquad \texttt{NEXT[3]}=0; \qquad n=3. \end{aligned}$$

(Значения DATA[1], DATA[2] и DATA[3] содержат секретную информацию и не показаны здесь.) После вставки 18 записей списки могли бы содержать следующие имена:

Так увековечены имена студентов, которые на занятиях по конкретной математике сидели в первых рядах и предоставили свои имена для этого эксперимента.

список 1	список 2	список 3	список 4
Dianne	Glenn	Nora	Scott
Ari	Jim	Mike	Tina
Brian	Jennifer	Michael	
Fran	Joan	Ray	
Doug	Jerry	Paula	
	Jean		

В массиве KEY те же имена будут записаны вперемежку, однако значения NEXT позволяют разделить списки. Если мы теперь хотим найти имя John, то нам потребуется просмотреть шесть имен из списка 2 (этот список оказался самым длинным); но это все же не идет ни в какое сравнение с просмотром всех 18 имен.

Ниже приведено точное описание алгоритма, который ищет ключ K в соответствие с этой схемой:

H1 Установить $i := h(K)$ и $j :=$ FIRST[i].
H2 Если $j \leqslant 0$, остановиться. (Безуспешный поиск.)
H3 Если KEY[j] $= K$, остановиться. (Успешный поиск.)
H4 Установить $i := j$, затем $j :=$ NEXT[i] и вернуться к шагу H2. (Попробуем еще.)

Например, при поиске имени Jennifer в приведенном примере мы установим на шаге H1 $i := 2$ и $j := 2$; на шаге H3 найдем, что Glenn $\neq$ Jennifer; на шаге H4 установим $j := 3$ и на шаге H3 найдем, что Jim $\neq$ Jennifer. Выполнив шаги H4 и H3 еще раз, мы найдем Jennifer в таблице.

Держу пари, что их родители в восторге.

После успешного поиска искомые данные $D(K)$ содержатся в DATA[j], как и в предыдущем алгоритме. В случае безуспешного поиска мы можем вставить K и $D(K)$ в таблицу, выполнив следующие операции:

$$n := n + 1;$$
$$\textbf{если}\ \ j < 0,\ \ \textbf{то}\ \ \texttt{FIRST[i]} := n,\ \ \textbf{иначе}\ \ \texttt{NEXT[i]} := n;$$
$$\texttt{KEY[n]} := K;\ \ \texttt{DATA[n]} := D(K);\ \ \texttt{NEXT[n]} := 0. \qquad (8.83)$$

Теперь таблица вновь отвечает имеющимся данным.

Мы надеемся, что все списки будут иметь примерно одинаковую длину, поскольку в этом случае задача поиска будет решаться примерно в m раз быстрее. Обычно значение m гораздо больше четырех, так что множитель $1/m$ — это значительное улучшение.

Мы заранее не знаем, какие ключи будут в таблице, но обычно возможно так выбрать хеш-функцию h, чтобы значения $h(K)$ можно было считать случайной величиной, равномерно распределенной в интервале от 1 до m и независимой от хеш-кодов других присутствующих ключей. В таких случаях вычисление хеш-функции подобно бросанию кубика с m гранями. Может случиться, что все записи попадут в один список, точно так же, как на кубике может все время выпадать ⚅; однако теория вероятностей говорит нам, что списки *почти всегда* будут достаточно хорошо сбалансированы.

Анализ хеширования: введение

„Анализ алгоритмов" — это раздел информатики, занимающийся выводом количественной информации об эффективности компьютерных методов. „Вероятностный анализ алгоритмов" — это изучение времени работы алгоритмов, рассматриваемого как

случайная величина, зависящая от предполагаемых характеристик исходных данных. Хеширование особенно подходит для вероятностного анализа, поскольку метод хеширования исключительно эффективен в среднем, хотя его наихудший случай просто ужасен. (Наихудший случай здесь — когда все ключи имеют одинаковый хеш-код.) Так что программисту, использующему хеширование, лучше всего поверить в теорию вероятностей.

Обозначим через P количество выполнений шага H3 при работе предыдущего алгоритма. (Каждое выполнение шага H3 называется „пробой" в таблице.) Зная P, мы можем узнать, сколько раз выполняется каждый шаг, в зависимости от успеха или неудачи поиска:

Шаг	Безуспешный поиск	Успешный поиск
H1	1 раз	1 раз
H2	$P+1$ раз	P раз
H3	P раз	P раз
H4	P раз	$P-1$ раз

Таким образом, главная характеристика, определяющая время работы процедуры поиска, есть число проб P.

Чтобы представить себе работу алгоритма, можем вообразить, что у нас есть адресная книга, организованная неким специальным образом — на каждой странице размещается только одна запись. На обложке книги мы находим номер страницы первой записи в каждом из m списков; каждому ключу K соответствует список $h(K)$, которому тот принадлежит. На каждой странице книги содержится ссылка на следующую страницу в том списке, к которому эта страница относится. Число проб, требуемое для поиска адреса в такой книге,— это число страниц, которые нам придется просмотреть.

Если в таблицу помещено n элементов, то их расположение зависит только от соответствующих хеш-кодов $\langle h_1, h_2, \ldots, h_n \rangle$. Все m^n возможных последовательностей $\langle h_1, h_2, \ldots, h_n \rangle$ считаются равновероятными; случайная величина P зависит от этой последовательности.

Посмотрите под ковриком у двери.

Случай 1: ключ отсутствует

Рассмотрим сначала поведение P в случае безуспешного поиска в предположении, что в таблицу уже было помещено n записей. Вероятностное пространство, отвечающее данному случаю, состоит из m^{n+1} элементарных событий

$$\omega = (h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}),$$

где h_j есть хеш-код для j-го ключа в таблице, а h_{n+1} — хеш-код ключа, который не удалось найти. Мы предполагаем, что хеш-функция h была выбрана надлежащим образом, так что $\Pr(\omega) = 1/m^{n+1}$ для любого такого ω.

Если, например, $m = n = 2$, то имеются восемь равновероятных возможностей:

h_1	h_2	h_3:	P
1	1	1 :	2
1	1	2 :	0
1	2	1 :	1
1	2	2 :	1
2	1	1 :	1
2	1	2 :	1
2	2	1 :	0
2	2	2 :	2

Если $h_1 = h_2 = h_3$, то мы сделаем две неудачные пробы, прежде чем обнаружим, что новый ключ K не присутствует в таблице; если $h_1 = h_2 \neq h_3$, то нам не придется делать ни одной пробы; и т. д. Этот исчерпывающий список показывает, что для $m = n = 2$ распределение P описывается ПФСВ $(\frac{2}{8} + \frac{4}{8}z + \frac{2}{8}z^2) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z)^2$.

Безуспешный поиск требует по одной пробе для каждого элемента списка h_{n+1}, поэтому мы приходим к общей формуле

$$P = [h_1 = h_{n+1}] + [h_2 = h_{n+1}] + \cdots + [h_n = h_{n+1}] . \qquad (8.84)$$

Вероятность того, что $h_j = h_{n+1}$, составляет $1/m$ для $1 \leqslant j \leqslant n$; поэтому

$$EP = E[h_1 = h_{n+1}] + E[h_2 = h_{n+1}] + \cdots + E[h_n = h_{n+1}] = \frac{n}{m} .$$

Может быть, здесь нужно действовать медленнее. Пусть X_j — следующая случайная величина:

$$X_j = X_j(\omega) = [h_j = h_{n+1}] .$$

Тогда $P = X_1 + \cdots + X_n$ и $EX_j = 1/m$ для всех $j \leqslant n$; следовательно,

$$EP = EX_1 + \cdots + EX_n = n/m .$$

Что же, неплохо. Как мы и ожидали, среднее число проб в m раз меньше, чем без хеширования. Более того, случайные величины X_j независимы и имеют одинаковую производящую функцию

$$X_j(z) = \frac{m - 1 + z}{m} ;$$

следовательно, ПФСВ для общего числа проб в безуспешном поиске будет

$$P(z) = X_1(z) \ldots X_n(z) = \left(\frac{m - 1 + z}{m}\right)^n . \qquad (8.85)$$

Это биномиальное распределение с $p = 1/m$ и $q = (m-1)/m$; иными словами, число проб в безуспешном поиске ведет себя точно так же, как число выпавших решек при бросании несимметричной монеты с вероятностью выпадания решки $1/m$ при каждом

бросании. Уравнение (8.61) говорит нам теперь, что дисперсия P равна

$$npq = \frac{n(m-1)}{m^2}.$$

Если m велико, то дисперсия P приблизительно равна n/m, так что стандартное отклонение есть примерно $\sqrt{n/m}$.

Случай 2: ключ присутствует

Обратимся теперь к успешным поискам. Вероятностное пространство для этого случая несколько сложнее, в соответствии с нашей задачей. Мы выберем в качестве Ω множество элементарных событий

$$\omega = (h_1, \ldots, h_n; k), \tag{8.86}$$

где h_j представляет собой хеш-код для j-го ключа, как раньше, а k есть индекс искомого ключа (он имеет хеш-код h_k). Таким образом, $1 \leqslant h_j \leqslant m$ для $1 \leqslant j \leqslant n$ и $1 \leqslant k \leqslant n$; всего имеется $m^n \cdot n$ элементарных событий.

Пусть s_j — вероятность того, что ищется j-й помещенный в таблицу ключ. Тогда

$$\Pr(\omega) = s_k/m^n, \tag{8.87}$$

если ω — событие (8.86). (В некоторых приложениях чаще ищутся ключи, вставляемые первыми, или, наоборот, последние ключи, так что мы не будет предполагать, что все $s_j = 1/n$.) Заметим, что $\sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega) = \sum_{k=1}^{n} s_k = 1$, следовательно, (8.87) определяет корректное распределение вероятностей.

Число проб P в случае успешного поиска равно p, если ключ K является p-м ключом в своем списке. Следовательно,

$$P(h_1, \ldots, h_n; k) = [h_1 = h_k] + [h_2 = h_k] + \cdots + [h_k = h_k]; \tag{8.88}$$

или, если обозначить через X_j случайную величину $[h_j = h_k]$,

$$P = X_1 + X_2 + \cdots + X_k. \tag{8.89}$$

Пусть, например, мы имеем $m = 10$ и $n = 16$, и хеш-коды образовали следующую „случайную" последовательность:

Где я уже видел эту последовательность?

$$(h_1, \ldots, h_{16}) = 3\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ ;$$
$$(P_1, \ldots, P_{16}) = 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2\ 1\ 3\ 3\ .$$

Число проб P_j, требуемых для поиска j-го ключа, показано под h_j.

Уравнение (8.89) представляет P в виде суммы случайных величин, но мы не можем просто вычислить EP как $EX_1 + \cdots + EX_k$, поскольку значение k само является случайной величиной. Какова же производящая функция случайной величины P? Для ответа на этот вопрос нам придется на один момент отвлечься от нашей задачи и поговорить об *условных вероятностях*.

Уравнение (8.43) тоже моментальное отвлечение.

Если A и B — некоторые события в вероятностном пространстве, то будем говорить, что условная вероятность A при условии B есть

$$\Pr(\omega \in A \mid \omega \in B) = \frac{\Pr(\omega \in A \cap B)}{\Pr(\omega \in B)}. \qquad (8.90)$$

Например, если X и Y — случайные величины, то условная вероятность события $X = x$ при условии $Y = y$ равна

$$\Pr(X{=}x \mid Y{=}y) = \frac{\Pr(X{=}x \text{ и } Y{=}y)}{\Pr(Y{=}y)}. \qquad (8.91)$$

Для любого фиксированного y в диапазоне изменения Y сумма всех этих условных вероятностей по всем x в диапазоне изменения X составит $\Pr(Y{=}y)/\Pr(Y{=}y) = 1$; следовательно, (8.91) определяет распределение вероятностей, и мы можем определить новую случайную величину '$X|y$', такую, что $\Pr(X|y = x) = \Pr(X{=}x \mid Y{=}y)$.

Если X и Y независимы, то случайная величина $X|y$ в сущности совпадает с X при любом y, поскольку $\Pr(X{=}x \mid Y{=}y)$ равняется $\Pr(X{=}x)$ в силу (8.5); это как раз условие независимости. Однако если X и Y зависимы, то случайные величины $X|y$ и $X|y'$ могут быть совершенно не похожи друг на друга при $y \ne y'$.

Если X принимает только целые неотрицательные значения, то можно разложить ее ПФСВ в сумму условных ПФСВ по отношению к любой другой случайной величине Y:

$$G_X(z) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \Pr(Y{=}y)\, G_{X|y}(z). \qquad (8.92)$$

Это соотношение справедливо потому, что коэффициент при z^x в левой части есть $\Pr(X{=}x)$ для всех $x \in X(\Omega)$, тогда как в правой части он равен

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} \Pr(Y{=}y) \Pr(X{=}x \mid Y{=}y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \Pr(X{=}x \text{ и } Y{=}y)$$
$$= \Pr(X{=}x).$$

Так, если X есть произведение очков, выпавших на двух правильных кубиках, а Y — сумма очков, то ПФСВ $X|6$ будет

$$G_{X|6}(z) = \tfrac{2}{5}z^5 + \tfrac{2}{5}z^8 + \tfrac{1}{5}z^9,$$

поскольку условные вероятности для $Y = 6$ содержат пять равновероятных событий {⚀⚄, ⚁⚃, ⚂⚂, ⚃⚁, ⚄⚀}. Уравнение (8.92) в этом случае сведется к

$$G_X(z) = \tfrac{1}{36}G_{X|2}(z) + \tfrac{2}{36}G_{X|3}(z) + \tfrac{3}{36}G_{X|4}(z) + \tfrac{4}{36}G_{X|5}(z)$$
$$\tfrac{5}{36}G_{X|6}(z) + \tfrac{6}{36}G_{X|7}(z) + \tfrac{5}{36}G_{X|8}(z) + \tfrac{4}{36}G_{X|9}(z)$$
$$\tfrac{3}{36}G_{X|10}(z) + \tfrac{2}{36}G_{X|11}(z) + \tfrac{1}{36}G_{X|12}(z);$$

Вот теперь я понимаю, что имеют в виду математики, говоря „очевидно“, „ясно“ или „тривиально“.

эту формулу достаточно один раз понять, и она станет очевидной. (Конец отвлечения.)

Формула (8.92) позволяет выписать ПФСВ для числа проб в успешном поиске, если положить в ней $X = P$ и $Y = K$. Для любого фиксированного k от 1 до n случайная величина $P|k$ определяется как сумма независимых случайных величин $X_1 + \cdots + X_k$; это в точности (8.89). Поэтому ее ПФСВ равна

$$G_{P|k}(z) = \left(\frac{m-1+z}{m}\right)^{k-1} z\,.$$

Это очевидно, и я полагаю, что хороший первокурсник может это проделать, хотя это не тривиально.
— П. Эрдёш [390]

Следовательно, ПФСВ для самой величины P может быть записана как

$$\begin{aligned} G_P(z) &= \sum_{k=1}^{n} s_k G_{P|k}(z) = \sum_{k=1}^{n} s_k \left(\frac{m-1+z}{m}\right)^{k-1} z \\ &= zS\left(\frac{m-1+z}{m}\right), \end{aligned} \qquad (8.93)$$

где

$$S(z) = s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \cdots + s_n z^{n-1} \qquad (8.94)$$

есть ПФСВ для вероятностей поиска s_k (поделенная для удобства на z).

Очень хорошо. Мы имеем производящую функцию для случайной величины P; теперь найдем математическое ожидание и дисперсию путем дифференцирования. Вычисления несколько упрощаются, если убрать множитель z, вычислив поначалу математическое ожидание и дисперсию случайной величины $P - 1$:

$$\begin{aligned} F(z) &= G_P(z)/z = S\left(\frac{m-1+z}{m}\right); \\ F'(z) &= \frac{1}{m} S'\left(\frac{m-1+z}{m}\right); \\ F''(z) &= \frac{1}{m^2} S''\left(\frac{m-1+z}{m}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$EP = 1 + \mathrm{Mean}(F) = 1 + F'(1) = 1 + m^{-1}\,\mathrm{Mean}(S)\,; \qquad (8.95)$$

$$\begin{aligned} VP = \mathrm{Var}(F) &= F''(1) + F'(1) - F'(1)^2 \\ &= m^{-2}S''(1) + m^{-1}S'(1) - m^{-2}S'(1)^2 \\ &= m^{-2}\,\mathrm{Var}(S) + (m^{-1} - m^{-2})\,\mathrm{Mean}(S)\,. \end{aligned} \qquad (8.96)$$

Эти общие формулы выражают математическое ожидание и дисперсию числа проб P через математическое ожидание и дисперсию заданного распределения искомых ключей S.

Пусть, например, $s_k = 1/n$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. Это значит, что мы выполняем полностью „случайные" успешные поиски с равной вероятностью для всех ключей в таблице. Тогда $S(z)$ является равномерным распределением $U_n(z)$ из (8.32) и мы имеем $\text{Mean}(S) = (n-1)/2$, $\text{Var}(S) = (n^2-1)/12$. Следовательно,

$$EP = \frac{n-1}{2m} + 1\,; \tag{8.97}$$

$$VP = \frac{n^2-1}{12m^2} + \frac{(m-1)(n-1)}{2m^2} = \frac{(n-1)(6m+n-5)}{12m^2}\,. \tag{8.98}$$

Вновь мы получили ускорение в желаемой пропорции $1/m$. Если $m \approx n/\ln n$ и $n \to \infty$, то среднее число проб при успешном поиске будет примерно равно $\frac{1}{2}\ln n$, а стандартное отклонение асимптотически равно $(\ln n)/\sqrt{12}$.

С другой стороны, мы могли бы принять $s_k = (kH_n)^{-1}$ для $1 \leqslant k \leqslant n$; это распределение называется „законом Зипфа". Тогда $\text{Mean}(S) = n/H_n$ и $\text{Var}(S) = \frac{1}{2}n(n+1)/H_n - n^2/H_n^2$. Среднее число проб для $m \approx n/\ln n$ при $n \to \infty$ примерно равно 2 со стандартным отклонением, асимптотически равным $\sqrt{\ln n}/\sqrt{2}$.

В обоих случаях проведенный анализ позволяет спать спокойно тем пессимистам среди нас, кто опасается наихудшего случая: из неравенства Чебышёва следует, что списки будут хорошими и короткими, за исключением крайне редких случаев.

Случай 2, продолжение: разнообразные дисперсии

Мы только что вычислили дисперсию числа проб в случае успешного поиска, рассматривая P как случайную величину на вероятностном пространстве из $m^n \cdot n$ элементов $(h_1, \ldots, h_n; k)$. Но мы могли бы встать на другую точку зрения. Каждый набор хеш-кодов $(h_1, \ldots, h_n)$ определяет случайную величину $P|(h_1, \ldots, h_n)$, представляющую число проб в случае успешного поиска в этой конкретной хеш-таблице, содержащей n заданных ключей. Среднее значение $P|(h_1, \ldots, h_n)$,

$$A(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{p=1}^{n} p \cdot \Pr\bigl(P|(h_1, \ldots, h_n) = p\bigr)\,, \tag{8.99}$$

как можно считать, представляет время выполнения успешного поиска. Величина $A(h_1, \ldots, h_n)$ является случайной величиной, которая зависит только от $(h_1, \ldots, h_n)$, но не от последней компоненты k; мы можем записать ее в форме

$$A(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} s_k\, P(h_1, \ldots, h_n; k)\,,$$

где $P(h_1, \ldots, h_n; k)$ определена в (8.88), поскольку $P|(h_1, \ldots, h_n) = p$

с вероятностью

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\Pr\bigl(P(h_1,\ldots,h_n;k)=p\bigr)}{\sum_{k=1}^{n}\Pr(h_1,\ldots,h_n;k)}
=\frac{\sum_{k=1}^{n}m^{-n}s_k\bigl[P(h_1,\ldots,h_n;k)=p\bigr]}{\sum_{k=1}^{n}m^{-n}s_k}
=\sum_{k=1}^{n}s_k\bigl[P(h_1,\ldots,h_n;k)=p\bigr]\,.$$

Ожидаемое значение $A(h_1,\ldots,h_n)$, полученное суммированием по всем m^n возможным наборам $(h_1,\ldots,h_n)$ с последующим делением на m^n, будет совпадать с ранее найденным в (8.95) математическим ожиданием. Однако *дисперсия* $A(h_1,\ldots,h_n)$ будет отличаться; это — дисперсия m^n средних, а не $m^n\cdot n$ отдельных значений числа проб. Например, для $m=1$ (так что у нас имеется только один список) „среднее" значение $A(h_1,\ldots,h_n)=A(1,\ldots,1)$ есть на самом деле константа, и поэтому ее дисперсия VA равна нулю; однако число проб в успешном поиске не постоянно, и его дисперсия VP не нулевая.

Всем известно, что VP (вице-президент) не ноль только в год выборов.

Для иллюстрации этой разницы между дисперсиями выполним вычисления для произвольных m и n в простейшем случае, $s_k=1/n$ для $1\leqslant k\leqslant n$. Иными словами, мы предположим временно, что ключи поиска распределены равномерно. Любая данная последовательность хеш-кодов $(h_1,\ldots,h_n)$ определяет m списков, содержащих, соответственно, $(n_1,n_2,\ldots,n_m)$ элементов для некоторых чисел n_j, причем

$$n_1+n_2+\cdots+n_m=n\,.$$

Успешный поиск, в котором любой из n ключей в таблице равновероятен, потребует в среднем

$$A(h_1,\ldots,h_n)=\frac{(1+\cdots+n_1)+(1+\cdots+n_2)+\cdots+(1+\cdots+n_m)}{n}
=\frac{n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+\cdots+n_m(n_m+1)}{2n}
=\frac{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_m^2+n}{2n}$$

проб. Наша цель — вычислить дисперсию величины $A(h_1,\ldots,h_n)$ на вероятностном пространстве, состоящем из всех m^n последовательностей $(h_1,\ldots,h_n)$.

Как оказывается, проще вычислить дисперсию несколько иной величины

$$B(h_1,\ldots,h_n)=\binom{n_1}{2}+\binom{n_2}{2}+\cdots+\binom{n_m}{2}\,.$$

Имеем

$$A(h_1,\ldots,h_n)=1+B(h_1,\ldots,h_n)/n\,,$$

следовательно, математическое ожидание и дисперсия A удовлетворяют соотношениям

$$EA = 1 + \frac{EB}{n}; \qquad VA = \frac{VB}{n^2}. \tag{8.100}$$

Вероятность того, что размеры списков составят $n_1, n_2, \ldots, n_m$, равняется мультиномиальному коэффициенту

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!},$$

деленному на m^n; следовательно, ПФСВ для $B(h_1, \ldots, h_n)$ есть

$$B_n(z) = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ n_1+n_2+\cdots+n_m=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} z^{\binom{n_1}{2}+\binom{n_2}{2}+\cdots+\binom{n_m}{2}} m^{-n}.$$

Для неискушенного глаза эта сумма выглядит жутковато, однако наш опыт, приобретенный в гл. 7, позволяет распознать в ней m-кратную свертку. И действительно, если определить экспоненциальную суперпроизводящую функцию

$$G(w, z) = \sum_{n \geqslant 0} B_n(z) \frac{m^n w^n}{n!},$$

то мы можем легко убедиться, что $G(w, z)$ есть просто m-я степень:

$$G(w, z) = \left(\sum_{k \geqslant 0} z^{\binom{k}{2}} \frac{w^k}{k!} \right)^m.$$

Для проверки подставим $z = 1$; мы получим $G(w, 1) = (e^w)^m$, так что коэффициентом при $m^n w^n/n!$ будет $B_n(1) = 1$.

Если бы мы нашли значения $B_n'(1)$ и $B_n''(1)$, то смогли бы вычислить $\mathrm{Var}(B_n)$. Возьмем поэтому частную производную $G(w, z)$ по z:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} G(w, z) &= \sum_{n \geqslant 0} B_n'(z) \frac{m^n w^n}{n!} \\
&= m \left(\sum_{k \geqslant 0} z^{\binom{k}{2}} \frac{w^k}{k!} \right)^{m-1} \sum_{k \geqslant 0} \binom{k}{2} z^{\binom{k}{2}-1} \frac{w^k}{k!};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2} G(w, z) &= \sum_{n \geqslant 0} B_n''(z) \frac{m^n w^n}{n!} \\
&= m(m-1) \left(\sum_{k \geqslant 0} z^{\binom{k}{2}} \frac{w^k}{k!} \right)^{m-2} \left(\sum_{k \geqslant 0} \binom{k}{2} z^{\binom{k}{2}-1} \frac{w^k}{k!} \right)^2 \\
&\quad + m \left(\sum_{k \geqslant 0} z^{\binom{k}{2}} \frac{w^k}{k!} \right)^{m-1} \sum_{k \geqslant 0} \binom{k}{2} \left(\binom{k}{2} - 1 \right) z^{\binom{k}{2}-2} \frac{w^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Ничего не скажешь, сложные выражения; они, однако, значительно упростятся, если положить $z = 1$. Так, например,

$$\sum_{n\geqslant 0} B_n'(1)\frac{m^n w^n}{n!} = me^{(m-1)w}\sum_{k\geqslant 2}\frac{w^k}{2(k-2)!}$$
$$= me^{(m-1)w}\sum_{k\geqslant 0}\frac{w^{k+2}}{2k!}$$
$$= \frac{mw^2e^{(m-1)w}}{2}e^w = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(mw)^{n+2}}{2mn!} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)m^n w^n}{2mn!},$$

откуда следует, что

$$B_n'(1) = \binom{n}{2}\frac{1}{m}. \qquad (8.101)$$

Выражение для EA в (8.100) дает теперь $EA = 1 + (n-1)/2m$, в полном согласии с (8.97).

Формула для $B_n''(1)$ включает похожую сумму

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{k}{2}\left(\binom{k}{2}-1\right)\frac{w^k}{k!} = \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+1)k(k-1)(k-2)w^k}{k!}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 3}\frac{(k+1)w^k}{(k-3)!} = \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+4)w^{k+3}}{k!} = \left(\tfrac{1}{4}w^4 + w^3\right)e^w;$$

поэтому находим

$$\sum_{n\geqslant 0} B_n''(1)\frac{m^n w^n}{n!} = m(m-1)e^{w(m-2)}\left(\tfrac{1}{2}w^2e^w\right)^2$$
$$+ me^{w(m-1)}\left(\tfrac{1}{4}w^4 + w^3\right)e^w$$
$$= me^{wm}\left(\tfrac{1}{4}mw^4 + w^3\right);$$

$$B_n''(1) = \binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}-1\right)\frac{1}{m^2}. \qquad (8.102)$$

Теперь можно собрать все вместе и вычислить искомую дисперсию VA. Очень много членов сокращается и результат оказывается удивительно простым:

$$VA = \frac{VB}{n^2} = \frac{B_n''(1) + B_n'(1) - B_n'(1)^2}{n^2}$$
$$= \frac{n(n-1)}{m^2n^2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{4} + \frac{m}{2} - \frac{n(n-1)}{4}\right)$$
$$= \frac{(m-1)(n-1)}{2m^2n}. \qquad (8.103)$$

Встретив такое „совпадение“, мы можем заподозрить наличие какой-то математической причины; должен существовать другой способ решения задачи, объясняющий, почему ответ так прост. И действительно, такой способ имеется (в упр. 61), и он показывает, что в общем случае дисперсия среднего успешного поиска имеет вид

$$VA = \frac{m-1}{m^2} \sum_{k=1}^{n} s_k^2(k-1)\,, \qquad (8.104)$$

где s_k — вероятность поиска элемента, вставленного k-м по счету. Уравнение (8.103) является частным случаем $s_k = 1/n$ для $1 \leqslant k \leqslant n$.

Помимо дисперсии среднего мы можем также рассмотреть среднее дисперсии. Иными словами, каждая последовательность $(h_1, \ldots, h_n)$, задающая хеш-таблицу, определяет также распределение вероятностей для успешного поиска, и дисперсия этого распределения показывает, как сильно будет разбросано число проб в различных успешных поисках. В качестве примера вернемся вновь к ситуации, когда мы помещали $n = 16$ объектов в $m = 10$ списков:

Где же я видел эту последовательность?

$$(h_1, \ldots, h_{16}) = 3\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3$$
$$(P_1, \ldots, P_{16}) = 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2\ 1\ 3\ 3$$

Где же я видел это замечание?

Это я знаю и помню прекрасно, пи многие знаки мне лишни, напрасны.

Успешный поиск в результирующей таблице имеет ПФСВ

$$G(3,1,4,1,\ldots,3) = \sum_{k=1}^{16} s_k z^{P(3,1,4,1,\ldots,3;k)}$$
$$= s_1 z + s_2 z + s_3 z + s_4 z^2 + \cdots + s_{16} z^3\,.$$

Только что мы занимались средним числом проб для успешного поиска в этой таблице, а именно, $A(3,1,4,1,\ldots,3) = \mathrm{Mean}\big(G(3,1,4,1,\ldots,3)\big)$. Но можно также рассмотреть дисперсию,

$$s_1 \cdot 1^2 + s_2 \cdot 1^2 + s_3 \cdot 1^2 + s_4 \cdot 2^2 + \cdots + s_{16} \cdot 3^2$$
$$- (s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot 1 + s_3 \cdot 1 + s_4 \cdot 2 + \cdots + s_{16} \cdot 3)^2\,.$$

Эта дисперсия является случайной величиной, зависящей от $(h_1, \ldots, h_n)$, так что вполне естественно поинтересоваться ее средним значением.

Таким образом, имеются три разумных вида дисперсии, которые могут быть полезны при изучении поведения успешного поиска. Это *общая дисперсия* числа проб, вычисляемая по всем $(h_1, \ldots, h_n)$ и k; *дисперсия среднего* числа проб, где среднее берется по всем k, а затем вычисляется дисперсия по всем $(h_1, \ldots, h_n)$, и *среднее дисперсии* числа проб, где дисперсия

берется по всем k, а затем среднее — по всем наборам $(h_1, \ldots, h_n)$. В символической записи общая дисперсия выражается как

$$VP = \sum_{1\leqslant h_1,\ldots,h_n\leqslant m} \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{m^n} P(h_1, \ldots, h_n; k)^2 - \left(\sum_{1\leqslant h_1,\ldots,h_n\leqslant m} \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{m^n} P(h_1, \ldots, h_n; k) \right)^2;$$

дисперсия среднего — это

$$VA = \sum_{1\leqslant h_1,\ldots,h_n\leqslant m} \frac{1}{m^n} \left(\sum_{k=1}^{n} s_k P(h_1, \ldots, h_n; k) \right)^2 - \left(\sum_{1\leqslant h_1,\ldots,h_n\leqslant m} \frac{1}{m^n} \sum_{k=1}^{n} s_k P(h_1, \ldots, h_n; k) \right)^2,$$

и среднее дисперсии — это

$$AV = \sum_{1\leqslant h_1,\ldots,h_n\leqslant m} \frac{1}{m^n} \left(\sum_{k=1}^{n} s_k P(h_1, \ldots, h_n; k)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k P(h_1, \ldots, h_n; k) \right)^2 \right).$$

Оказывается, что эти три величины связаны между собой простым соотношением:

$$VP = VA + AV. \tag{8.105}$$

В самом деле, условные распределения вероятностей всегда удовлетворяют тождеству

$$VX = V\big(E(X|Y)\big) + E\big(V(X|Y)\big). \tag{8.106}$$

Здесь X и Y — случайные величины на произвольном вероятностном пространстве, причем X принимает вещественные значения. (Это тождество доказывается в упр. 22.) Уравнение (8.105) — это частный случай, в котором X — число проб в успешном поиске, а Y — последовательность хеш-кодов $(h_1, \ldots, h_n)$.

Общее уравнение (8.106) требует внимательного рассмотрения, поскольку в нем скрыты несколько различных случайных величин и вероятностных пространств, в которых надлежит вычислять математические ожидания и дисперсии. Случайная величина $X|y$ для каждого y из диапазона изменения Y была определена в (8.91), и эта случайная величина имеет ожидаемое значение $E(X|y)$, зависящее от y. Далее, $E(X|Y)$ обозначает случайную величину, принимающую значения $E(X|y)$, когда y принимает все возможные для Y значения, а $V\big(E(X|Y)\big)$ есть дисперсия этой случайной величины по отношению к распределению вероятностей Y. Аналогично, $E\big(V(X|Y)\big)$ есть среднее значение случайной величины $V(X|y)$ при изменении y. В левой части (8.106)

(Сейчас самое время выполнить разминочное упражнение 6.)

стоит VX, безусловная дисперсия X. Поскольку дисперсии неотрицательны, мы всегда будем иметь

$$VX \geqslant V\big(E(X|Y)\big) \quad \text{и} \quad VX \geqslant E\big(V(X|Y)\big). \tag{8.107}$$

Вновь случай 1: пересмотр безуспешного поиска

В завершение нашего микроскопического изучения хеширования проведем еще одно вычисление, типичное для анализа алгоритмов. На этот раз мы займемся более подробно *общим временем работы* в случае безуспешного поиска, в предположении, что компьютер вставляет в таблицу дотоле неизвестный ключ.

В процессе вставки (8.83) возможны два случая, в зависимости от того, отрицательно ли j или равно нулю. При этом $j < 0$ тогда и только тогда, когда $P = 0$, поскольку отрицательное значение может появиться только из элемента FIRST для пустого списка. Таким образом, если список был пуст, то $P = 0$, и мы должны выполнить установку $\mathrm{FIRST}[h_{n+1}] := n + 1$. (Новая запись будет помещена в позицию $n+1$.) В противном случае $P > 0$ и значение $n+1$ следует установить в элемент NEXT. Выполнение алгоритма в этих двух случаях может занять различное время; поэтому общее время работы для безуспешного поиска можно записать в виде

P по-прежнему обозначает число проб.

$$T = \alpha + \beta P + \delta[P=0], \tag{8.108}$$

где α, β и δ — некоторые константы, зависящие от компьютера и от того, каким образом алгоритм хеширования закодирован в командах внутреннего языка компьютера. Было бы неплохо найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины T, поскольку эти показатели более важны для практики, чем математическое ожидание и дисперсия величины P.

До сих пор мы использовали вероятностные производящие функции только для случайных величин, принимающих целые неотрицательные значения. Оказывается, однако, что с выражением

$$G_X(z) = \sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega) z^{X(\omega)}$$

для произвольной вещественнозначной случайной величины X можно работать ничуть не хуже, поскольку все существенные характеристики X зависят только от поведения G_X вблизи $z = 1$; а в этой области все степени z корректно определены. Например, время работы безуспешного поиска (8.108) является случайной величиной, определенной на вероятностном пространстве из равновероятных последовательностей хеш-кодов $(h_1, \ldots, h_n, h_{n+1})$ с $1 \leqslant h_j \leqslant m$; мы можем считать, что ряд

$$G_T(z) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{h_1=1}^{m} \cdots \sum_{h_n=1}^{m} \times \sum_{h_{n+1}=1}^{m} z^{\alpha+\beta P(h_1,\ldots,h_n;h_{n+1})+\delta[P(h_1,\ldots,h_n;h_{n+1})=0]}$$

является ПФСВ даже в тех случаях, когда α, β и δ — не целые. (Фактически, параметры α, β, δ — физические величины, имеющие размерность времени; это даже не совсем числа! Тем не менее, их можно использовать в показателе степени при z.) Мы можем по-прежнему вычислять математическое ожидание и дисперсию случайной величины T, найдя $G_T'(1)$ и $G_T''(1)$ и скомбинировав эти значения обычным образом.

Производящей функцией для P (а не T) будет

$$P(z) = \left(\frac{m-1+z}{m}\right)^n = \sum_{p\geqslant 0} \Pr(P=p) z^p .$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} G_T(z) &= \sum_{p\geqslant 0} \Pr(P=p) z^{\alpha+\beta p+\delta[p=0]} \\ &= z^\alpha\Bigl((z^\delta-1)\Pr(P=0) + \sum_{p\geqslant 0}\Pr(P=p) z^{\beta p}\Bigr) \\ &= z^\alpha\left((z^\delta-1)\left(\frac{m-1}{m}\right)^n + \left(\frac{m-1+z^\beta}{m}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Подсчет $\mathrm{Mean}(G_T)$ и $\mathrm{Var}(G_T)$ оказывается теперь рутинной операцией:

$$\mathrm{Mean}(G_T) = G_T'(1) = \alpha + \beta\frac{n}{m} + \delta\left(\frac{m-1}{m}\right)^n; \tag{8.109}$$

$$\begin{aligned} G_T''(1) &= \alpha(\alpha-1) + 2\alpha\beta\frac{n}{m} + \beta(\beta-1)\frac{n}{m} + \beta^2\frac{n(n-1)}{m^2} \\ &\qquad + 2\alpha\delta\left(\frac{m-1}{m}\right)^n + \delta(\delta-1)\left(\frac{m-1}{m}\right)^n; \\ \mathrm{Var}(G_T) &= G_T''(1) + G_T'(1) - G_T'(1)^2 \\ &= \beta^2\frac{n(m-1)}{m^2} - 2\beta\delta\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\frac{n}{m} \\ &\qquad + \delta^2\left(\left(\frac{m-1}{m}\right)^n - \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2n}\right). \end{aligned} \tag{8.110}$$

В гл. 9 мы научимся оценивать подобные величины при больших m и n. Если, например, $m = n$ и $n \to \infty$, то с помощью методов гл. 9 можно показать, что математическое ожидание и дисперсия T равны, соответственно, $\alpha + \beta + \delta e^{-1} + O(n^{-1})$ и $\beta^2 - 2\beta\delta e^{-1} + \delta^2(e^{-1} - e^{-2}) + O(n^{-1})$. Если $m = n/\ln n + O(1)$ и $n \to \infty$, то соответствующие величины составят

$$\begin{aligned} \mathrm{Mean}(G_T) &= \beta\ln n + \alpha + O\bigl((\log n)^2/n\bigr); \\ \mathrm{Var}(G_T) &= \beta^2\ln n + O\bigl((\log n)^2/n\bigr). \end{aligned}$$

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Какова вероятность дублетов при распределении вероятностей $\Pr_{01}$ из (8.3), когда один кубик правильный, а у другого центр масс смещен? Какова вероятность выбросить сумму $S = 7$?

2 Какова вероятность того, что в случайно перетасованной колоде карт и верхняя и нижняя карты окажутся тузами? (Все 52! перестановок имеют вероятность $1/52!$.)

3 Студентов, изучавших конкретную математику в Стэнфорде в 1979 г., попросили подбрасывать монету до тех пор, пока дважды подряд не выпадет решка, и записать потребовавшееся число бросаний. В результате получилось:

Почему только десять чисел?

Остальные студенты или не были эмпириками, или просто забросили все куда подальше.

$$3, 2, 3, 5, 10, 2, 6, 6, 9, 2.$$

Студентов, изучавших конкретную математику в Принстоне в 1987 г., попросили сделать то же, и они получили такие результаты:

$$10, 2, 10, 7, 5, 2, 10, 6, 10, 2.$$

Оцените математическое ожидание и дисперсию, основываясь (a) на Стэнфордских данных; (b) на данных из Принстона.

4 Пусть $H(z) = F(z)/G(z)$, где $F(1) = G(1) = 1$. Докажите, что, по аналогии с (8.38) и (8.39),

$$\begin{aligned} \operatorname{Mean}(H) &= \operatorname{Mean}(F) - \operatorname{Mean}(G), \\ \operatorname{Var}(H) &= \operatorname{Var}(F) - \operatorname{Var}(G), \end{aligned}$$

если указанные производные существуют при $z = 1$.

5 Пусть Алиса и Билл играют в игру (8.78), используя кривую монету, которая выпадает решкой вверх с вероятностью p. Существует ли значение p, для которого игра станет справедливой?

6 К чему сведется закон дисперсии для условных распределений (8.106), если случайные величины X и Y будут независимы.

Обязательные упражнения

7 Покажите, что если у обоих кубиков смещен центр масс, причем распределение вероятностей у них одинаковое, то вероятность дубля всегда будет не меньше $\frac{1}{6}$.

8 Пусть A и B — события, такие, что $A \cup B = \Omega$. Докажите, что

$$\Pr(\omega \in A \cap B) = \Pr(\omega \in A)\Pr(\omega \in B) - \Pr(\omega \notin A)\Pr(\omega \notin B).$$

9 Докажите или опровергните: если X и Y — независимые случайные величины, то таковыми являются также $F(X)$ и $G(Y)$, где F и G — любые функции.

Под „элементами“ здесь следует понимать значения, которые может принимать случайная величина. — Перев.

10 Сколько элементов, самое большее, могут являться медианами случайной величины X в соответствии с определением (8.7)?

11 Постройте случайную величину, имеющую конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию.

12 **a** Пусть $P(z)$ — ПФСВ случайной величины X. Докажите, что

$$\begin{aligned} \Pr(X \leqslant r) &\leqslant x^{-r}P(x) \qquad \text{для } 0 < x \leqslant 1; \\ \Pr(X \geqslant r) &\leqslant x^{-r}P(x) \qquad \text{для } x \geqslant 1. \end{aligned}$$

(Эти важные соотношения называются *оценками хвоста.*)

b В частном случае $P(z) = (1+z)^n/2^n$ используйте первую оценку хвоста для доказательства того, что $\sum_{k\leqslant\alpha n}\binom{n}{k} \leqslant 1/\alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}$ для $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

13 Докажите, что если $X_1, \ldots, X_{2n}$ — независимые случайные величины с одинаковым распределением, а α — произвольное вещественное число, то

$$\Pr\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_{2n}}{2n} - \alpha\right| \leqslant \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \alpha\right|\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

14 Пусть $F(z)$ и $G(z)$ — производящие функции случайных величин и пусть

$$H(z) = p\,F(z) + q\,G(z)\,,$$

где $p + q = 1$. (Такая функция называется *смесью* F и G; соответствующая ей случайная величина получается, если подбросить монету и затем выбрать распределение F или G в зависимости от того, какой стороной вверх упадет монета.) Выразите математическое ожидание и дисперсию H через p, q и математическое ожидание и дисперсию F и G.

15 Если $F(z)$ и $G(z)$ — производящие функции случайных величин, то можно определить новую ПФСВ $H(z)$ при помощи их „композиции“:

$$H(z) = F\big(G(z)\big)\,.$$

Выразите $\mathrm{Mean}(H)$ и $\mathrm{Var}(H)$ через $\mathrm{Mean}(F)$, $\mathrm{Var}(F)$, $\mathrm{Mean}(G)$ и $\mathrm{Var}(G)$. (Уравнение (8.93) будет тогда частным случаем.)

16 Найдите замкнутую форму для суперпроизводящей функции $\sum_{n\geqslant 0} F_n(z)w^n$, где $F_n(z)$ — футбольная производящая функция, определенная в (8.53).

17 Пусть $X_{n,p}$ и $Y_{n,p}$ имеют, соответственно, биномиальное и отрицательное биномиальное распределения с параметрами (n,p). (Эти распределения определены в (8.57) и (8.60).) Докажите, что $\Pr(Y_{n,p} \leqslant m) = \Pr(X_{m+n,p} \geqslant n)$. Какое тождество для биномиальных коэффициентов отсюда вытекает?

18 Говорят, что случайная величина X имеет *распределение Пуассона* с параметром μ, если $\Pr(X=k) = e^{-\mu}\mu^k/k!$ для всех $k \geqslant 0$.

a Какова производящая функция такой случайной величины?

b Чему равны ее математическое ожидание, дисперсия и остальные кумулянты?

19 Продолжая предыдущее упражнение, допустим, что случайная величина X_1 имеет распределение Пуассона с параметром μ_1, а случайная величина X_2 независима от X_1 и имеет распределение Пуассона с параметром μ_2.

a Какова вероятность того, что $X_1 + X_2 = n$?

b Чему равны среднее, дисперсия и другие кумулянты случайной величины $2X_1 + 3X_2$?

20 Докажите (8.74) и (8.75) — общие формулы для математического ожидания и дисперсии времени до появления заданной последовательности решек и орлов.

21 Что выражает значение N, если в (8.77) положить оба символа Р и О равными $\frac{1}{2}$?

22 Докажите (8.106) — закон условного математического ожидания и дисперсии.

Домашние задания

23 Пусть $\Pr_{00}$ — распределение вероятностей двух правильных кубиков, а $\Pr_{11}$ — распределение вероятностей двух неуравновешенных кубиков, определенное в (8.2). Найдите все такие события A, что $\Pr_{00}(A) = \Pr_{11}(A)$. Какие из этих событий зависят только от случайной величины S? (Вероятностное пространство с $\Omega = D^2$ включает 2^{36} событий; лишь 2^{11} из них зависят только от S.)

24 Игрок J бросает $2n+1$ правильных кубиков и убирает кубики, на которых выпало ⚅. Затем игрок K называет число от 1 до 6, бросает оставшиеся кубики и убирает те, на которых выпало названное число очков. Этот процесс повторяется до тех пор, пока в игре не останется ни одного кубика. Выигрывает игрок, убравший в совокупности большее число кубиков (т. е. $n+1$ или больше).

a Чему равно математическое ожидание и дисперсия общего числа кубиков, убранных игроком J? *Указание:* кубики независимы.

b С какой вероятностью выигрывает J в случае $n = 2$?

25 Рассмотрим следующую азартную игру. Вы ставите определенную сумму A и бросаете правильный кубик. Если выпало k очков, то ваша ставка умножается на $2(k-1)/5$. (В частности, ставка удваивается, если выпадет ⚅, но вы проигрываете

все, если выпадет [⚀].) В любой момент вы можете остановиться и потребовать текущую сумму ставки. Чему равно среднее значение и дисперсия суммы ставки после n бросаний? (Пренебрегите эффектами округления суммы до целого числа.)

26 Найдите математическое ожидание и дисперсию числа циклов длины l в случайной перестановке n элементов. (Задача о победе футбольной команды, ответ на которую дан в (8.23), (8.24) и (8.53), есть частный случай $l = 1$.)

27 Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые значения случайной величины X. Уравнения (8.19) и (8.20) говорят, как оценить математическое ожидание и дисперсию X по результатам этих наблюдений. Дайте аналогичную формулу для оценки третьего кумулянта κ_3. (Ваша формула должна давать „несмещенную" оценку в том смысле, что ожидаемое значение оценки должно равняться κ_3.)

28 Какова средняя продолжительность игры в монету (8.78),
a при условии, что выигрывает Алиса?
b при условии, что выигрывает Билл?

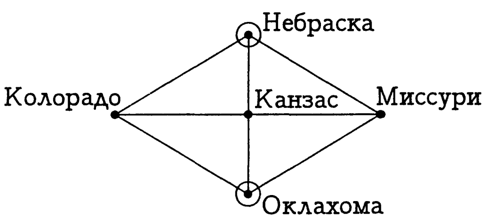
29 Алиса, Билл и Компьютер бросают правильную монету до тех пор, пока не появится одна из следующих последовательностей: A = РРОР, B = РОРР, C = ОРРР. (Если в игре участвуют только две из этих последовательностей, то, как мы знаем из (8.82), A, вероятно, выиграет у B, B, вероятно, выиграет у C и C, вероятно, выиграет у A; но в данной игре участвуют сразу все три последовательности.) Каковы шансы каждого игрока на выигрыш?

30 Мы рассматривали три вида дисперсии, связанные с успешным поиском в хеш-таблице. В действительности есть еще два вида: мы можем рассмотреть среднее (по k) дисперсий (по h_1, $\ldots$, h_n) числа проб $P(h_1, \ldots, h_n; k)$, а также дисперсию (по k) средних (по h_1, $\ldots$, h_n). Вычислите эти величины.

Шредингеровский червяк.

31 В вершине A пятиугольника ABCDE находится яблоко, а на расстоянии двух ребер, в вершине C, находится червяк. Каждый день червяк переползает в одну из двух соседних вершин с равной вероятностью. Так, через один день червяк окажется в вершине B с вероятностью $\frac{1}{2}$ и в вершине D с вероятностью $\frac{1}{2}$. По прошествии двух дней червяк может вновь оказаться в C, поскольку он не запоминает предыдущих положений. Достигнув вершины A, червяк останавливается пообедать.
a Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа дней, прошедших до обеда?
b Какую оценку дает неравенство Чебышёва для вероятности p того, что это число дней будет 100 или больше?
c Что позволяет сказать о величине p оценка хвоста (упр. 12)?

32 Алиса и Билл находятся в войсковых частях, дислоцированных в одном из пяти штатов: Канзас, Небраска, Миссури, Оклахома и Колорадо. Первоначально Алиса находится в Небраске, а Билл — в Оклахоме. Каждый месяц каждого из них переводят в соседний штат, причем любой из соседних штатов выбирается с равной вероятностью. (Ниже нарисована диаграмма соседства:



Начальные штаты обведены кружком.) Например, Алиса через один месяц будет переведена с вероятностью $1/3$ в любой из штатов Колорадо, Канзас или Миссури. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа месяцев, которое потребуется Алисе и Биллу, чтобы встретить друг друга. (Возможно, вы захотите прибегнуть к помощи компьютера.)

Нештатная штатная ситуация.

33 Независимы ли случайные величины X_1 и X_2 из (8.89)?

34 Джина играет в гольф и на каждом ударе с вероятностью $p = .05$ имеет „супер-шот" и выигрывает один удар, с вероятностью $q = .91$ имеет обычный „шот" и с вероятностью $r = .04$ имеем „саб-шот", который стоит ей одного удара в сравнении с расчетным числом ударов. (Для не играющих в гольф: На каждом круге она делает 2, 1 или 0 шагов к цели с вероятностями, соответственно, p, q и r. В игре с m-ударной лункой ее результат есть минимальное n, такое, что она продвигается на m или больше шагов за n кругов. Маленький результат лучше большого.)

(Для проведения расчетов в этой задаче используйте калькулятор.)

a Покажите, что Джина выигрывает игру с четырехударной лункой чаще, чем проигрывает, когда она встречается с игроком, делающим всегда обычные удары. (Иными словами вероятность получения результата меньше четырех должна быть больше, чем вероятность результата больше четырех.)

b Покажите, что ее средний результат в игре с четырехударной лункой больше четырех. (Таким образом, она в среднем проигрывает „стабильному" игроку по общей сумме очков, хотя она в среднем выигрывает в матче с зачетом по лункам.)

Контрольные работы

35 Центр масс кубика смещен в соответствии с распределением вероятностей

$$\Pr(⚀) = p_1\,; \qquad \Pr(⚁) = p_2\,; \qquad \ldots\,; \qquad \Pr(⚅) = p_6\,.$$

Пусть S_n означает сумму очков после n-кратного бросания этого кубика. Найдите необходимые и достаточные условия на распределение вероятностей, чтобы две случайные величины $S_n \bmod 2$ и $S_n \bmod 3$ были независимы друг от друга при всех n.

36 На шести гранях некоторого кубика вместо обычных ⚀, …, ⚅ высечены следующие метки:

⚀ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ (8).

a Покажите, что можно так расставить очки на шести гранях второго кубика, чтобы сумма очков при бросании этих двух кубиков имела бы то же самое распределение вероятностей, что и при бросании пары обычных кубиков. (Считайте, что все 36 комбинаций граней равновероятны.)

b Обобщая предыдущий пункт, найдите все способы расстановки очков на $6n$ гранях n кубиков, такие, что распределение суммы очков будет совпадать с распределением суммы очков у n обычных кубиков. (На каждой грани должно быть целое положительное число очков.)

37 Пусть p_n обозначает вероятность того, что правильную монету придется бросить ровно n раз, прежде чем два раза подряд встретится решка, и пусть $q_n = \sum_{k\geqslant n} p_k$. Найдите замкнутое выражение для p_n и q_n через числа Фибоначчи.

38 Чему равна производящая функция случайной величины для числа бросаний правильного кубика, требуемых для выпадания всех шести граней? Рассмотрите общий случай правильного „кубика" с m гранями и дайте замкнутое выражение для числа бросаний, требуемых для появления l из m граней. Чему равна вероятность, что потребуется ровно n бросаний?

39 *Производящая функция Дирихле случайной величины* имеет вид

$$P(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{p_n}{n^z}\,.$$

Таким образом, $P(0) = 1$. Пусть X — случайная величина с $\Pr(X{=}n) = p_n$. Выразите $E(X)$, $V(X)$ и $E(\ln X)$ через $P(z)$ и ее производные.

40 Для биномиального распределения (8.57) m-й кумулянт κ_m имеет вид $nf_m(p)$, где f_m — многочлен степени m. (Например, $f_1(p) = p$ и $f_2(p) = p-p^2$, поскольку математическое ожидание и дисперсия равны np и npq.)

a Найдите замкнутое выражение для коэффициента при p^k в $f_m(p)$.

b Докажите, что $f_m(\frac{1}{2}) = (2^m-1)B_m/m + [m{=}1]$, где B_m — m-е число Бернулли.

41 Пусть случайная величина X_n равняется числу бросаний правильной монеты до появления в совокупности n решек. Покажите, что $E(X_{n+1}^{-1}) = (-1)^n(\ln 2 + H_{\lfloor n/2 \rfloor} - H_n)$. Используя методы гл. 9, оцените это значение с абсолютной погрешностью $O(n^{-3})$.

42 Один человек испытывает трудности с устройством на работу. Если он является безработным утром любого дня, то с некоторой постоянной вероятностью p_h (не зависящей от прошедших событий) он нанимается на работу в течение дня; но если он имеет работу в начале дня, то с постоянной вероятностью p_f его уволят к вечеру. Найдите среднее число вечеров, когда его ожидает работа на следующий день в предположении, что первоначально он принят на работу и что этот процесс продолжается n дней. (Если, например, $n = 1$, то ответ равен $1 - p_f$.)

43 Найдите замкнутое выражение для ПФСВ $G_n(z) = \sum_{k \geqslant 0} p_{k,n} z^k$, где $p_{k,n}$ есть вероятность того, что случайная перестановка n объектов имеет ровно k циклов. Чему равны математическое ожидание и стандартное отклонение числа циклов?

44 Атлетический клуб проводит среди своих членов турнир по теннису с выбыванием. В турнире участвуют 2^n игроков. В первом круге игроки случайным образом разбиваются на пары, так что любое разбиение равновероятно, и играется 2^{n-1} матчей. Победители переходят на следующий круг, где с помощью такого же процесса выявляется 2^{n-2} победителей. И так далее; в k-м круге играется 2^{n-k} случайно выбираемых матчей между 2^{n-k+1} до сих пор не побежденными участниками. В n-м круге определяется чемпион. Хотя устроителям турнира об этом неизвестно, все игроки в действительности упорядочены по силе игры, так что x_1 играет лучше всех, x_2 — лучше всех, кроме x_1, ..., x_{2^n} играет хуже всех. Когда игрок x_j играет с x_k и $j < k$, то с вероятностью p побеждает x_j и с вероятностью $1 - p$ побеждает x_k, причем результат их игры не зависит от исходов других встреч. Мы считаем, что для всех j и k имеется одна и та же вероятность p.

Странные попались игроки.

a С какой вероятностью игрок x_1 выиграет турнир?

b С какой вероятностью в n-м круге (финальной встрече) будут участвовать два лучших игрока, x_1 и x_2?

c С какой вероятностью в k-м от конца круге ($2^{-(k-1)}$-финале) будут соревноваться 2^k лучших игроков? (Предыдущие вопросы — это частные случаи $k = 0$ и $k = 1$.)

d Пусть $N(n)$ обозначает число существенно различных результатов турнира; два турнира считаются по-существу совпадающими, если в них все матчи играются между теми же игроками и победители одни и те же. Докажите, что $N(n) = 2^n!$.

e С какой вероятностью x_2 выиграет турнир?

f Докажите, что если $\frac{1}{2} < p < 1$, то вероятность выигрыша

турнира игроком x_j строго больше, чем игроком x_{j+1} при $1 \leqslant j < 2^n$.

45 Настоящее шерри производят в Испании в строгом соответствии с многостадийной системой, называемое „Солера". Для простоты мы будем считать, что у винодела имеется всего три бочки, A, B и C. Каждый год третья часть вина из бочки C разливается в бутылки и замещается вином из B; затем бочку B дополняют, переливая в нее третью часть вина из A; наконец, бочку A доливают доверху новым вином. Пусть $A(z)$, $B(z)$ и $C(z)$ — ПФСВ, в которых коэффициентом при z^n служит доля вина выдержки n лет в соответствующей бочке сразу же после переливаний.

„Простые арифметические прикидки показывают, что шерри всегда имеет возраст, по крайней мере, три года. Если же продолжить расчеты, то может закружиться голова."
— Обозрение французских вин (Ноябрь 1984)

a Пусть описанные операции выполняются с незапамятных времен, так что мы достигли установившегося состояния, в котором $A(z)$, $B(z)$ и $C(z)$ одни и те же в начале каждого года. Найдите замкнутое выражение для этих производящих функций.

b При тех же условиях найдите математическое ожидание и стандартное отклонение возраста вина в каждой бочке. Каков средний возраст вина, разливаемого в бутылки? Какая доля вина имеет возраст ровно 25 лет?

c Теперь примите во внимание конечность времени. Пусть во все три бочки в начале нулевого года залили новое вино. Каким будет средний возраст вина, разливаемого в начале года n?

46 Стефан Банах имел обыкновение носить с собой две коробки спичек; в каждой из коробок первоначально находилось по n спичек. Когда ему был нужен огонь, он выбирал одну из коробок случайным образом, с вероятностью $\frac{1}{2}$, независимо от предыдущего выбора. Взяв спичку, он клал коробку обратно в карман (даже если в ней не оставалось ни одной спички — так поступают все великие математики). Если выбранная коробка оказывалась пустой, Банах выбрасывал ее и доставал другую.

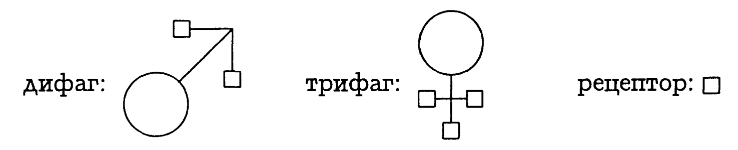
a Однажды он обнаружил, что и вторая коробка пуста. Какова вероятность такого события? (При $n = 1$ это происходит в половине случаев, а при $n = 2$ — с вероятностью 3/8.) Для ответа на этот вопрос найдите замкнутое выражение для производящей функции $P(w, z) = \sum_{m,n} p_{m,n} w^m z^n$, где $p_{m,n}$ есть вероятность, начав с m спичек в одной коробке и n — в другой, получить обе пустые коробки, когда впервые выбирается пустая коробка. Затем найдите замкнутое выражение для $p_{n,n}$.

b Обобщая ваш ответ в п. (a), найдите замкнутое выражение для вероятности того, что в момент выбрасывания первой пустой коробки в другой будет ровно k спичек.

А также для числа спичек в пустой коробке.

c Найдите замкнутое выражение для среднего числа спичек в этой другой коробке.

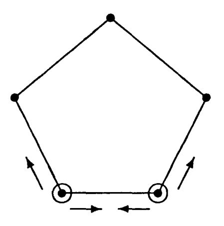
47 Несколько физиологов в сотрудничестве с несколькими физиками открыли недавно две разновидности микробов, для которых характерен очень странный способ размножения. Мужской микроб, называемый *дифагом*, имеет на своей поверхности два рецептора; женский микроб, *трифаг*, имеет три рецептора:



Когда культуру дифагов и трифагов облучают пси-частицами, то каждая частица поглощается ровно в одном рецепторе одного из фагов; при этом все рецепторы равновероятны. Если частица попадает в рецептор дифага, то этот дифаг превращается в трифаг; если же частица попадает в рецептор трифага, то трифаг делится на два дифага. Так, если в начале эксперимента имеется один дифаг, то первая пси-частица вызовет его превращение в трифаг, вторая частица разделит трифаг на два дифага и третья частица превратит одного из дифагов в трифаг. Четвертая частица попадет либо в дифаг, либо в трифаг; в результате получается либо два трифага (с вероятностью $\frac{2}{5}$), либо три дифага (с вероятностью $\frac{3}{5}$). Найдите замкнутое выражение для среднего числа дифагов, если мы начали с одного дифага и облучили культуру n раз одиночными пси-частицами.

48 Пять человек стоят в вершинах пятиугольника и бросают друг другу диски Фрисби (разновидность летающей тарелки).

Или, возможно, они перебрасываются ракетами, если этот пятиугольник на самом деле Пентагон.



У них имеется два диска, первоначально расположенные в соседних вершинах, как показано на рисунке. В очередной отрезок времени каждый диск бросают либо влево, либо вправо с одинаковой вероятностью. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в одного человека не бросят сразу два диска одновременно, и в этом случае игра кончается. (Все броски не зависят от предыдущих.)

a Найдите математическое ожидание и дисперсию числа пар бросков.

b Найдите замкнутое выражение через числа Фибоначчи для вероятности того, что игра продлится более 100 шагов.

49 Люк Снегоход проводит зимний отпуск в своей горной хижине. На передней веранде хижины стоит m пар ботинок, а на задней веранде — n пар. Каждый раз, собираясь на прогулку, Снегоход бросает (правильную) монету и решает, с какой веранды он отправится — с передней или задней. На выбранной веранде он надевает ботинки и выходит из дому. Возвращается он к любой веранде с вероятностью $1/2$ независимо от того, откуда он вышел, и оставляет ботинки на этой веранде. Так, после первой прогулки на передней веранде будет $m + [-1, 0, \text{или} +1]$ пар ботинок, а на задней — $n - [-1, 0, \text{или} +1]$. Если все ботинки соберутся на одной веранде, а Люк решит выйти на прогулку из другой, то он идет без ботинок, обмораживает ноги и на этом его отпуск кончается. Считая, что он продолжает свои прогулки до такого печального конца, обозначим через $P_N(m, n)$ вероятность завершения ровно N прогулок без обморожений, если сначала на передней веранде было m пар, а на задней — n. Тогда, если оба числа m и n положительные, имеем

$$P_N(m,n) = \tfrac{1}{4}P_{N-1}(m-1,n+1) + \tfrac{1}{2}P_{N-1}(m,n) + \tfrac{1}{4}P_{N-1}(m+1,n-1)\,,$$

поскольку первая прогулка является передне-задней, передне-передней, задне-задней или задне-передней с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждом случае, и еще остается $N-1$ прогулок.

a Дополните рекуррентное соотношение для $P_N(m,n)$, выписав формулы для случаев $m = 0$ или $n = 0$. Используя это соотношение, найдите уравнение, связывающее ПФСВ

$$g_{m,n}(z) = \sum_{N\geqslant 0} P_N(m,n)z^N\,.$$

b Продифференцируйте ваши уравнения и положите в них $z = 1$, получая тем самым соотношения относительно величин $g'_{m,n}(1)$. Решите полученные уравнения и найдите среднее число прогулок до обморожения.

c Покажите, что для $g_{m,n}$ имеет место следующее замкнутое выражение, если выполнить замену $z = 1/\cos^2\theta$:

$$g_{m,n}\Bigl(\frac{1}{\cos^2\theta}\Bigr) = \frac{\sin(2m+1)\theta + \sin(2n+1)\theta}{\sin(2m+2n+2)\theta}\cos\theta\,.$$

50 Рассмотрим функцию

$$H(z) = 1 + \frac{1-z}{2z}\bigl(z - 3 + \sqrt{(1-z)(9-z)}\,\bigr)\,.$$

Цель этого упражнения — доказать, что $H(z) = \sum_{k\geqslant 0} h_k z^k$ является производящей функцией случайной величины, и выяснить основные ее свойства.

a Положим $(1-z)^{3/2}(9-z)^{1/2} = \sum_{k \geqslant 0} c_k z^k$. Докажите, что $c_0 = 3$, $c_1 = -14/3$, $c_2 = 37/27$ и $c_{3+l} = 3\sum_k \binom{l}{k}\binom{1/2}{3+k}\left(\frac{8}{9}\right)^{k+3}$ при любом $l \geqslant 0$. *Указание:* воспользуйтесь тождеством

$$(9-z)^{1/2} = 3(1-z)^{1/2}\bigl(1+\tfrac{8}{9}z/(1-z)\bigr)^{1/2}$$

и разложите последний множитель по степеням $z/(1-z)$.

b Используя п. (a) и упр. 5.81, покажите, что все коэффициенты функции $H(z)$ положительны.

c Докажите следующее любопытное тождество:

$$\sqrt{\frac{9-H(z)}{1-H(z)}} = \sqrt{\frac{9-z}{1-z}} + 2\,.$$

d Чему равны математическое ожидание и дисперсия H?

51 В государственной лотерее в Эльдорадо используется распределение выигрышей H, описанное в предыдущей задаче. Каждый лотерейный билет стоит один дублон, а выплата по этому билету составляет k дублонов с вероятностью h_k. Ваши шансы на выигрыш по каждому билету абсолютно не зависят от выигрыша по другим билетам; иными словами, выигрыш или проигрыш по одному билету не оказывает влияния на вероятность выигрыша по любому другому билету, который вы, возможно, приобрели для участия в том же тираже.

a Допустим, вы начинаете играть в эту игру, имея один дублон. Если вы выигрываете k дублонов, то во второй раз вы покупаете k билетов; затем вы берете весь выигрыш во второй игре и целиком вкладываете его в третий тираж и т. д. Если ни один из ваших билетов не выигрывает, то вы разоряетесь и вынуждены прекратить игру. Докажите, что ПФСВ вашей суммы денег после n кругов такой игры дается выражением

$$1 - \frac{4}{\sqrt{(9-z)/(1-z)}+2n-1} + \frac{4}{\sqrt{(9-z)/(1-z)}+2n+1}\,.$$

b Пусть g_n — вероятность того, что вы впервые проигрываете все деньги на n-й игре, $G(z) = g_1 z + g_2 z^2 + \cdots$. Докажите, что $G(1) = 1$. (Это означает, что, рано или поздно, вы все равно проиграете с вероятностью 1, хотя до того вы можете получить от игры немало удовольствия.) Чему равны математическое ожидание и дисперсия G?

c Сколько в среднем билетов вы купите, если продолжите играть до полного разорения?

d Чему равно среднее число игр до разорения, если в начале у вас не один дублон, а два?

Дублондубль.

Конкурсные задачи

52 Покажите, что определенные в тексте медиана и мода случайных величин соответствуют в некотором разумном смысле медиане и моде последовательностей, если вероятностное пространство конечно.

53 Докажите или опровергните: если X, Y и Z — случайные величины, обладающие тем свойством, что все три пары (X, Y), (X, Z) и (Y, Z) независимы, то $X + Y$ и Z независимы.

54 Уравнение (8.20) показывает, что среднее значение $\widehat{V}X$ равняется VX. Чему равняется *дисперсия* $\widehat{V}X$?

55 В обычной колоде игральных карт 52 карты, по четыре карты каждого из возможных значений $\{Т, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К\}$. Обозначим через X и Y значения, соответственно, верхней и нижней карты в колоде и рассмотрим следующий алгоритм тасования:

S1 Перемешать колоду случайно, так чтобы любая перестановка появлялась с вероятностью $1/52!$.

S2 Если $X \neq Y$, подбросить несимметричную монету с вероятностью p выпадания решки и, если выпадет решка, вернуться к шагу S1. В противном случае остановиться.

Все бросания монеты и все перемешивания колоды предполагаются независимыми. При каком значении p после остановки описанной процедуры значения X и Y будут независимыми случайными величинами?

56 Обобщите задачу о дисках Фрисби из упр. 48 на случай m-угольника вместо пятиугольника. Чему равняется в общем случае математическое ожидание и дисперсия числа бросаний без коллизий, если первоначально диски находятся в соседних вершинах? Докажите, что если m нечетно, то ПФСВ для числа бросаний можно записать в виде произведения распределений для бросания монеты:

$$G_m(z) = \prod_{k=1}^{(m-1)/2} \frac{p_k z}{1 - q_k z},$$

$$\text{где} \quad p_k = \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2m}, \qquad q_k = \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2m}.$$

Указание: попробуйте выполнить подстановку $z = 1/\cos^2 \theta$.

57 Докажите, что в игре Пенни последовательность $\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{l-1}\tau_l$ всегда уступает последовательности $\overline{\tau}_2\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{l-1}$, если $l \geqslant 3$ и монета правильная.

58 Существует ли последовательность $A = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{l-1}\tau_l$ из $l \geqslant 3$ решек и орлов, такая, что обе последовательности $Р\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{l-1}$ и $О\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{l-1}$ дают одинаковые результаты при сравнении с A в игре Пенни?

59 Существуют ли последовательности A и B из решек и орлов, такие, что A длиннее B, однако A более чем в половине случаев встречается раньше B, если подбрасывать правильную монету?

60 Пусть k и n — фиксированные положительные целые и $k < n$.
a Найдите замкнутое выражение для ПФСВ

$$G(w,z) = \frac{1}{m^n} \sum_{h_1=1}^{m} \cdots \sum_{h_n=1}^{m} w^{P(h_1,\ldots,h_n;k)} z^{P(h_1,\ldots,h_n;n)},$$

выражающей совместное распределение числа проб, требуемых для поиска k-го и n-го элементов, вставленных в хеш-таблицу с m списками.

b Хотя случайные величины $P(h_1,\ldots,h_n;k)$ и $P(h_1,\ldots,h_n;n)$ зависимы, покажите, что они в каком-то смысле независимы:

$$\begin{aligned} &E\big(P(h_1,\ldots,h_n;k)P(h_1,\ldots,h_n;n)\big) \\ &\quad = \big(EP(h_1,\ldots,h_n;k)\big)\big(EP(h_1,\ldots,h_n;n)\big). \end{aligned}$$

61 Используя результат предыдущего упражнения, докажите (8.104).

62 Продолжая упр. 47, найдите *дисперсию* числа дифагов после облучения n частицами.

Исследовательская проблема

63 *Нормальное распределение* — это недискретное распределение вероятностей, характеризуемое тем свойством, что все его кумулянты равны нулю, за исключением математического ожидания и дисперсии. Имеется ли простой способ, позволяющий по заданной последовательности кумулянтов $\langle \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots \rangle$ узнать, не происходит ли эта последовательность из *дискретного* распределения? (Все вероятности в дискретном распределении должны быть „атомарными".)

9

Асимптотика

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, если их удается получить,— это замечательно: окончательный ответ вызывает чувство глубокого удовлетворения. Но и приближенное значение иногда оказывается в цене. Если нас интересует какая-либо сумма или рекуррентная последовательность, не представимая (насколько мы можем судить) в замкнутом виде, то мы бы предпочли все же получить какую-нибудь информацию о ее поведении; принцип — все или ничего — в данном случае совсем неуместен. Даже если мы располагаем ответом в замкнутом виде, наши знания все же могут быть неполными, поскольку не всегда ясно, как сравнить наш ответ с другими формулами.

Так, вероятно, не существует замкнутого выражения для суммы

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}.$$

Приятно, однако, узнать, что

$$S_n \sim 2\binom{3n}{n} \qquad \text{при } n \to \infty;$$

мы говорим, что сумма имеет „асимптотику“ $2\binom{3n}{n}$. Еще приятнее получить более детальную информацию, наподобие формулы

$$S_n = \binom{3n}{n}\left(2 - \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \tag{9.1}$$

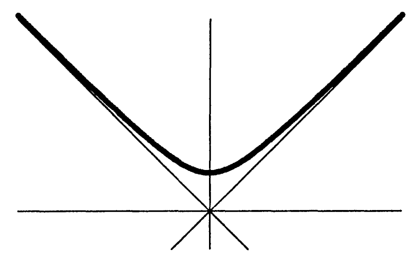
дающей „относительную ошибку порядка $1/n^2$“. Но даже этого недостаточно, чтобы сказать, как велико S_n в сравнении с другими величинами. Что больше, S_n или число Фибоначчи F_{4n}? Ответ: имеем $S_2 = 22 > F_8 = 21$ при $n = 2$; но в конце концов F_{4n} становится больше, поскольку $F_{4n} \sim \phi^{4n}/\sqrt{5}$ и $\phi^4 \approx 6.8541$, тогда как

$$S_n = \sqrt{\frac{3}{\pi n}}(6.75)^n\left(1 - \frac{151}{72n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \tag{9.2}$$

Наша цель в этой главе — научиться понимать и получать подобные результаты без чрезмерных усилий.

Слово *асимптотика* имеет греческое происхождение и буквально означает „никогда не соединяющиеся". Изучая конические сечения, древнегреческие математики рассматривали, в частности, гиперболы, такие, как график функции $y = \sqrt{1 + x^2}$,

Того же происхождения еще несколько слов, например, 'симптом' и 'птомаин'.



имеющий прямые $y = x$ и $y = -x$ своими „асимптотами". При $x \to \infty$ кривая приближается к асимптотам, но никогда не соприкасается с ними. В наши дни слово „асимптотика" используется в более широком смысле для обозначения любой приближенной величины, которая становится все более точной по мере приближения некоторого параметра к предельному значению. Для нас „асимптотика" означает „почти соединяющиеся".

Вывод некоторых асимптотических формул очень сложен и не укладывается в рамки этой книги. Мы удовлетворимся введением в предмет, полагая, что на этом базисе можно будет построить более сложные методы. В особенности нас будут интересовать определения символов '$\sim$', 'O' и им подобных; мы также изучим основные способы преобразования асимптотических соотношений.

9.1 ИЕРАРХИЯ

Встречающиеся на практике функции от n имеют различную „асимптотическую скорость роста"; некоторые функции стремятся к бесконечности быстрее других. Мы формализуем это понятие с помощью определения

$$f(n) \prec g(n) \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\,. \qquad (9.3)$$

Введенное отношение транзитивно: если $f(n) \prec g(n)$ и $g(n) \prec h(n)$, то $f(n) \prec h(n)$. Можно также писать $g(n) \succ f(n)$, если $f(n) \prec g(n)$. Эти обозначения ввел в 1871 г. Поль Дюбуа-Раймон [113].

Все функции, большие и маленькие.

Например, $n \prec n^2$; неформально мы говорим, что n растет медленнее, чем n^2. В действительности

$$n^\alpha \prec n^\beta \iff \alpha < \beta \qquad (9.4)$$

для произвольных вещественных α и β.

Разумеется, существует много функций, помимо степеней n. Отношение $\prec$ можно использовать, чтобы расставить множество

функций по порядку; одна функция будет „клевать“ другую в соответствии со своим асимптотическим ростом. В этой цепочке встретятся, например, такие члены:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\epsilon} \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}.$$

(Здесь ϵ и c — произвольные константы, удовлетворяющие условию $0 < \epsilon < 1 < c$.)

Все перечисленные выше функции, за исключением 1, стремятся к бесконечности при n, стремящемся к бесконечности. Таким образом, пытаясь вставить в эту иерархию новую функцию, мы не будем стараться определить, стремится *ли* она к бесконечности; вместо этого нас будет интересовать, *как быстро* она стремится.

Занимаясь асимптотическим анализом, не следует мелочиться: представляя себе переменную, которая стремится к бесконечности, надо ДУМАТЬ О ГЛАВНОМ. Так, например, из приведенной выше иерархии получаем $\log n \prec n^{0.0001}$; это может показаться неверным, если мы ограничимся совсем малюсенькими числами вроде одного гугола, $n = 10^{100}$. Действительно, в этом случае $\log n = 100$, тогда как $n^{0.0001}$ есть всего лишь $10^{0.01} \approx 1.0233$. Но если подняться до числа гуголплекс, $n = 10^{10^{100}}$, то $\log n = 10^{100}$ бледнеет в сравнении с $n^{0.0001} = 10^{10^{96}}$.

Даже если ϵ чрезвычайно мало (меньше, скажем, $1/10^{10^{100}}$), величина $\log n$ будет значительно меньше, чем n^{ϵ}, если только n достаточно велико. Действительно, если положить $n = 10^{10^{2k}}$, где k выбрано так, чтобы $\epsilon \geqslant 10^{-k}$, то будем иметь $\log n = 10^{2k}$, но $n^{\epsilon} \geqslant 10^{10^{k}}$. Таким образом, отношение $(\log n)/n^{\epsilon}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Логиерархию?

Рассмотренная выше иерархия касается функций, стремящихся к бесконечности. Нередко, однако, нас интересуют функции, стремящиеся к нулю, так что было бы неплохо иметь аналогичную иерархию и для таких функций. Мы построим ее, перейдя к обратным величинам, ибо если $f(n)$ и $g(n)$ никогда не обращаются в нуль, то

$$f(n) \prec g(n) \iff \frac{1}{g(n)} \prec \frac{1}{f(n)}. \tag{9.5}$$

Так, все следующие функции (за исключением 1) стремятся к нулю:

$$\frac{1}{c^{c^{n}}} \prec \frac{1}{n^{n}} \prec \frac{1}{c^{n}} \prec \frac{1}{n^{\log n}} \prec \frac{1}{n^{c}} \prec \frac{1}{n^{\epsilon}} \prec \frac{1}{\log n} \prec \frac{1}{\log\log n} \prec 1.$$

Рассмотрим еще несколько функций и попробуем вставить их в иерархию. Число $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих n, как известно, равно приблизительно $n/\ln n$. Поскольку $1/n^{\epsilon} \prec 1/\ln n \prec 1$, умножение на n дает

$$n^{1-\epsilon} \prec \pi(n) \prec n.$$

Соотношение (9.4) можно обобщить. Например,

$$n^{\alpha_1}(\log n)^{\alpha_2}(\log\log n)^{\alpha_3} \prec n^{\beta_1}(\log n)^{\beta_2}(\log\log n)^{\beta_3} \\ \iff (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) < (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\,. \qquad (9.6)$$

Здесь '$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) < (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$' означает лексикографический порядок (порядок слов в словарях); иначе говоря, это неравенство означает, что $\alpha_1 < \beta_1$ или $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 < \beta_2$ или же $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$ и $\alpha_3 < \beta_3$.

А как обстоят дела с функцией $e^{\sqrt{\log n}}$; где ее место в иерархии? Ответ на подобные вопросы можно получить с помощью правила

$$e^{f(n)} \prec e^{g(n)} \iff \lim_{n\to\infty}\bigl(f(n)-g(n)\bigr) = -\infty\,, \qquad (9.7)$$

которое в два шага получается из определения (9.3) путем логарифмирования. Следовательно,

$$1 \prec f(n) \prec g(n) \implies e^{|f(n)|} \prec e^{|g(n)|}\,.$$

А поскольку $1 \prec \log\log n \prec \sqrt{\log n} \prec \epsilon \log n$, получаем $\log n \prec e^{\sqrt{\log n}} \prec n^{\epsilon}$.

Если две функции $f(n)$ и $g(n)$ имеют *один и тот же* порядок роста, мы будем писать '$f(n) \asymp g(n)$'. „Официальное“ определение таково:

$$f(n) \asymp g(n) \iff |f(n)| \leqslant C|g(n)| \quad \text{и} \quad |g(n)| \leqslant C|f(n)|\,, \\ \text{для некоторого } C \text{ и всех достаточно больших } n. \qquad (9.8)$$

Это имеет место, если, например, $f(n)$ — константа, а $g(n) = \cos n + \operatorname{arctg} n$. Мы вскоре докажем справедливость этого соотношения во всех случаях, когда $f(n)$ и $g(n)$ — многочлены одинаковых степеней. Существует и более сильное отношение, определяемое правилом

$$f(n) \sim g(n) \iff \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 1\,. \qquad (9.9)$$

В таких случаях будем говорить, что „$f(n)$ есть асимптотика для $g(n)$“.

Г. Х. Харди [333] ввел интересное и важное понятие — класс *логарифмически-экспоненциальных функций*, определяемый рекурсивно как наименьшее семейство $\mathfrak{L}$ функций, удовлетворяющее следующим условиям:

- Постоянная функция $f(n) = \alpha$ лежит в $\mathfrak{L}$ для всех вещественных α.
- Тождественная функция $f(n) = n$ лежит в $\mathfrak{L}$.
- Если $f(n)$ и $g(n)$ из $\mathfrak{L}$, то и $f(n) - g(n)$ лежит в $\mathfrak{L}$.
- Если $f(n)$ из $\mathfrak{L}$, то $e^{f(n)}$ лежит в $\mathfrak{L}$.

- Если функция $f(n)$ из $\mathfrak{L}$ является „по-существу положительной", то $\ln f(n)$ лежит в $\mathfrak{L}$.

Функция $f(n)$ называется „по-существу положительной", если существует число n_0, такое, что $f(n) > 0$ для всех $n \geqslant n_0$.

Используя эти правила, можно, например, показать, что $f(n) + g(n)$ лежит в $\mathfrak{L}$, если $f(n)$ и $g(n)$ находятся там же. Действительно, $f(n) + g(n) = f(n) - \bigl(0 - g(n)\bigr)$. Если $f(n)$ и $g(n)$ по-существу положительные элементы $\mathfrak{L}$, то их произведение $f(n)g(n) = e^{\ln f(n) + \ln g(n)}$ и частное $f(n)/g(n) = e^{\ln f(n) - \ln g(n)}$ также лежат в $\mathfrak{L}$; то же верно для функций вроде $\sqrt{f(n)} = e^{\frac{1}{2}\ln f(n)}$ и т. д. Харди доказал, что всякая логарифмически-экспоненциальная функция является по-существу положительной, по-существу отрицательной или тождественно равна нулю. Следовательно, произведение и частное любых двух $\mathfrak{L}$-функций лежат в $\mathfrak{L}$, за исключением случая деления на тождественно нулевую функцию.

Главная теорема Харди о логарифмически-экспоненциальных функциях заключается в том, что эти функции образуют асимптотическую иерархию: если $f(n)$ и $g(n)$ — любые функции из $\mathfrak{L}$, то либо $f(n) \prec g(n)$, либо $f(n) \succ g(n)$, либо $f(n) \asymp g(n)$. В последнем случае найдется константа α, такая, что

$$f(n) \sim \alpha\, g(n).$$

Доказательство теоремы Харди выходит за рамки этой книги; но полезно просто знать о существовании этой теоремы, поскольку почти все функции, с которыми нам придется встретиться, лежат в $\mathfrak{L}$. На практике мы в большинстве случаев сможем без особого труда вставить данную функцию в данную иерархию.

9.2 СИМВОЛ O

„... wenn wir durch das Zeichen $O(n)$ eine Grösse ausdrücken, deren Ordnung in Bezug auf n die Ordnung von n nicht überschreitet; ob sie wirklich Glieder von der Ordnung n in sich enthält, bleibt bei dem bisherigen Schlussverfahren dahingestellt."
— П. Бахман [15]

В 1894 г. Пауль Бахман придумал замечательное обозначение для асимптотического анализа. В последующие годы его популярности способствовали Эдмунд Ландау и др. Мы встречаем это обозначение в формулах наподобие

$$H_n = \ln n + \gamma + O(1/n), \qquad (9.10)$$

которая говорит нам, что n-е гармоническое число равно натуральному логарифму n плюс константа Эйлера плюс некоторая величина, которая составляет „O большое от 1 на n". Эта последняя величина точно не определена, однако, какой бы она ни была, обозначение 'O' позволяет утверждать, что она не превосходит константу, умноженную на $1/n$.

Красота символа 'O' в том, что он скрывает несущественные детали и позволяет сконцентрироваться на главных особенностях поведения: величину $O(1/n)$ можно считать пренебрежимо малой, если только нас не интересуют величины, отличающиеся от $1/n$ лишь постоянным множителем.

Более того, символ 'O' удобно использовать внутри формул. Если мы захотим выразить соотношение (9.10) с использованием обозначений, введенных в разд. 9.1, то нам придется перенести '$\ln n + \gamma$' в левую часть и сформулировать результат в более слабой форме, например,

$$H_n - \ln n - \gamma \prec \frac{\log\log n}{n}$$

или же в сильной форме:

$$H_n - \ln n - \gamma \asymp \frac{1}{n}.$$

Символ 'O' позволяет нам указывать нужное количество деталей на месте, без перестановки членов.

Можно пояснить идею не полностью определенной величины, рассмотрев некоторые другие примеры. Мы иногда пишем '± 1' для обозначения чего-то, что есть $+1$ или -1; мы не знаем (или нам не важно), чему именно равна величина, тем не менее мы можем манипулировать ею в формулах.

Н. Г. де Брейн начал свою книгу *Асимптотические методы в анализе* [97] с рассмотрения обозначения „Эль большое", которое помогает понять смысл „O большого". Если мы запишем $L(5)$ для обозначения числа, чья абсолютная величина меньше 5 (не говоря, однако, что это за число), то мы сможем выполнять кое-какие вычисления, даже не зная всей правды. Так, можно вывести некоторые формулы, например, $1 + L(5) = L(6)$; $L(2) + L(3) = L(5)$; $L(2)L(3) = L(6)$; $e^{L(5)} = L(e^5)$ и т. д. Однако отсюда нельзя заключить, что $L(5) - L(3) = L(2)$, поскольку левая часть может, например, равняться $4 - 0$. Фактически, лучшее, что можно утверждать, это $L(5) - L(3) = L(8)$.

Обозначение „O большое" Бахмана аналогично обозначению „L большое", но оно еще менее определенно: $O(\alpha)$ обозначает число, абсолютная величина которого не превосходит константу, умноженную на $|\alpha|$. Мы не говорим, что это за число и даже не говорим, что это за константа. Разумеется, понятие „константы" бессмысленно, если нет чего-либо меняющегося; поэтому мы используем символ 'O' только в тех случаях, когда имеется хотя бы одна величина (скажем, n), значение которой меняется. Тогда формула

Оно не бессмысленно, оно не нужно.

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr) \qquad \text{для всех } n \tag{9.11}$$

означает, что существует такая константа C, что

$$\bigl|f(n)\bigr| \leqslant C\bigl|g(n)\bigr| \qquad \text{для всех } n; \tag{9.12}$$

а если обозначение $O\bigl(g(n)\bigr)$ использовано внутри формулы, то оно означает функцию $f(n)$, удовлетворяющую (9.12). Значения функции $f(n)$ неизвестны, однако мы все же знаем, что они не слишком велики. Аналогично, введенная ранее функция $L(n)$

представляет собой неопределенную функцию $f(n)$, значения которой удовлетворяют неравенству $|f(n)| < |n|$. Главное различие между L и O в том, что символ 'O' включает неопределенную константу C; каждое вхождение O может подразумевать различные C, но каждая из этих констант не зависит от n.

А вот и маленький список, маленький список, Противных терминов и деталей: Их можно бы похоронить, Но никогда нельзя забыть — Их никогда нельзя забыть.

Так, например, мы знаем, что сумма первых n квадратов равна

$$\square_n = \tfrac{1}{3}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n.$$

Мы можем записать

$$\square_n = O(n^3),$$

поскольку $|\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n| \leqslant \frac{1}{3}|n|^3 + \frac{1}{2}|n|^2 + \frac{1}{6}|n| \leqslant \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^3| + \frac{1}{6}|n^3| = |n^3|$ для всех целых n. Аналогично, можно получить более точную формулу

$$\square_n = \tfrac{1}{3}n^3 + O(n^2);$$

можно также небрежно отбросить часть информации и записать

$$\square_n = O(n^{10}).$$

Определение O отнюдь не заставляет нас давать наилучшую оценку.

Но минуточку. Что, если переменная n — не целочисленная? Как быть с формулой вроде $S(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, где x — вещественное число? Здесь уже нельзя сказать, что $S(x) = O(x^3)$, поскольку отношение $S(x)/x^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{6}x^{-2}$ неограниченно растет при $x \to 0$. Нельзя также сказать, что $S(x) = O(x)$, поскольку отношение $S(x)/x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$ неограниченно растет, когда x стремится к ∞. Так что мы, судя по всему, вовсе не можем использовать символ 'O' для оценки $S(x)$.

Эта дилемма разрешается благодаря тому, что на переменные, используемые с O, обычно накладываются какие-либо ограничения. Если, например, мы поставим условие, что $|x| \geqslant 1$, или что $x \geqslant \epsilon$, где ϵ — произвольная положительная константа, или что x — целое число, то мы сможем записать $S(x) = O(x^3)$. Если же наложено условие $|x| \leqslant 1$ или $|x| \leqslant c$, где c — произвольная положительная константа, то в этом случае $S(x) = O(x)$. „O большое" зависит от контекста, от ограничений на используемые переменные.

Эти ограничения часто задаются в виде предельных соотношений. Например, мы могли бы сказать, что

$$f(n) = O\big(g(n)\big) \qquad \text{при } n \to \infty. \tag{9.13}$$

Такая запись означает, что условия, накладываемые обозначением O, предполагаются выполненными, когда n „близко" к ∞; нас не волнует, что происходит при не слишком больших n. Более

того, мы даже не определяем точно, что означает „близко“; в такой ситуации каждое вхождение O подразумевает существование *двух* констант C и n_0, таких, что

$$|f(n)| \leqslant C|g(n)| \qquad \text{при всех } n \geqslant n_0. \tag{9.14}$$

Значения C и n_0 могут быть разными для разных O, но они не зависят от n. Аналогично, запись

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \qquad \text{при } x \to 0$$

означает, что существуют две константы C и ϵ, такие, что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|, \qquad \text{если только } |x| \leqslant \epsilon. \tag{9.15}$$

Предельное значение не обязательно равно ∞ или 0; справедлива запись

$$\ln z = z - 1 + O\big((z-1)^2\big) \qquad \text{при } z \to 1,$$

поскольку, как можно доказать, $|\ln z - z + 1| \leqslant |z-1|^2$, если $|z-1| \leqslant \frac{1}{2}$.

Ты изумительная девушка,
Позволь мне быть твоим рыцарем;
Я люблю тебя как единица на x,
Когда x *стремится к нулю.*
Сверху.

Мы постепенно, на протяжении нескольких страниц, развили наше определение O, начав со вполне очевидных вещей, и получили в итоге нечто, представляющееся ужасно сложным; теперь у нас O представляет неопределенную функцию и одну или две неопределенные константы, зависящие от контекста. Все это может показаться слишком сложным для сколько-нибудь разумного обозначения, но это еще не все! Еще одна тонкость пока ускользнула от нашего внимания. А именно, следует осознавать, что запись

$$\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = O(n^3),$$

вполне корректна, но в этом равенстве *ни в коем случае* нельзя менять местами правую и левую части. В противном случае мы можем прийти к нелепым выводам, наподобие $n = n^2$, исходя из верных тождеств $n = O(n^2)$ и $n^2 = O(n^2)$. Работая с символом 'O' и другими формулами, включающими не полностью определенные величины, мы имеем дело с *односторонними равенствами*. Правая часть уравнения содержит не больше информации, чем левая, и фактически может содержать меньше информации; правая часть является „огрублением“ левой.

„And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══ *, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle.“*
— Р. Рекорд [257]

Если говорить строго формально, то запись $O\big(g(n)\big)$ обозначает не какую-то одну функцию $f(n)$, а сразу все *множество* функций $f(n)$, таких, что $|f(n)| \leqslant C|g(n)|$ для некоторой константы C. Обычная формула $g(n)$, не включающая символа O, обозначает множество, содержащее одну функцию $f(n) = g(n)$. Если S и T суть множества функций от n, то запись $S + T$ обозначает множество всех функций вида $f(n) + g(n)$, где $f(n) \in S$ и $g(n) \in T$; другие обозначения вроде $S - T$, ST, S/T, $\sqrt{S}$, e^S, $\ln S$ определяются аналогично. Тогда „равенство“ между двумя

такими множествами функций есть, строго говоря, *теоретико-множественное включение*; знак '=' в действительности означает '⊆'. Эти формальные определения подводят под все наши манипуляции с O твердую логическую основу.

Так, „уравнение"

$$\tfrac{1}{3}n^3 + O(n^2) = O(n^3)$$

означает, что $S_1 \subseteq S_2$, где S_1 есть множество всех функций вида $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$, для которых найдется константа C_1, такая, что $|f_1(n)| \leqslant C_1|n^2|$, а S_2 есть множество всех функций $f_2(n)$, для которых найдется константа C_2, такая, что $|f_2(n)| \leqslant C_2|n^3|$. Мы можем строго доказать это „равенство", если возьмем произвольный элемент из левой части и покажем, что он принадлежит правой части: пусть $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$ таково, что $|f_1(n)| \leqslant C_1|n^2|$, нам следует доказать, что существует такая константа C_2, что $|\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)| \leqslant C_2|n^3|$. Константа $C_2 = \frac{1}{3} + C_1$ решает проблему, поскольку $n^2 \leqslant |n^3|$ для всех целых n.

Но если '=' в действительности означает '⊆', то почему бы нам не писать явно '⊆' вместо превратного использования знака равенства? Тому есть четыре причины.

Во-первых, традиция. Начали использовать символ O со знаком равенства теоретико-числовики, и эта практика получила распространение. Мы давно убедились, что пытаться изменить привычки математического сообщества — дело безнадежное.

Во-вторых, традиция. Программисты вполне привыкли видеть знак равенства не на месте — многие годы в программах на Фортране и Бейсике мы писали присваивания вида '$N = N + 1$'. Одной неправильной трактовкой больше, одной меньше — какая разница!

„Очевидно, что знак = не подходит для таких отношений, поскольку он подразумевает симметрию, которой на самом деле нет. ... Однако после такого предупреждения использование знака = не принесет большого вреда, и мы будем его использовать потому лишь, что это принято."
— Н. Г. де Брейн [97]

В-третьих, традиция. Мы часто произносим знак '=' словом 'есть'. Например, формулу $H_n = O(\log n)$ можно произнести как „Аш энное есть O большое от лог эн". Но слово 'есть' несимметрично. Мы говорим, что птицы есть животные, но не можем сказать, что животные есть птицы; „животное" — это огрубление понятия „птица".

И, в-четвертых, для наших целей такое обозначение весьма естественно. Если мы ограничимся лишь ситуациями, где символ O целиком занимает правую часть формулы — как в аппроксимации гармонических чисел, $H_n = O(\log n)$, или в оценке времени работы алгоритма сортировки, $T(n) = O(n \log n)$, — то неважно, какой знак используется, '=' или какой-либо еще. Однако если символ O использовать внутри выражений, как мы часто делаем в асимптотическом анализе, то нашей интуиции отвечает трактовка знака '=' как равенства, а величины́ вроде $O(1/n)$ как чего-то очень маленького.

Поэтому мы и дальше будем использовать '=' и будем считать $O(g(n))$ не полностью определенной функцией, имея в ви-

ду, что в случае необходимости мы всегда сможем вернуться к теоретико-множественным определениям.

Всесторонне рассматривая определение, мы обязаны отметить еще одну техническую деталь. Если в формуле используется несколько переменных, то символ O представляет множество функций от двух или более переменных, а не только от одной. В область определения каждой функции входят все переменные, которые в данном контексте „свободны" для изменения.

Тут есть некоторая тонкость ввиду того, что переменные могут иметь смысл лишь в части выражения, если они связаны знаком $\sum$ или подобным. Посмотрим внимательно, например, на соотношение

$$\sum_{k=0}^{n}\bigl(k^2+O(k)\bigr) = \tfrac{1}{3}n^3+O(n^2)\,, \qquad \text{целое } n\geqslant 0. \tag{9.16}$$

Выражение $k^2 + O(k)$ в левой части отвечает множеству всех функций от двух переменных вида $k^2+f(k,n)$, для которых найдется константа C, такая, что $\bigl|f(k,n)\bigr| \leqslant Ck$ для $0 \leqslant k \leqslant n$. Сумма таких множеств функций для $0 \leqslant k \leqslant n$ есть множество всех функций $g(n)$ вида

$$\sum_{k=0}^{n}\bigl(k^2+f(k,n)\bigr)$$
$$= \tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n+f(0,n)+f(1,n)+\cdots+f(n,n)\,,$$

где f удовлетворяет сформулированному условию. Поскольку

$$\bigl|\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n+f(0,n)+f(1,n)+\cdots+f(n,n)\bigr|$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n^2+C\cdot 0+C\cdot 1+\cdots+C\cdot n$$
$$< n^2+C(n^2+n)/2 < (C+1)n^2\,,$$

то все такие функции $g(n)$ принадлежат правой части (9.16); следовательно, (9.16) справедливо.

(Теперь самое время сделать разминочные упражнения 3 и 4.)

Иногда O-обозначения понимают неправильно, считая, что 'O' дает точный порядок роста; символ O используется так, как будто он определяет наряду с верхней границей также нижнюю. Так, можно услышать, что некий алгоритм сортировки n чисел неэффективен, „поскольку его время работы составляет $O(n^2)$". Однако время работы $O(n^2)$ вовсе не означает, что это время не есть также $O(n)$. Для указания нижней границы имеется другое обозначение — „большая Омега":

$$f(n)=\Omega\bigl(g(n)\bigr) \iff \bigl|f(n)\bigr| \geqslant C\bigl|g(n)\bigr| \quad \text{для некоторого } C>0. \tag{9.17}$$

Мы имеем $f(n) = \Omega\bigl(g(n)\bigr)$ тогда и только тогда, когда $g(n) = O\bigl(f(n)\bigr)$. При достаточно больших n алгоритм сортировки с временем работы $\Omega(n^2)$ неэффективен в сравнении с алгоритмом, время работы которого есть $O(n\log n)$.

Ω и Θ — заглавные греческие буквы, но тогда и символ O должен быть заглавной греческой буквой Омикрон. Как-никак, именно греки придумали асимптотику.

И, наконец, символ „большая Тета" указывает точный порядок роста:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff \begin{array}{c} f(n) = O(g(n)) \\ \text{и} \quad f(n) = \Omega(g(n)) . \end{array} \qquad (9.18)$$

Мы будем иметь $f(n) = \Theta(g(n))$ тогда и только тогда, когда $f(n) \asymp g(n)$ в обозначениях, введенных ранее, в (9.8).

Эдмунд Ландау [180] изобрел символ „o малое",

$$f(n) = o(g(n)) \iff |f(n)| \leqslant \epsilon |g(n)| \quad \begin{array}{c} \text{для всех } n \geqslant n_0(\epsilon) \text{ и} \\ \text{любой константы } \epsilon > 0. \end{array} \qquad (9.19)$$

Это есть, по-существу, отношение $f(n) \prec g(n)$ из (9.3). Имеем также

$$f(n) \sim g(n) \iff f(n) = g(n) + o(g(n)) . \qquad (9.20)$$

Многие авторы используют в асимптотических формулах 'o', однако почти всегда предпочтительнее более явное выражение с 'O'. Например, среднее время работы алгоритма, называемого „сортировка методом пузырька", зависит от асимптотического значения суммы $P(n) = \sum_{k=0}^{n} k^{n-k} k!/n!$. Элементарные методы асимптотического анализа позволяют доказать тот факт, что $P(n) \sim \sqrt{\pi n/2}$; это означает, что отношение $P(n)/\sqrt{\pi n/2}$ стремится к 1 при $n \to \infty$. Однако для того, чтобы лучше понять поведение $P(n)$, следует рассмотреть не отношение, а *разность* $P(n) - \sqrt{\pi n/2}$:

n	$P(n)/\sqrt{\pi n/2}$	$P(n) - \sqrt{\pi n/2}$
1	0.798	−0.253
10	0.878	−0.484
20	0.904	−0.538
30	0.918	−0.561
40	0.927	−0.575
50	0.934	−0.585

Значения в среднем столбце не очень убедительны; это едва ли может считаться аргументом в пользу быстрой сходимости $P(n)/\sqrt{\pi n/2}$ к 1, да и есть ли вообще сходимость? Однако правый столбец показывает, что значение $P(n)$ действительно весьма близко к $\sqrt{\pi n/2}$. Таким образом, мы гораздо лучше охарактеризуем поведение $P(n)$, если сможем вывести формулы наподобие

$$P(n) = \sqrt{\pi n/2} + O(1)$$

или даже более точную оценку вида

$$P(n) = \sqrt{\pi n/2} - \tfrac{2}{3} + O(1/\sqrt{n}) .$$

Для доказательства результатов с O требуются более сильные методы асимптотического анализа, однако дополнительные усилия, потраченные на изучение этих методов, многократно окупаются лучшим пониманием асимптотики, которое дают O-оценки.

Более того, время работы многих алгоритмов сортировки имеет вид

$$T(n) = A\,n\lg n + B\,n + O(\log n)$$

для некоторых констант A и B. Если наш анализ останавливается на оценке $T(n) \sim A\,n\lg n$, то мы узнаем далеко не все; выбор алгоритма сортировки на основе только значения A оказывается плохой стратегией. Хорошее 'A' в алгоритмах часто достигается ценой ухудшения 'B'. Поскольку $n\lg n$ растет лишь немного быстрее n, алгоритм, более быстрый асимптотически (т. е. с несколько меньшим значением A) может оказаться быстрее лишь для таких значений n, которые никогда не встретятся на практике. Таким образом, чтобы сделать правильный выбор, нам необходим метод асимптотического анализа, позволяющий пойти дальше первого члена и оценить B.

Прежде чем продолжить изучение O большого, поговорим немного об одном маленьком элементе математического стиля. В этой главе используется три различных обозначения логарифма: lg, ln и log. В связи с компьютерными методами мы часто используем 'lg', поскольку в таких случаях двоичный логарифм оказывается наиболее подходящим; в чистой математике часто используется 'ln', поскольку формулы с натуральным логарифмом просты и изящны. Но что такое 'log'? Неужели это „обычный" десятичный логарифм, изучаемый в старших классах — „обычный" логарифм, который оказывается очень необычным как для математики, так и для информатики? Да, это так; вместе с тем, многие математики вносят путаницу в этот вопрос, используя 'log' для натурального или двоичного логарифма. Здесь нет единого соглашения, однако можно вздохнуть с облегчением, если логарифм встречается внутри O-обозначения, поскольку для O несущественны мультипликативные константы. При $n \to \infty$ между $O(\lg n)$, $O(\ln n)$ и $O(\log n)$ нет никакой разницы; аналогично, нет разницы между $O(\lg\lg n)$, $O(\ln\ln n)$ и $O(\log\log n)$. Мы можем выбрать, что нам больше нравится; вариант 'log' представляется привлекательным, поскольку его удобнее произносить. Поэтому мы, как правило, будем использовать 'log' во всех тех случаях, когда это способствует благозвучию, не приводя к двусмысленности.

Заметьте, что $\log\log\log n$ *неопределен для* $n \leqslant 10$.

9.3 ОПЕРАЦИИ С O

Как и для любого математического формализма, в случае O-обозначений имеются правила оперирования с ними, освобождающие нас от обращения к громоздкому определению. Доказав один раз, с использованием определения, справедливость

этих правил, мы можем в дальнейшем подняться на более высокий уровень и забыть о проверке включения одного множества функций в другое. Нам даже не придется вычислять константы C, подразумеваемые каждым O, поскольку мы будем применять правила, гарантирующие существование таких констант.

Открою вам секрет, как стать занудой,— говорите обо всем.
— Вольтер

Например, мы можем доказать раз и навсегда, что

$$n^m = O(n^{m'}), \qquad \text{если } m \leqslant m', \tag{9.21}$$
$$O\big(f(n)\big) + O\big(g(n)\big) = O\big(|f(n)| + |g(n)|\big)\,. \tag{9.22}$$

Тогда мы сможем сразу сказать, что $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = O(n^3) + O(n^3) + O(n^3) = O(n^3)$, без трудоемких вычислений из предыдущего раздела.

Вот еще несколько правил, с легкостью получаемых из определений:

$$f(n) = O\big(f(n)\big)\,; \tag{9.23}$$
$$c \cdot O\big(f(n)\big) = O\big(f(n)\big)\,, \qquad \text{если } c \text{ — константа}; \tag{9.24}$$
$$O\Big(O\big(f(n)\big)\Big) = O\big(f(n)\big)\,; \tag{9.25}$$
$$O\big(f(n)\big)O\big(g(n)\big) = O\big(f(n)g(n)\big)\,; \tag{9.26}$$
$$O\big(f(n)\,g(n)\big) = f(n)O\big(g(n)\big)\,. \tag{9.27}$$

В упр. 9 доказывается (9.22); доказательства остальных правил аналогичны. Можно всегда заменять что-либо, имеющее вид одной из левых частей на то, что записано справа, безотносительно к ограничениям на переменную n.

(Замечание. Формула $O(f(n))^2$ обозначает не множество всех функций $g(n)^2$, где $g(n)$ лежит в $O(f(n))$; такие функции $g(n)^2$ не могут принимать отрицательных значений, тогда как множество $O(f(n))^2$ содержит отрицательные функции. В общем случае, если S — множество, то S^2 обозначает множество всех произведений s_1s_2, где s_1 и s_2 лежат в S, а не множество всех квадратов s^2 для $s \in S$.)

Соотношения (9.27) и (9.23) позволяют доказать тождество $O\big(f(n)^2\big) = O\big(f(n)\big)^2$. Это свойство позволяет иногда сэкономить скобки, поскольку мы теперь можем писать

$$O(\log n)^2 \qquad \text{вместо} \qquad O\big((\log n)^2\big)\,.$$

Оба этих варианта предпочтительнее записи '$O(\log^2 n)$', которая двусмысленна из-за того, что некоторые авторы используют '$O(\log^2 n)$' для обозначения '$O(\log\log n)$'.

А можно ли также писать

$$O(\log n)^{-1} \qquad \text{вместо} \qquad O\big((\log n)^{-1}\big)\,?$$

Нет! Это некорректно, поскольку множество функций $1/O(\log n)$ не является ни подмножеством, ни „надмножеством“ для $O(1/\log n)$. Правильно будет заменять $O\big((\log n)^{-1}\big)$ на $\Omega(\log n)^{-1}$, но это выглядит нелепо. Так что мы будем использовать „возведение O в степень“ только в тех случаях, когда показатель степени является целой положительной константой.

Степенные ряды дают нам одну из самых полезных операций. Если сумма

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

сходится абсолютно для некоторого комплексного числа $z = z_0$, то

$$S(z) = O(1) \qquad \text{для всех } |z| \leqslant |z_0|.$$

Это очевидно, поскольку

$$|S(z)| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\,|z|^n \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\,|z_0|^n = C < \infty\,.$$

В частности, $S(z) = O(1)$ при $z \to 0$ и $S(1/n) = O(1)$ при $n \to \infty$ при том только условии, что $S(z)$ сходится хотя бы для одного ненулевого значения z. Мы можем использовать этот принцип для того, чтобы, отбросив хвост степенного ряда, начиная с любого удобного места, оценить этот хвост через O. Так, например, не только $S(z) = O(1)$, но и

$$S(z) = a_0 + O(z)\,,$$
$$S(z) = a_0 + a_1 z + O(z^2)\,,$$

и т. д., поскольку

$$S(z) = \sum_{0\leqslant k<m} a_k z^k + z^m \sum_{n\geqslant m} a_n z^{n-m},$$

а последняя сумма, как и сама $S(z)$, абсолютно сходится при $z = z_0$ и есть $O(1)$. В табл. 491 приведены самые полезные асимптотические формулы, половина из которых получена просто путем отбрасывания членов степенного ряда в соответствии с этим правилом.

Аналогичным образом можно укорачивать ряды Дирихле, представляющие собой суммы вида $\sum_{k\geqslant 1} a_k/k^z$: если ряд Дирихле сходится абсолютно для некоторого $z = z_0$, то мы можем отбросить его хвост, начиная с любого члена, и получим аппроксимацию

$$\sum_{1\leqslant k<m} a_k/k^z + O(m^{-z})\,,$$

справедливую для $\Re z \geqslant \Re z_0$. В табл. 491 этот принцип иллюстрируется асимптотической формулой для чисел Бернулли B_n.

Напомним, что $\Re$ означает „вещественную часть".

С другой стороны, асимптотические формулы для H_n, $n!$ и $\pi(n)$ в табл. 491 не являются начальными отрезками сходящихся рядов; если неограниченно продолжить эти формулы, то полученные ряды будут расходиться при всех n. Особенно легко просматривается это в случае $\pi(n)$, поскольку, как мы уже видели в разд. 7.3, пример 5, степенной ряд $\sum_{k\geqslant 0} k!/(\ln n)^k$ всюду расходится. И тем не менее эти отрезки расходящихся рядов дают полезные аппроксимации.

Говорят, что асимптотическая аппроксимация имеет *абсолютную погрешность* $O(g(n))$, если она имеет вид $f(n) + O(g(n))$, где $f(n)$ не включает O. Аппроксимация вида

Таблица 491 Асимптотические аппроксимации, справедливые при $n \to \infty$ и $z \to 0$.

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\Big(\frac{1}{n^6}\Big). \quad (9.28)$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big). \quad (9.29)$$

$$B_n = 2[n\ \text{even}](-1)^{n/2-1}\frac{n!}{(2\pi)^n}\big(1 + 2^{-n} + 3^{-n} + O(4^{-n})\big). \quad (9.30)$$

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!\,n}{(\ln n)^3} + \frac{3!\,n}{(\ln n)^4} + O\Big(\frac{n}{(\log n)^5}\Big). \quad (9.31)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5). \quad (9.32)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + O(z^5). \quad (9.33)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + O(z^5). \quad (9.34)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \binom{\alpha}{2}z^2 + \binom{\alpha}{3}z^3 + \binom{\alpha}{4}z^4 + O(z^5). \quad (9.35)$$

$f(n)\big(1+O(g(n))\big)$ имеет *относительную погрешность* $O\big(g(n)\big)$, если $f(n)$ не включает O. Например, аппроксимация H_n в табл. 491 имеет абсолютную погрешность $O(n^{-6})$; аппроксимация $n!$ — относительную погрешность $O(n^{-4})$. (Правая часть (9.29) не такая, как требуется,— $f(n)\big(1+O(n^{-4})\big)$, но ее можно при желании переписать как

(Относительная погрешность удобна при вычислении обратных величин, поскольку $1/(1+O(\epsilon)) = 1+O(\epsilon)$.)

$$\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3}\Big)\big(1+O(n^{-4})\big);$$

аналогичное преобразование рассматривается в упр. 12.) Абсолютная погрешность этой аппроксимации есть $O(n^{n-3.5}e^{-n})$. Абсолютная погрешность соотносится с числом верных десятичных цифр справа от десятичной точки, которые сохраняются после отбрасывания члена O; относительная погрешность связана с числом верных „значащих цифр“.

Воспользовавшись сокращением степенных рядов, мы можем доказать общие правила

$$\ln\big(1+O(f(n))\big) = O\big(f(n)\big), \qquad \text{если } f(n) \prec 1; \quad (9.36)$$

$$e^{O(f(n))} = 1 + O\big(f(n)\big), \qquad \text{если } f(n) = O(1). \quad (9.37)$$

(Здесь мы предполагаем, что $n \to \infty$; аналогичные формулы для $\ln(1+O(f(x)))$ и $e^{O(f(x))}$ имеют место при $x \to 0$.) Пусть, например, $\ln(1+g(n))$ — какая-то функция, лежащая в множестве, описываемом левой частью (9.36). Тогда найдутся константы C, n_0 и c, такие, что

$$|g(n)| \leqslant C|f(n)| \leqslant c < 1 \qquad \text{для всех } n \geqslant n_0.$$

Отсюда следует, что бесконечная сумма

$$\ln(1+g(n)) = g(n) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}g(n) + \tfrac{1}{3}g(n)^2 - \cdots\right)$$

сходится при всех $n \geqslant n_0$ и ряд в скобках ограничен константой $1+\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}c^2+\cdots$. Это доказывает (9.36), формула (9.37) доказывается аналогично. Объединив (9.36) и (9.37), мы получим полезную формулу

$$\bigl(1+O(f(n))\bigr)^{O(g(n))} = 1+O\bigl(f(n)g(n)\bigr), \quad \begin{matrix}\text{если } f(n) \prec 1 \text{ и}\\ f(n)g(n) = O(1).\end{matrix} \qquad (9.38)$$

Задача 1: снова колесо Фортуны

Попробуем теперь попытать счастья в некоторых асимптотических задачах. В гл. 3 мы вывели уравнение (3.13) для числа выигрышных позиций в одной игре:

$$W = \lfloor N/K \rfloor + \tfrac{1}{2}K^2 + \tfrac{5}{2}K - 3\,, \qquad K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor.$$

Мы обещали, что асимптотическое значение W будет вычислено в гл. 9. Сейчас мы как раз в главе 9; так что попробуем оценить W при $N \to \infty$.

Основная идея — избавиться от скобок '$\lfloor$' и '$\rfloor$', заменив K на $N^{1/3}+O(1)$. Далее, мы можем записать

$$K = N^{1/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)\,;$$

это называется „вынести за скобки главную часть“. (Мы еще неоднократно воспользуемся этим приемом.) Теперь, из (9.38) и (9.26) имеем

$$\begin{aligned} K^2 &= N^{2/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)^2 \\ &= N^{2/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr) = N^{2/3}+O(N^{1/3}). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \lfloor N/K \rfloor &= N^{1-1/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr)^{-1} + O(1) \\ &= N^{2/3}\bigl(1+O(N^{-1/3})\bigr) + O(1) = N^{2/3}+O(N^{1/3})\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что число выигрышных позиций есть

$$\begin{aligned} W &= N^{2/3}+O(N^{1/3}) + \tfrac{1}{2}\bigl(N^{2/3}+O(N^{1/3})\bigr) + O(N^{1/3}) + O(1) \\ &= \tfrac{3}{2}N^{2/3}+O(N^{1/3})\,. \end{aligned} \qquad (9.39)$$

Обратите внимание, как члены с O поглощают друг друга, пока не останется только одно O; это — типичная ситуация и еще одна иллюстрация полезности символа O внутри формул.

Задача 2: метаморфозы формулы Стирлинга

Аппроксимация Стирлинга для $n!$ есть, без сомнения, самая знаменитая асимптотическая формула. Мы докажем ее позднее в этой главе; пока же попробуем лучше познакомиться с ее свойствами. Мы можем записать один из вариантов аппроксимации в виде

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O(n^{-3})\right) \quad \text{при } n \to \infty \qquad (9.40)$$

для некоторых констант a и b. Поскольку эта аппроксимация имеет место при всех больших n, она должна остаться в силе, если заменить n на $n-1$:

$$(n-1)! = \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \times\left(1+\frac{a}{n-1}+\frac{b}{(n-1)^2}+O\big((n-1)^{-3}\big)\right). \qquad (9.41)$$

Мы знаем, разумеется, что $(n-1)! = n!/n$; следовательно, правая часть последней формулы должна приводиться к правой части (9.40), поделенной на n.

Попробуем поэтому упростить (9.41). Из первого сомножителя можно вынести главную часть:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi(n-1)} &= \sqrt{2\pi n}\,(1 - n^{-1})^{1/2}\\ &= \sqrt{2\pi n}\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O(n^{-3})\right).\end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение (9.35).

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}\frac{a}{n-1} &= \frac{a}{n}(1-n^{-1})^{-1} = \frac{a}{n} + \frac{a}{n^2} + O(n^{-3});\\ \frac{b}{(n-1)^2} &= \frac{b}{n^2}(1-n^{-1})^{-2} = \frac{b}{n^2} + O(n^{-3});\\ O\big((n-1)^{-3}\big) &= O\big(n^{-3}(1-n^{-1})^{-3}\big) = O(n^{-3}).\end{aligned}$$

Единственная часть (9.41), преобразование которой требует некоторой изобретательности,— это множитель $(n-1)^{n-1}$, который равняется

$$n^{n-1}(1-n^{-1})^{n-1} = n^{n-1}(1-n^{-1})^n\big(1+n^{-1}+n^{-2}+O(n^{-3})\big).$$

(Мы выписываем члены до тех пор, пока не получим относительную погрешность $O(n^{-3})$. Дело в том, что относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей и все члены $O(n^{-3})$ объединяются.)

Чтобы раскрыть $(1-n^{-1})^n$, мы сначала вычислим $\ln(1-n^{-1})$ и затем образуем экспоненту, $e^{n\ln(1-n^{-1})}$:

$$\begin{aligned}
(1-n^{-1})^n &= \exp\bigl(n\ln(1-n^{-1})\bigr)\\
&= \exp\bigl(n(-n^{-1}-\tfrac{1}{2}n^{-2}-\tfrac{1}{3}n^{-3}+O(n^{-4}))\bigr)\\
&= \exp\bigl(-1-\tfrac{1}{2}n^{-1}-\tfrac{1}{3}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&= \exp(-1)\cdot\exp(-\tfrac{1}{2}n^{-1})\cdot\exp(-\tfrac{1}{3}n^{-2})\cdot\exp\bigl(O(n^{-3})\bigr)\\
&= \exp(-1)\cdot\bigl(1-\tfrac{1}{2}n^{-1}+\tfrac{1}{8}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\qquad\times\bigl(1-\tfrac{1}{3}n^{-2}+O(n^{-4})\bigr)\cdot\bigl(1+O(n^{-3})\bigr)\\
&= e^{-1}\bigl(1-\tfrac{1}{2}n^{-1}-\tfrac{5}{24}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Здесь мы вместо e^z используем обозначение $\exp z$, поскольку это позволяет записывать сложный показатель степени в основной строке, а не в позиции верхнего индекса. Чтобы получить в окончательном итоге относительную погрешность $O(n^{-3})$, нам приходится раскрывать $\ln(1-n^{-1})$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-4})$, поскольку этот логарифм умножается на n.

Итак, мы привели правую часть (9.41) к виду „$\sqrt{2\pi n}$ умножить на n^{n-1}/e^n умножить на произведение нескольких членов“:

$$\begin{aligned}
&\bigl(1-\tfrac{1}{2}n^{-1}-\tfrac{1}{8}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\quad\times\bigl(1+n^{-1}+n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\quad\times\bigl(1-\tfrac{1}{2}n^{-1}-\tfrac{5}{24}n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\\
&\quad\times\bigl(1+an^{-1}+(a+b)n^{-2}+O(n^{-3})\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Перемножая скобки и включая все асимптотически малые члены в $O(n^{-3})$, получим

$$1+an^{-1}+(a+b-\tfrac{1}{12})n^{-2}+O(n^{-3})\,.$$

Н-да-а, мы надеялись прийти к $1+an^{-1}+bn^{-2}+O(n^{-3})$, поскольку именно это требуется для соответствия с правой частью (9.40). Мы где-то ошиблись? Нет, все правильно; следовательно, $a+b-\frac{1}{12}=b$.

Это рассуждение не доказывает справедливость аппроксимации Стирлинга, но кое-что все-таки доказано, а именно то, что формула (9.40) не может иметь места, если a не равно $\frac{1}{12}$. Если заменить $O(n^{-3})$ в (9.40) на $cn^{-3}+O(n^{-4})$ и проделать все вычисления с относительной погрешностью $O(n^{-4})$, то можно заключить, что $b=\frac{1}{288}$, в соответствии с табл. 491. (Этот способ определения a и b не самый простой, но он работает.)

Задача 3: n-е простое число

Соотношение (9.31) есть асимптотическая формула для $\pi(n)$, числа простых, не превосходящих n. Заменяя n на $p=P_n$, n-е

простое число, мы получаем $\pi(p) = n$; следовательно

$$n = \frac{p}{\ln p} + O\Big(\frac{p}{(\log p)^2}\Big) \tag{9.42}$$

при $n \to \infty$. Попробуем „решить" это уравнение относительно p; тогда мы найдем приблизительную величину n-го простого числа.

Первый шаг состоит в упрощении члена O. Поделив обе части на $p/\ln p$, мы обнаружим, что $n \ln p/p \to 1$; следовательно, $p/\ln p = O(n)$ и

$$O\Big(\frac{p}{(\log p)^2}\Big) = O\Big(\frac{n}{\log p}\Big) = O\Big(\frac{n}{\log n}\Big).$$

(Имеем $(\log p)^{-1} \leqslant (\log n)^{-1}$, так как $p \geqslant n$.)

Второй шаг — переставить две части (9.42), исключая O. Эта процедура допустима ввиду общего правила:

$$a_n = b_n + O\big(f(n)\big) \iff b_n = a_n + O\big(f(n)\big). \tag{9.43}$$

(Любое из этих соотношений следует из другого, если умножить обе части на -1 и прибавить $a_n + b_n$.) Следовательно,

$$\frac{p}{\ln p} = n + O\Big(\frac{n}{\log n}\Big) = n\big(1 + O(1/\log n)\big)$$

и, значит,

$$p = n \ln p\big(1 + O(1/\log n)\big). \tag{9.44}$$

Это уравнение — „приближенное рекуррентное соотношение" для $p = P_n$, выражающее его через самого себя. Наша цель — преобразовать его в „приближенную замкнутую форму", и мы сможем сделать это, раскрывая рекуррентное соотношение асимптотически. Итак, попробуем раскрыть (9.44).

Прологарифмировав обе части, получим

$$\ln p = \ln n + \ln\ln p + O(1/\log n). \tag{9.45}$$

Это значение можно подставить вместо $\ln p$ в (9.44), однако хотелось бы, прежде чем выполнять подстановку, полностью избавиться от p в правой части. Где-то в ходе преобразований последнее p должно исчезнуть; но от него нельзя избавиться обычным для рекуррентных соотношений способом, поскольку в (9.44) не определены начальные условия для малых p.

Один из подходов к решению состоит в том, чтобы сначала доказать более слабый результат $p = O(n^2)$. В этом можно убедиться, если возвести в квадрат (9.44) и поделить на pn^2,

$$\frac{p}{n^2} = \frac{(\ln p)^2}{p}\big(1 + O(1/\log n)\big),$$

поскольку и правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Прекрасно, мы теперь знаем, что $p = O(n^2)$; следовательно, $\log p =$

$O(\log n)$ и $\log\log p = O(\log\log n)$. Теперь мы можем получить из (9.45)

$$\ln p = \ln n + O(\log\log n);$$

имея в руках эту оценку, мы можем заключить, что $\ln\ln p = \ln\ln n + O(\log\log n/\log n)$, и, наконец, (9.45) дает

$$\ln p = \ln n + \ln\ln n + O(\log\log n/\log n).$$

Это выражение можно подставить в правую часть (9.44), и мы получим

$$p = n\ln n + n\ln\ln n + O(n).$$

Это и есть приближенная величина n-го простого числа.

Эту оценку можно улучшить, использовав вместо (9.42) более точную аппроксимацию $\pi(n)$. Следующий член (9.31) говорит нам, что

$$n = \frac{p}{\ln p} + \frac{p}{(\ln p)^2} + O\Bigl(\frac{p}{(\log p)^3}\Bigr); \tag{9.46}$$

действуя, как раньше, получим рекуррентное соотношение

А теперь, дети, снова выбросьте исписанный листок.

$$p = n\ln p\,\bigl(1 + (\ln p)^{-1}\bigr)^{-1}\bigl(1 + O(1/\log n)^2\bigr), \tag{9.47}$$

имеющее относительную погрешность $O(1/\log n)^2$ вместо $O(1/\log n)$. Логарифмируя и сохраняя члены до нужной точности (но не слишком много), получим

Шум, свист.

$$\begin{aligned}\ln p &= \ln n + \ln\ln p + O(1/\log n)\\ &= \ln n\Bigl(1 + \frac{\ln\ln p}{\ln n} + O(1/\log n)^2\Bigr);\\ \ln\ln p &= \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\Bigl(\frac{\log\log n}{\log n}\Bigr)^2.\end{aligned}$$

Наконец, мы подставляем эти результаты в (9.47) и вот он, ответ:

$$P_n = n\ln n + n\ln\ln n - n + n\frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\Bigl(\frac{n}{\log n}\Bigr). \tag{9.48}$$

Если, например, $n = 10^6$, то это выражение дает $15631363.6 + O(n/\log n)$; в действительности миллионное простое число равно 15485863. Упражнение 21 показывает, что можно получить еще более точное приближение к P_n, если вместо (9.46) начать с более точного приближения к $\pi(n)$.

Задача 4: одна сумма из старого итогового экзамена

Когда в 1970–71 г. в Станфордском университете началось преподавание конкретной математики, студентам предлагалось найти асимптотическое значение суммы

$$S_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \qquad (9.49)$$

с относительной погрешностью $O(n^{-7})$. Представим, что мы сдаем итоговый (домашний) экзамен и нам только что предложили именно эту задачу; какой будет наша первая инстинктивная реакция?

Конечно же, мы не ударимся в панику. Первой нашей реакцией будет ПОДУМАТЬ О ГЛАВНОМ. Если положить n равным, скажем, 10^{100} и посмотреть на сумму, то мы увидим, что она состоит из n слагаемых, каждое из которых несколько меньше $1/n^2$; сумма, следовательно, несколько меньше $1/n$. Вообще, можно получить неплохую отправную точку для асимптотического анализа, если оглядеть ситуацию в целом и получить оценку ответа „на глазок“.

Попробуем улучшить нашу грубую оценку, выписав в каждом слагаемом его главные члены. Имеем

$$\frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2(1+k/n^2)} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^4} - \frac{k^3}{n^6} + O\left(\frac{k^4}{n^8}\right)\right),$$

вполне естественно попытаться просуммировать все эти оценки:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2+1} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1^2}{n^6} - \frac{1^3}{n^8} + O\left(\frac{1^4}{n^{10}}\right)\\
\frac{1}{n^2+2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4} + \frac{2^2}{n^6} - \frac{2^3}{n^8} + O\left(\frac{2^4}{n^{10}}\right)\\
&\;\;\vdots\\
\frac{1}{n^2+n} &= \frac{1}{n^2} - \frac{n}{n^4} + \frac{n^2}{n^6} - \frac{n^3}{n^8} + O\left(\frac{n^4}{n^{10}}\right)\\
\hline
S_n &= \frac{n}{n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^4} + \cdots .
\end{aligned}$$

Мы как будто приближаемся к результату $S_n = n^{-1} - \frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})$, полученному из суммы первых двух столбцов, но вычисления что-то уж очень разрастаются.

Если упорно следовать этим путем, то мы в конце концов достигнем цели; однако мы не станем заниматься суммированием остальных столбцов по двум причинам: во-первых, в последнем столбце появляются члены порядка $O(n^{-6})$ при $n/2 \leqslant k \leqslant n$, так что сумма будет иметь погрешность $O(n^{-5})$; это чересчур много, и нам придется добавить еще несколько столбцов. Неужели экзаменатор такой садист? Наверное, должен быть лучший метод. И,

во-вторых, такой лучший метод, и много лучший, действительно есть, причем он находится прямо у нас перед глазами.

Действительно, нам известно выражение S_n в конечном виде, это просто $H_{n^2+n} - H_{n^2}$. Кроме того, мы знаем хорошую аппроксимацию для гармонических чисел; применим ее дважды:

$$H_{n^2+n} = \ln(n^2+n) + \gamma + \frac{1}{2(n^2+n)} - \frac{1}{12(n^2+n)^2} + O\Big(\frac{1}{n^8}\Big);$$
$$H_{n^2} = \ln n^2 + \gamma + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + O\Big(\frac{1}{n^8}\Big).$$

Теперь можно вынести главный член и произвести упрощения, как мы делали при анализе аппроксимации Стирлинга. Имеем

$$\ln(n^2+n) = \ln n^2 + \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \ln n^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots;$$
$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \cdots;$$
$$\frac{1}{(n^2+n)^2} = \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^6} - \cdots.$$

После ряда удачных сокращений мы получим

$$\begin{aligned} S_n = n^{-1} - \tfrac{1}{2}n^{-2} + \tfrac{1}{3}n^{-3} - \tfrac{1}{4}n^{-4} + \tfrac{1}{5}n^{-5} - \tfrac{1}{6}n^{-6} \\ - \tfrac{1}{2}n^{-3} + \tfrac{1}{2}n^{-4} - \tfrac{1}{2}n^{-5} + \tfrac{1}{2}n^{-6} \\ + \tfrac{1}{6}n^{-5} - \tfrac{1}{4}n^{-6} \end{aligned}$$

плюс члены вида $O(n^{-7})$. Чуть-чуть арифметики — и можно идти гулять:

$$S_n = n^{-1} - \tfrac{1}{2}n^{-2} - \tfrac{1}{6}n^{-3} + \tfrac{1}{4}n^{-4} - \tfrac{2}{15}n^{-5} + \tfrac{1}{12}n^{-6} + O(n^{-7}). \quad (9.50)$$

Было бы совсем хорошо, если бы мы смогли проверить ответ численно, как это было в предыдущих главах при выводе точных результатов. Асимптотические формулы труднее проверять; в O-члене может скрываться произвольно большая константа, поэтому любая числовая проверка не дает окончательного ответа. Однако на практике у нас нет оснований считать, что нам противостоит противник, специально пытающийся сбить нас с толку, так что можно надеяться, что неизвестная константа в O достаточно мала. С помощью карманного калькулятора вычислим $S_4 = \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} = 0.2170107$; наша асимптотическая оценка для $n = 4$ дает

$$\tfrac{1}{4}\Big(1 + \tfrac{1}{4}\Big(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\big(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\big(-\tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{12}\big)\big)\big)\Big)\Big) = 0.2170125.$$

Если мы сделали ошибку, скажем на $\frac{1}{12}$ в коэффициенте при n^{-6}, то разность в $\frac{1}{12}\frac{1}{4096}$ проявится в пятой десятичной цифре; так что наша асимптотическая формула, видимо, правильна.

Задача 5: бесконечная сумма

Теперь обратимся к одному вопросу об асимптотике, поставленному Соломоном Голомбом [78]: чему равно приближенное значение

$$S_n = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{kN_n(k)^2}\,, \qquad (9.51)$$

где $N_n(k)$ — число цифр, требуемых для записи числа k в системе счисления с основанием n?

Первым делом попытаемся снова найти грубую оценку. Число цифр $N_n(k)$ приблизительно равно $\log_n k = \log k/\log n$; так что слагаемые примерно равны $(\log n)^2/k(\log k)^2$. Суммирование по k дает $\approx (\log n)^2 \sum_{k\geqslant 2} 1/k(\log k)^2$, а эта сумма сходится к константе, поскольку ее можно сопоставить с интегралом

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

Поэтому мы ожидаем, что S_n есть примерно $C(\log n)^2$ для некоторой константы C.

Подобный быстрый анализ полезен для ориентации, однако, чтобы решить задачу, нужна лучшая оценка. Одна из возможных идей — выразить $N_n(k)$ точно:

$$N_n(k) = \lfloor \log_n k \rfloor + 1\,. \qquad (9.52)$$

Так, например, для записи k по основанию n требуются три цифры, если $n^2 \leqslant k < n^3$, и ровно в этих случаях $\lfloor \log_n k \rfloor = 2$. Таким образом, $N_n(k) > \log_n k$, значит, $S_n = \sum_{k\geqslant 1} 1/kN_n(k)^2 < 1 + (\log n)^2 \sum_{k\geqslant 2} 1/k(\log k)^2$.

Действуя как в задаче 1, мы можем попробовать записать $N_n(k) = \log_n k + O(1)$ и подставить это выражение в формулу для S_n. Слагаемое, записанное здесь как $O(1)$, всегда лежит между 0 и 1 и в среднем близко к $\frac{1}{2}$, так что оно себя ведет, наверное, очень хорошо. Но, тем не менее, эта аппроксимация недостаточно точная, чтобы сказать что-нибудь о S_n; она дает нуль значащих цифр (т. е. большую относительную ошибку) при малых k, а именно эти слагаемые вносят основной вклад в сумму. Нужна новая идея.

Ключ к решению (как в задаче 4) — применить наше искусство преобразования выражений и, прежде чем переходить к асимптотическим оценкам, привести сумму к более удобному виду. Можно ввести новую переменную суммирования $m = N_n(k)$:

$$S_n = \sum_{k,m\geqslant 1} \frac{[m = N_n(k)]}{km^2} = \sum_{k,m\geqslant 1} \frac{[n^{m-1} \leqslant k < n^m]}{km^2}$$
$$= \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^2}\bigl(H_{n^m-1} - H_{n^{m-1}-1}\bigr)\,.$$

Это выражение может показаться еще худшим, чем исходная сумма, но в действительности сделан шаг в направлении к цели, поскольку мы располагаем очень хорошей аппроксимацией для гармонических чисел.

Однако пока мы придержим ее при себе и попытаемся еще кое-что упростить. Не надо спешить с переходом к асимптотическим оценкам. Суммирование по частям позволяет сгруппировать члены с одинаковыми значениями H_{n^m-1}, которые нам придется аппроксимировать:

$$S_n = \sum_{k\geqslant 1} H_{n^k-1}\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\Big)\,.$$

Например, H_{n^2-1} умножается на $1/2^2$ и затем — на $-1/3^2$. (Мы воспользовались также тем, что $H_{n^0-1} = H_0 = 0$.)

Теперь мы готовы подставить выражение для гармонических чисел. Наш опыт оценки $(n-1)!$ подсказывает, что проще будет аппроксимировать H_{n^k}, а не H_{n^k-1}; в последнем случае появится много дополнительных членов из-за '-1'. Итак, мы пишем

$$\begin{aligned} H_{n^k-1} = H_{n^k} - \frac{1}{n^k} &= \ln n^k + \gamma + \frac{1}{2n^k} + O\Big(\frac{1}{n^{2k}}\Big) - \frac{1}{n^k} \\ &= k\ln n + \gamma - \frac{1}{2n^k} + O\Big(\frac{1}{n^{2k}}\Big)\,. \end{aligned}$$

Теперь наша сумма сведется к

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k\geqslant 1}\Big(k\ln n + \gamma - \frac{1}{2n^k} + O\Big(\frac{1}{n^{2k}}\Big)\Big)\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\Big) \\ &= (\ln n)\Sigma_1 + \gamma\Sigma_2 - \tfrac{1}{2}\Sigma_3(n) + O\big(\Sigma_3(n^2)\big)\,. \end{aligned} \tag{9.53}$$

Осталось расписать четыре суммы: Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3(n)$ и $\Sigma_3(n^2)$, что уже просто.

Начнем, пожалуй, с Σ_3, поскольку $\Sigma_3(n^2)$ входит в O; таким образом, сразу будет видно, какую погрешность мы получим. (Нет смысла выполнять остальные вычисления с высокой точностью, если эти члены будут все равно поглощены O.) Эта сумма есть просто степенной ряд

Большим O. O-Очень большим.

$$\Sigma_3(x) = \sum_{k\geqslant 1}\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\Big)x^{-k}\,,$$

и этот ряд сходится при $x \geqslant 1$, так что мы можем оборвать его в любом желаемом месте. Если оставить от $\Sigma_3(n^2)$ только слагаемые с $k = 1$, то получим $\Sigma_3(n^2) = O(n^{-2})$; следовательно, (9.53) имеет абсолютную погрешность $O(n^{-2})$. (Чтобы уменьшить эту погрешность можно было бы использовать более точную аппроксимацию для H_{n^k}; однако сейчас нам вполне достаточно точности

$O(n^{-2})$.) Если оборвать $\Sigma_3(n)$ на слагаемом с $k = 2$, получим

$$\Sigma_3(n) = \tfrac{3}{4}n^{-1} + O(n^{-2});$$

это как раз та точность, что нам нужна.

Совсем просто вычислить Σ_2:

$$\Sigma_2 = \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Это телескопический ряд $(1 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{16}) + \cdots = 1$.

Наконец, Σ_1 дает главный член суммы S_n, коэффициент при $\ln n$ в (9.53):

$$\Sigma_1 = \sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Это есть $(1 - \frac{1}{4}) + (\frac{2}{4} - \frac{2}{9}) + (\frac{3}{9} - \frac{3}{16}) + \cdots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = H_\infty^{(2)} = \pi^2/6$. (Не примени мы раньше суммирование по частям, мы бы непосредственно увидели, что $S_n \sim \sum_{k\geqslant 1}(\ln n)/k^2$, поскольку $H_{n^k-1} - H_{n^{k-1}-1} \sim \ln n$; так что суммирование по частям не помогает в оценке главного члена, однако оно упрощает кое-что другое.)

Итак, мы оценили каждую из сумм в (9.53), и теперь можно объединить все и выписать ответ к задаче Голомба:

$$S_n = \frac{\pi^2}{6}\ln n + \gamma - \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{9.54}$$

Заметьте, что это выражение растет медленнее, чем наша исходная прикидочная оценка $C(\log n)^2$. Случается, что дискретные суммы не соответствуют интуиции, основанной на непрерывности.

Задача 6: Ф большое

В конце гл. 4 мы нашли, что число $\mathcal{F}_n$ дробей Фарея составляет $1 + \Phi(n)$, где

$$\Phi(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n);$$

в (4.62) мы показали, что

$$\Phi(n) = \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)\lfloor n/k\rfloor\lfloor 1 + n/k\rfloor. \tag{9.55}$$

Попробуем теперь оценить $\Phi(n)$, когда n велико. (Именно суммы такого вида, в первую очередь, привели Бахмана к введению символа O.)

Размышление о главном приводит нас к выводу, что $\Phi(n)$, вероятно, пропорционально n^2. Действительно, если последний множитель был бы равен $\lfloor n/k\rfloor$ вместо $\lfloor 1+n/k\rfloor$, то мы имели бы

$|\Phi(n)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\lfloor n/k\rfloor^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}(n/k)^2 = \frac{\pi^2}{12}n^2$, поскольку функция Мёбиуса $\mu(k)$ принимает значения только -1, 0 или $+1$. Слагаемое '$1+$' в последнем множителе добавляет $\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)\lfloor n/k\rfloor$; но для $k > n$ это нуль, так что сумма не может быть больше чем $nH_n = O(n\log n)$ по абсолютной величине.

Этот предварительный анализ показывает, что, вероятно, удобно будет записать

$$\begin{aligned}\Phi(n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Bigl(\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)+O(1)\Bigr)^2\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Bigl(\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)^2+O\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)\Bigr)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)^2+\sum_{k=1}^{n}O\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)^2 + O(n\log n)\,.\end{aligned}$$

Таким образом, мы убрали функцию пол; остается оценить сумму $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)n^2/k^2$ с точностью $O(n\log n)$; иными словами, мы хотим оценить $\sum_{k=1}^{n}\mu(k)1/k^2$ с точностью $O(n^{-1}\log n)$. Но это уже легко; можно просто распространить сумму на все значения k до ∞, добавляемые при этом члены составят

$$\begin{aligned}\sum_{k>n}\frac{\mu(k)}{k^2} = O\Bigl(\sum_{k>n}\frac{1}{k^2}\Bigr) &= O\Bigl(\sum_{k>n}\frac{1}{k(k-1)}\Bigr)\\ &= O\Bigl(\sum_{k>n}\Bigl(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Bigr)\Bigr) = O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\,.\end{aligned}$$

Мы доказали в (7.89), что $\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)/k^z = 1/\zeta(z)$. Следовательно, $\sum_{k\geqslant 1}\mu(k)/k^2 = 1/\bigl(\sum_{k\geqslant 1}1/k^2\bigr) = 6/\pi^2$, и мы получаем ответ:

$$\Phi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + O(n\log n)\,. \qquad (9.56)$$

(Как было показано Салтыковым в 1960 г. [266], погрешность этой формулы не превосходит $O(n(\log n)^{2/3}\times(\log\log n)^{1+\epsilon})$. *С другой стороны, она не есть* $o(n(\log\log n)^{1/2})$ *согласно Монтгомери [224].)*

9.4 ДВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИЕМА

Теперь, приобретя некоторую легкость в обращении с O, попробуем взглянуть на сделанное, имея в виду более далекую перспективу. Тогда наш арсенал асимптотических методов пополнится новыми важными боевыми средствами, которые понадобятся нам для борьбы с более трудными задачами.

Трюк 1: раскрутка

При оценке n-го простого числа P_n в задаче 3 из разд. 9.3 мы решали асимптотическое рекуррентное соотношение вида

$$P_n = n \ln P_n \bigl(1 + O(1/\log n)\bigr)\,.$$

Мы доказали, что $P_n = n \ln n + O(n)$, сначала использовав рекуррентное соотношение для получения более слабого результата $O(n^2)$. Это частный случай общего метода, называемого *раскруткой* (bootstrapping), в котором для нахождения асимптотического решения рекуррентного соотношения мы начинаем с грубой оценки и подставляем ее в рекуррентное соотношение; таким способом часто удается получать все лучшие и лучшие оценки, как бы „поднимая себя за волосы".

Следующая задача очень хорошо иллюстрирует метод раскрутки: каково асимптотическое значение коэффициента $g_n = [z^n]\,G(z)$ в производящей функции

$$G(z) = \exp\Bigl(\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^k}{k^2}\Bigr) \qquad (9.57)$$

при $n \to \infty$? Продифференцировав это выражение по z, найдем

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n z^{n-1} = \Bigl(\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{k-1}}{k}\Bigr)G(z)\,;$$

приравнивание коэффициентов при z^{n-1} в обеих частях дает рекуррентное соотношение

$$n g_n = \sum_{0\leqslant k<n}\frac{g_k}{n-k}\,. \qquad (9.58)$$

Наша задача эквивалентна нахождению асимптотической формулы для решения (9.58) с начальным условием $g_0 = 1$. Первые несколько значений

n	0	1	2	3	4	5	6
g_n	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{107}{288}$	$\frac{641}{2400}$	$\frac{51103}{259200}$

мало что дают для выявления закономерности, а целочисленная последовательность $\langle n!^2 g_n\rangle$ не встречается в справочнике Слоана [276], так что о нахождении g_n в замкнутой форме, видимо, не может быть речи, и лучшее, на что можно надеяться,— это вывод асимптотики.

Нашим первым шагом на пути решения задачи будет наблюдение, что $0 < g_n \leqslant 1$ для всех $n \geqslant 0$; это легко доказать по индукции. Итак, имеем для начала:

$$g_n = O(1)\,.$$

Это уравнение можно использовать в качестве отправной точки для раскрутки: подставляя его в правую часть (9.58), получим

$$ng_n = \sum_{0\leqslant k<n} \frac{O(1)}{n-k} = H_n O(1) = O(\log n)\,;$$

следовательно,

$$g_n = O\Bigl(\frac{\log n}{n}\Bigr) \qquad \text{для } n > 1.$$

Можно сделать еще один шаг раскрутки:

$$\begin{aligned} ng_n &= \frac{1}{n} + \sum_{0<k<n} \frac{O\bigl((1+\log k)/k\bigr)}{n-k} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{0<k<n} \frac{O(\log n)}{k(n-k)} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{0<k<n} \Bigl(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\Bigr)\frac{O(\log n)}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n}H_{n-1}O(\log n) \;=\; \frac{1}{n}O(\log n)^2\,, \end{aligned}$$

что дает

$$g_n = O\Bigl(\frac{\log n}{n}\Bigr)^2. \tag{9.59}$$

Продолжится ли это до бесконечности? Может быть, мы получим $g_n = O(n^{-1}\log n)^m$ для всех m?

На самом деле нет; мы уже достигли поворотного пункта. Попытка продолжить раскрутку приведет к сумме

$$\begin{aligned} \sum_{0<k<n} \frac{1}{k^2(n-k)} &= \sum_{0<k<n} \Bigl(\frac{1}{nk^2} + \frac{1}{n^2k} + \frac{1}{n^2(n-k)}\Bigr) \\ &= \frac{1}{n}H^{(2)}_{n-1} + \frac{2}{n^2}H_{n-1}\,, \end{aligned}$$

которая есть $\Omega(n^{-1})$; так что мы не сможем получить для g_n оценку, меньшую чем $\Omega(n^{-2})$.

В действительности, сейчас мы уже знаем о g_n достаточно для того, чтобы применить наш старый прием выделения главной части:

$$\begin{aligned} ng_n &= \sum_{0\leqslant k<n} \frac{g_k}{n} + \sum_{0\leqslant k<n} g_k\Bigl(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n}\Bigr) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k\geqslant 0} g_k - \frac{1}{n}\sum_{k\geqslant n} g_k + \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n} \frac{kg_k}{n-k}\,. \end{aligned} \tag{9.60}$$

Первая сумма здесь $G(1) = \exp(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots) = e^{\pi^2/6}$, поскольку $G(z)$ сходится для всех $|z| \leqslant 1$. Вторая сумма — это „хвост" первой; можно получить верхнюю оценку, воспользовавшись (9.59):

$$\sum_{k\geqslant n} g_k = O\Bigl(\sum_{k\geqslant n} \frac{(\log k)^2}{k^2}\Bigr) = O\Bigl(\frac{(\log n)^2}{n}\Bigr).$$

Последняя оценка справедлива потому, например, что

$$\sum_{k>n} \frac{(\log k)^2}{k^2} < \sum_{m\geqslant 1} \sum_{n^m<k\leqslant n^{m+1}} \frac{(\log n^{m+1})^2}{k(k-1)}$$
$$< \sum_{m\geqslant 1} \frac{(m+1)^2(\log n)^2}{n^m}.$$

(В упр. 54 рассматривается более общий способ оценки остатков подобных рядов.)

Третья сумма в (9.60) равна

$$O\Bigl(\sum_{0\leqslant k<n} \frac{(\log n)^2}{k(n-k)}\Bigr) = O\Bigl(\frac{(\log n)^3}{n}\Bigr);$$

это устанавливается с помощью уже знакомых аргументов. Итак, (9.60) доказывает, что

$$g_n = \frac{e^{\pi^2/6}}{n^2} + O\bigl(\log n/n\bigr)^3. \qquad (9.61)$$

Наконец, мы можем вновь подставить эту формулу в рекуррентное соотношение, выполнив еще один шаг раскрутки; в результате получим

$$g_n = \frac{e^{\pi^2/6}}{n^2} + O(\log n/n^3). \qquad (9.62)$$

(Упражнение 23 „заглядывает внутрь" оставшегося O.)

Трюк 2: смена „хвостов"

Вывод (9.62) был в чем-то такой же, как вывод асимптотического значения (9.56) для $\Phi(n)$: в обоих случаях мы начинали с конечной суммы, но к асимптотическому выражению приходили через рассмотрение бесконечной суммы. При этом нельзя было просто получить бесконечную сумму, добавив O к слагаемым; вместо этого приходилось действовать аккуратно и использовать один подход для малых k и другой — для больших.

(Этот метод был впервые применен Лапласом [184].)

Эти наши рассуждения суть частные случаи важного трехшагового асимптотического метода суммирования, который мы сейчас и обсудим с большей общностью. Если нам нужно оценить значение $\sum_k a_k(n)$, то можно попробовать следующий прием:

1 Сначала разбить весь диапазон суммирования на два непересекающихся диапазона D_n и T_n. Сумма по D_n должна быть

„подавляющей“ частью, в том смысле, что она включает достаточно членов, чтобы верно представлять наиболее значащие цифры всей суммы при больших n. Сумма по другому диапазону, T_n, должна составлять всего лишь „хвостик“, вносящий незначительный вклад в общий итог.

2 Найти асимптотическую оценку

$$a_k(n) = b_k(n) + O\big(c_k(n)\big)\,,$$

справедливую при $k \in D_n$. Не требуется, чтобы эта оценка имела место при $k \in T_n$.

3 Наконец, доказать, что каждая из трех сумм

$$\Sigma_a(n) = \sum_{k\in T_n} a_k(n)\,, \qquad \Sigma_b(n) = \sum_{k\in T_n} b_k(n)\,,$$
$$\Sigma_c(n) = \sum_{k\in D_n} \big|c_k(n)\big| \tag{9.63}$$

мала.

Если все три шага успешно завершаются, то получаем в итоге хорошую оценку:

$$\sum_{k\in D_n\cup T_n} a_k(n) = \sum_{k\in D_n\cup T_n} b_k(n) + O\big(\Sigma_a(n)\big) + O\big(\Sigma_b(n)\big) + O\big(\Sigma_c(n)\big)\,.$$

Вот как это можно обосновать. Мы можем „обрубить“ хвост у данной суммы, получив хорошую оценку в диапазоне D_n, там где это действительно нужно:

$$\sum_{k\in D_n} a_k(n) = \sum_{k\in D_n} \big(b_k(n) + O(c_k(n))\big) = \sum_{k\in D_n} b_k(n) + O\big(\Sigma_c(n)\big)\,.$$

Хвост же можно заменить другим, даже весьма плохо аппроксимирующим первый, поскольку ни один из них не играет заметной роли:

$$\sum_{k\in T_n} a_k(n) = \sum_{k\in T_n} \big(b_k(n) - b_k(n) + a_k(n)\big) = \sum_{k\in T_n} b_k(n) + O\big(\Sigma_b(n)\big) + O\big(\Sigma_a(n)\big)\,.$$

Асимптотический анализ — это искусство; искусство в том, чтобы знать, когда можно быть небрежным, а когда требуется точность.

Например, когда мы оценивали сумму в (9.60), имели

$$a_k(n) = [0 \leqslant k < n]g_k/(n-k)\,,$$
$$b_k(n) = g_k/n\,,$$
$$c_k(n) = kg_k/n(n-k)\,;$$

диапазоны суммирования были

$$D_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}, \qquad T_n = \{n, n+1, \ldots\}$$

и мы нашли, что

$$\Sigma_a(n) = 0, \quad \Sigma_b(n) = O\bigl((\log n)^2/n^2\bigr), \quad \Sigma_c(n) = O\bigl((\log n)^3/n^2\bigr).$$

Это дало (9.61).

Аналогично, оценивая $\Phi(n)$ в (9.55), мы взяли

$$a_k(n) = \mu(k)\lfloor n/k\rfloor\lfloor 1+n/k\rfloor, \quad b_k(n) = \mu(k)n^2/k^2, \quad c_k(n) = n/k;$$
$$D_n = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad T_n = \{n+1, n+2, \ldots\}.$$

Мы вывели (9.56), заметив, что $\Sigma_a(n) = 0$, $\Sigma_b(n) = O(n)$ и $\Sigma_c(n) = O(n \log n)$.

Еще пример: лошади часто размахивают хвостом в предчувствии кормежки.

Рассмотрим еще один пример, где эффективно такое „перебрасывание хвоста". (В отличие от предыдущих примеров, этот иллюстрирует рассматриваемый трюк в его максимальной общности, с $\Sigma_a(n) \neq 0$.) Мы хотим найти асимптотическое значение величины

$$L_n = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\ln(n + 2^k)}{k!}.$$

Основной вклад в эту сумму вносят малые k ввиду наличия в знаменателе $k!$. В диапазоне малых k имеем

$$\ln(n + 2^k) = \ln n + \frac{2^k}{n} - \frac{2^{2k}}{2n^2} + O\left(\frac{2^{3k}}{n^3}\right). \qquad (9.64)$$

Мы можем доказать эту оценку для $0 \leqslant k < \lfloor \lg n \rfloor$, поскольку члены, включенные в O, ограничены сходящимся рядом

$$\sum_{m \geqslant 3} \frac{2^{km}}{mn^m} \leqslant \frac{2^{3k}}{n^3} \sum_{m \geqslant 3} \frac{2^{k(m-3)}}{n^{m-3}} \leqslant \frac{2^{3k}}{n^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{2^{3k}}{n^3} \cdot 2.$$

(В рассматриваемом диапазоне $2^k/n \leqslant 2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}/n \leqslant \frac{1}{2}$.)

Следовательно, мы можем применить описанный трехшаговый метод, положив

$$a_k(n) = \ln(n + 2^k)/k!,$$
$$b_k(n) = (\ln n + 2^k/n - 4^k/2n^2)/k!,$$
$$c_k(n) = 8^k/n^3 k!;$$
$$D_n = \{0, 1, \ldots, \lfloor \lg n \rfloor - 1\},$$
$$T_n = \{\lfloor \lg n \rfloor, \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ldots\}.$$

Все, что остается сделать,— это найти хорошие оценки для трех величин Σ в (9.63), и мы установим, что $\sum_{k \geqslant 0} a_k(n) \approx \sum_{k \geqslant 0} b_k(n)$.

Погрешность, допущенная в главной части суммы, $\Sigma_c(n) = \sum_{k \in D_n} 8^k/n^3 k!$, очевидным образом ограничена суммой

$\sum_{k\geqslant 0} 8^k/n^3k! = e^8/n^3$, так что ее можно записать как $O(n^{-3})$. Погрешность, вносимая новым хвостом, составляет

$$\begin{aligned} |\Sigma_b(n)| &= \Bigl|\sum_{k\geqslant\lfloor \lg n\rfloor} b_k(n)\Bigr| \\ &< \sum_{k\geqslant\lfloor \lg n\rfloor} \frac{\ln n + 2^k + 4^k}{k!} \\ &< \frac{\ln n + 2^{\lfloor \lg n\rfloor} + 4^{\lfloor \lg n\rfloor}}{\lfloor \lg n\rfloor!} \sum_{k\geqslant 0} \frac{4^k}{k!} = O\Bigl(\frac{n^2}{\lfloor \lg n\rfloor!}\Bigr). \end{aligned}$$

Поскольку $\lfloor \lg n\rfloor!$ растет быстрее любой степени n, эта маленькая погрешность поглощается слагаемым $\Sigma_c(n) = O(n^{-3})$. Хвост исходного ряда,

„... для маленькой такой компании...“

$$\Sigma_a(n) = \sum_{k\geqslant\lfloor \lg n\rfloor} a_k(n) < \sum_{k\geqslant\lfloor \lg n\rfloor} \frac{k+\ln n}{k!},$$

еще меньше.

И наконец, можно легко вычислить сумму $\sum_{k\geqslant 0} b_k(n)$ в замкнутом виде, и мы получаем желаемую асимптотическую формулу:

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} = e\ln n + \frac{e^2}{n} - \frac{e^4}{2n^2} + O\Bigl(\frac{1}{n^3}\Bigr). \qquad (9.65)$$

Из использованного метода совершенно ясно, что, на самом деле,

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} = e\ln n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \frac{e^{2^k}}{kn^k} + O\Bigl(\frac{1}{n^m}\Bigr) \qquad (9.66)$$

для любого фиксированного $m > 0$. (Это начальный отрезок ряда, который расходится для любого фиксированного n, если устремить m к ∞.)

В нашем решении есть только один недостаток: мы были чересчур осторожными. Мы вывели (9.64) в предположении $k < \lfloor \lg n\rfloor$, тогда как в упр. 53 показывается, что эта оценка в действительности справедлива для всех значений k. Знай мы этот более сильный результат, нам не пришлось бы использовать трюк с двумя хвостами; мы могли бы сразу прийти к окончательному результату! Однако позднее нам встретится задача, где смена хвостов является единственным разумным приемом.

9.5 ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА

А теперь, в качестве следующего трюка — и это, на самом деле, последний важный прием в этой книге,— мы обратимся к общему методу аппроксимации сумм, который был впервые опу-

бликован Леонардом Эйлером [365] в 1732 г. (Идею метода иногда связывают с именем Колина Мак-Лорена, профессора математики в Эдинбурге, открывшего этот метод независимо чуть позднее [211, с. 305].)

Вот основная формула:

$$\sum_{a\leqslant k<b} f(k) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\bigg|_a^b + R_m\,, \qquad (9.67)$$

$$\text{где } R_m = (-1)^{m+1}\int_a^b \frac{B_m\bigl(\{x\}\bigr)}{m!}\, f^{(m)}(x)\,dx\,,$$

$$\text{целые } a \leqslant b;\ \text{целое } m \geqslant 1. \qquad (9.68)$$

Слева находится типичная сумма, оценка которой нам может понадобиться. В правой части — другое выражение для той же суммы, включающее интегралы и производные. Если $f(x)$ — достаточно „гладкая“ функция, то она будет иметь m производных $f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)$ и эта формула окажется тождеством. Выражение в правой части зачастую оказывается превосходной аппроксимацией суммы в левой части, в том смысле, что остаток R_m мал. Так, например, мы увидим, что аппроксимация Стирлинга для $n!$ есть следствие формулы суммирования Эйлера; то же самое справедливо для нашей асимптотической аппроксимации для гармонических чисел H_n.

Числа B_k в (9.67) — это числа Бернулли, встречавшиеся нам в гл. 6; функция $B_m\bigl(\{x\}\bigr)$ — многочлен Бернулли из гл. 7. Запись $\{x\}$ обозначает дробную часть, $x - \lfloor x \rfloor$, как в гл. 3. Формула суммирования Эйлера сводит все эти понятия вместе.

Вспомним значения нескольких первых чисел Бернулли; всегда удобно иметь этот список неподалеку от общей формулы Эйлера:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\tfrac{1}{2},\ B_2 = \tfrac{1}{6},\ B_4 = -\tfrac{1}{30},\ B_6 = \tfrac{1}{42},\ B_8 = -\tfrac{1}{30};$$
$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = \cdots = 0\,.$$

Якоб Бернулли открыл эти числа, когда он изучал суммы степеней целых чисел, и формула Эйлера говорит нам, почему так произошло: если мы положим $f(x) = x^{m-1}$, то будем иметь $f^{(m)}(x) = 0$; следовательно, $R_m = 0$ и (9.67) сведется к

$$\sum_{a\leqslant k<b} k^{m-1} = \frac{x^m}{m}\bigg|_a^b + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}\,(m-1)^{\underline{k-1}}\,x^{m-k}\bigg|_a^b$$
$$= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} B_k \cdot \bigl(b^{m-k} - a^{m-k}\bigr)\,.$$

Так, для $m = 3$ получим наш любимый пример подсчета суммы:

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^2 = \frac{1}{3}\left(\binom{3}{0}B_0n^3 + \binom{3}{1}B_1n^2 + \binom{3}{2}B_2n\right)$$
$$= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

(Это — последнее место в книге, где мы выводим эту замечательную формулу.)

Все хорошее когда-нибудь кончается.

Прежде чем доказывать формулу Эйлера, рассмотрим соображения высшего порядка (принадлежащие Лагранжу [177]) о том, почему такая формула должна иметь место. В гл. 2 был определен разностный оператор Δ и объяснено, что оператор $\sum$ — обратный к Δ, точно так же, как $\int$ является обратным к оператору дифференцирования D. Можно выразить Δ через D, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$f(x+\epsilon) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\epsilon + \frac{f''(x)}{2!}\epsilon^2 + \cdots .$$

Подстановка $\epsilon = 1$ дает

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+1) - f(x)\\ &= f'(x)/1! + f''(x)/2! + f'''(x)/3! + \cdots\\ &= (D/1! + D^2/2! + D^3/3! + \cdots)\,f(x) = (e^D - 1)\,f(x). \quad (9.69)\end{aligned}$$

Здесь e^D обозначает дифференциальный оператор $1 + D/1! + D^2/2! + D^3/3! + \cdots$. Поскольку $\Delta = e^D - 1$, обратный оператор $\Sigma = 1/\Delta$ должен выражаться как $1/(e^D - 1)$; а мы знаем из табл. 386, что $z/(e^z - 1) = \sum_{k\geqslant 0} B_k z^k/k!$ — степенной ряд, включающий числа Бернулли. Таким образом,

$$\sum = \frac{B_0}{D} + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!}D + \frac{B_3}{3!}D^2 + \cdots = \int + \sum_{k\geqslant 1}\frac{B_k}{k!}D^{k-1}. \qquad (9.70)$$

Применив это операторное уравнение к $f(x)$ и добавив пределы, получим

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\,\delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k\geqslant 1}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\bigg|_a^b, \qquad (9.71)$$

а это — в точности формула суммирования Эйлера (9.67) без остаточного члена. (Ни Эйлер и никто другой не рассматривали остаток до тех пор, пока С. Д. Пуассон [248] не опубликовал в 1823 г. важную работу о приближенном интегрировании. Остаточный член играет важную роль, поскольку бесконечная сумма $\sum_{k\geqslant 1}(B_k/k!)f^{(k-1)}(x)\big|_a^b$ часто оказывается расходящейся. Наш

вывод (9.71) был чисто формальным, мы не касались вопросов сходимости.)

Теперь докажем формулу (9.67), включающую остаточный член. Достаточно провести доказательство только для случая $a = 0$, $b = 1$, т. е. доказать, что

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 - (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\,dx\,,$$

поскольку затем можно заменить $f(x)$ на $f(x+l)$ для любого целого l, получив

$$f(l) = \int_l^{l+1} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_l^{l+1} - (-1)^m \int_l^{l+1} \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx\,.$$

Общая формула (9.67) есть просто сумма этих тождеств по диапазону $a \leqslant l < b$, поскольку промежуточные члены благополучно сокращаются.

Доказательство в случае $a = 0$ и $b = 1$ будем вести индукцией по m, начиная с $m = 1$:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\bigl(f(1) - f(0)\bigr) + \int_0^1 (x - \tfrac{1}{2}) f'(x)\,dx\,.$$

(В общем случае многочлен Бернулли определяется уравнением

$$B_m(x) = \binom{m}{0} B_0 x^m + \binom{m}{1} B_1 x^{m-1} + \cdots + \binom{m}{m} B_m x^0\,, \qquad (9.72)$$

в частности, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.) Иными словами, мы хотели бы доказать, что

$$\frac{f(0) + f(1)}{2} = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 (x - \tfrac{1}{2}) f'(x)\,dx\,.$$

Но это есть просто частный случай формулы интегрирования по частям

$$u(x)v(x)\Big|_0^1 = \int_0^1 u(x)\,dv(x) \; + \int_0^1 v(x)\,du(x) \qquad (9.73)$$

для $u(x) = f(x)$ и $v(x) = x - \frac{1}{2}$. Итак, случай $m = 1$ оказался несложным.

Чтобы перейти от $m-1$ к m и тем завершить индукцию для $m>1$, нам достаточно доказать, что $R_{m-1} = (B_m/m!)f^{(m-1)}(x)\big|_0^1 + R_m$, т. е. установить справедливость равенства

$$(-1)^m \int_0^1 \frac{B_{m-1}(x)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x)\,dx = \frac{B_m}{m!} f^{(m-1)}(x)\bigg|_0^1 - (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\,dx\,.$$

Оно приводится к уравнению

$$(-1)^m B_m f^{(m-1)}(x)\bigg|_0^1 = m\int_0^1 B_{m-1}(x) f^{(m-1)}(x)\,dx + \int_0^1 B_m(x) f^{(m)}(x)\,dx\,.$$

И снова к этим двум интегралам применимо соотношение (9.73) с $u(x) = f^{(m-1)}(x)$ и $v(x) = B_m(x)$, поскольку производная многочлена Бернулли (9.72) есть

Неужели авторы никогда не перейдут на серьезный лад?

$$\frac{d}{dx}\sum_k \binom{m}{k} B_k x^{m-k} = \sum_k \binom{m}{k}(m-k)B_k x^{m-k-1} = m\sum_k \binom{m-1}{k} B_k x^{m-1-k} = mB_{m-1}(x). \quad (9.74)$$

(Здесь полезно тождество поглощения (5.7).) Таким образом, требуемая формула будет иметь место в том и только в том случае, когда

$$(-1)^m B_m f^{(m-1)}(x)\big|_0^1 = B_m(x) f^{(m-1)}(x)\big|_0^1\,.$$

Иначе говоря, нам требуется, чтобы

$$(-1)^m B_m = B_m(1) = B_m(0) \qquad \text{для } m>1. \quad (9.75)$$

Это может слегка смутить, ясно ведь, что $B_m(0)$ равно B_m, а не $(-1)^m B_m$. Но на самом деле здесь все в порядке, поскольку $m>1$; как мы знаем, B_m есть нуль для нечетных m. (Тем не менее, мы чуть было не влипли.)

Для завершения доказательства формулы суммирования Эйлера осталось показать, что $B_m(1) = B_m(0)$, что эквивалентно

$$\sum_k \binom{m}{k} B_k = B_m \qquad \text{для } m>1.$$

Но это есть в точности определение чисел Бернулли (6.79), так что доказательство завершено.

Тождество $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$ означает, что

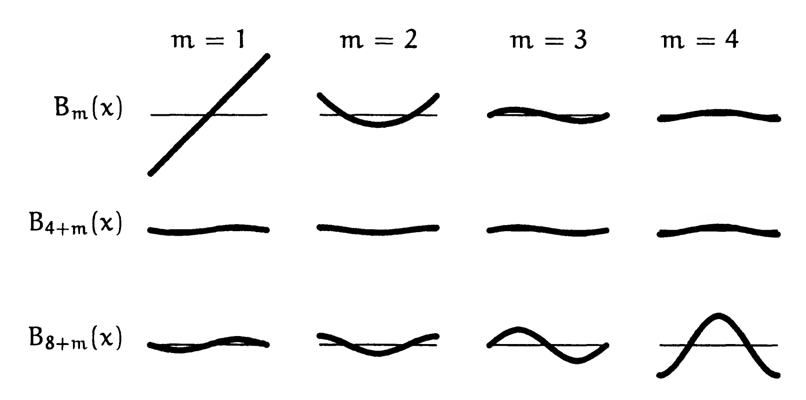
$$\int_0^1 B_m(x)\,dx = \frac{B_{m+1}(1) - B_{m+1}(0)}{m+1},$$

а теперь мы заключаем, что этот интеграл равен нулю для $m \geqslant 1$. Следовательно, в остаточном члене формулы Эйлера

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_a^b B_m(\{x\})\, f^{(m)}(x)\,dx$$

множителем при $f^{(m)}(x)$ стоит функция $B_m(\{x\})$ с нулевым средним значением. Это означает, что R_m может оказаться довольно малым.

Посмотрим внимательнее на функции $B_m(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, ведь $B_m(x)$ управляет величиной R_m. Здесь приведены графики $B_m(x)$ для первых двенадцати значений m:



Хотя многочлены от $B_3(x)$ до $B_9(x)$ достаточно малы, в конечном итоге многочлены и числа Бернулли сильно растут. К счастью, R_m содержит компенсирующий множитель $1/m!$, помогающий усмирить стихию.

Когда $m \geqslant 3$, график $B_m(x)$ становиться очень похож на волну синуса; в упр. 58 доказывается, что и на самом деле функция $B_m(x)$ может быть аппроксимирована отрицательным кратным $\cos(2\pi x - \frac{1}{2}\pi m)$ с относительной погрешностью $1/2^m$.

В общем случае, функция $B_{4k+1}(x)$ отрицательна для $0 < x < \frac{1}{2}$ и положительна для $\frac{1}{2} < x < 1$. Следовательно, ее интеграл $B_{4k+2}(x)/(4k+2)$ убывает при $0 < x < \frac{1}{2}$ и возрастает при $\frac{1}{2} < x < 1$. Более того, имеет место равенство

$$B_{4k+1}(1-x) = -B_{4k+1}(x) \qquad \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

откуда следует

$$B_{4k+2}(1-x) = B_{4k+2}(x) \qquad \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Постоянное слагаемое B_{4k+2} обеспечивает нулевое значение интеграла $\int_0^1 B_{4k+2}(x)\,dx$, следовательно, $B_{4k+2} > 0$. Интегралом от $B_{4k+2}(x)$ будет функция $B_{4k+3}(x)/(4k+3)$, которая, следовательно, положительна для $0 < x < \frac{1}{2}$ и отрицательна для $\frac{1}{2} < x < 1$; кроме того, $B_{4k+3}(1-x) = -B_{4k+3}(x)$, так что $B_{4k+3}(x)$ обладает всеми свойствами, постулированными для $B_{4k+1}(x)$, но с противоположным знаком. Следовательно, $B_{4k+4}(x)$ имеет свойства функции $B_{4k+2}(x)$ с противоположным знаком. Следовательно, $B_{4k+5}(x)$ имеет свойства функции $B_{4k+1}(x)$ и мы завершили цикл, устанавливающий индуктивно сформулированные свойства для всех k.

В соответствии с результатами нашего анализа, максимальное значение $B_{2m}(x)$ должно достигаться либо при $x = 0$, либо при $x = \frac{1}{2}$. В упр. 17 доказывается, что

$$B_{2m}(\tfrac{1}{2}) = (2^{1-2m} - 1)B_{2m}\,; \tag{9.76}$$

поэтому имеем

$$\left|B_{2m}(\{x\})\right| \leqslant |B_{2m}|\,. \tag{9.77}$$

Отсюда получается полезная верхняя оценка остаточного члена в формуле суммирования Эйлера, поскольку, как мы знаем из (6.89),

$$\frac{|B_{2m}|}{(2m)!} = \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^{2m}} = O\big((2\pi)^{-2m}\big) \qquad \text{при } m > 0.$$

Следовательно, формулу суммирования Эйлера (9.67) можно переписать так:

$$\sum_{a\leqslant k<b} f(k) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(x)\Big|_a^b + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)\Big|_a^b + O\big((2\pi)^{-2m}\big)\int_a^b \big|f^{(2m)}(x)\big|\,dx\,. \tag{9.78}$$

Если, например, $f(x) = e^x$, то все производные совпадают, и последняя формула говорит нам, что $\sum_{a\leqslant k<b} e^k = (e^b - e^a) \times \big(1 - \frac{1}{2} + B_2/2! + B_4/4! + \cdots + B_{2m}/(2m)!\big) + O\big((2\pi)^{-2m}\big)$. Разумеется, эта сумма есть сумма геометрической прогрессии, равная $(e^b - e^a)/(e-1) = (e^b - e^a)\sum_{k\geqslant 0} B_k/k!$.

Если $f^{(2m)}(x) \geqslant 0$ для $a \leqslant x \leqslant b$, то интеграл $\int_a^b |f^{(2m)}(x)|\,dx$ есть просто $f^{(2m-1)}(x)\big|_a^b$, поэтому

$$|R_{2m}| \leqslant \left| \frac{B_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(x)\Big|_a^b \right|;$$

иначе говоря, в этом случае остаточный член ограничен величиной *последнего члена* (члена непосредственно перед остаточным). Можно дать даже лучшую оценку, если известно, что

$$f^{(2m+2)}(x) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f^{(2m+4)}(x) \geqslant 0 \quad \text{для } a \leqslant x \leqslant b. \tag{9.79}$$

Оказывается, что отсюда вытекает соотношение

$$R_{2m} = \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(x)\Big|_a^b \quad \text{для некоторых } 0 < \theta_m < 1; \tag{9.80}$$

здесь остаточный член лежит между 0 и *первым отброшенным членом* в (9.78) — т. е. членом, который мы добавили бы вслед за последним членом в случае увеличения m.

Вот доказательство. Формула суммирования Эйлера справедлива для всех m, и $B_{2m+1} = 0$ для $m > 0$; следовательно, $R_{2m} = R_{2m+1}$ и первый отброшенный член равен

$$R_{2m} - R_{2m+2}\,.$$

Поэтому нам надо доказать, что R_{2m} лежит между 0 и $R_{2m} - R_{2m+2}$; а это имеет место тогда и только тогда, когда R_{2m} и R_{2m+2} имеют противоположные знаки. Мы утверждаем, что

$$f^{(2m+2)}(x) \geqslant 0 \text{ для } a \leqslant x \leqslant b \text{ влечет } (-1)^m R_{2m} \geqslant 0\,. \tag{9.81}$$

С учетом (9.79) это доказывает, что R_{2m} и R_{2m+2} имеют противоположные знаки, поэтому доказательство (9.80) на этом завершается.

Доказательство (9.81) оказывается нетрудным, если вспомнить определение R_{2m+1} и доказанные нами факты о графике $B_{2m+1}(x)$. Действительно, имеем

$$R_{2m} = R_{2m+1} = \int_a^b \frac{B_{2m+1}\big(\{x\}\big)}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(x)\,dx,$$

причем $f^{(2m+1)}(x)$ возрастает ввиду положительности производной $f^{(2m+2)}(x)$. (Более точно, $f^{(2m+1)}(x)$ не убывает ввиду неотрицательности ее производной.) График $B_{2m+1}\big(\{x\}\big)$ выглядит как синусоида, умноженная на $(-1)^{m+1}$, поэтому из геометрических соображений ясно, что вторая половина каждой волны синусоиды, будучи умноженной на возрастающую функцию, оказывает большее влияние на интеграл. Это обеспечивает $(-1)^m R_{2m+1} \geqslant 0$, что нам и нужно. Формально этот результат доказывается в упр. 16.

9.6 ЗАВЕРШАЮЩЕЕ СУММИРОВАНИЕ

Под конец этой книги настало время просуммировать все и подвести итоги. Мы рассмотрим несколько интересных и важных примеров и применим к ним формулу Эйлера.

Сумма 1: слишком простая

Сначала рассмотрим, хотя и интересный, но *не важный* пример, а именно сумму, которую мы уже умеем вычислять. Посмотрим, что скажет нам формула Эйлера, если применить ее к „телескопической" сумме

$$S_n = \sum_{1\leqslant k<n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{1\leqslant k<n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Не помешает, наверное, предварить серьезные приложения формулы Эйлера анализом асимптотического аналога матрешки.

Для начала можно разложить функцию $f(x) = 1/x(x+1)$ на простейшие дроби,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

так как это упрощает интегрирование и дифференцирование. Имеем $f'(x) = -1/x^2 + 1/(x+1)^2$ и $f''(x) = 2/x^3 - 2/(x+1)^3$; в общем случае

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\left(\frac{1}{x^{k+1}} - \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right) \qquad \text{для } k \geqslant 0.$$

Далее,

$$\int_1^n f(x)\,dx = \ln x - \ln(x+1)\,\Big|_1^n = \ln\frac{2n}{n+1}.$$

Подставляя эти выражения в формулу суммирования (9.67), получаем

$$S_n = \ln\frac{2n}{n+1} - \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{B_k}{k}\left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k} - 1 + \frac{1}{2^k}\right) + R_m(n),$$

где $R_m(n) = -\int_1^n B_m(\{x\})\left(\frac{1}{x^{m+1}} - \frac{1}{(x+1)^{m+1}}\right)dx.$

Например, для $m = 4$ правая часть равна

$$\ln\frac{2n}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3}{4}\right)$$
$$+ \frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4} - \frac{15}{16}\right) + R_4(n).$$

Что-то тут не так; это определенно не похоже на правильный ответ $1 - n^{-1}$. Но все же пойдем дальше и посмотрим, что мы получили. Мы знаем, как расписать слагаемые правой части через

отрицательные степени n до, скажем, $O(n^{-5})$:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{n}{n+1} &= -n^{-1}+\tfrac12 n^{-2}-\tfrac13 n^{-3}+\tfrac14 n^{-4}+O(n^{-5})\,,\\
\frac{1}{n+1} &= n^{-1}-n^{-2}+n^{-3}-n^{-4}+O(n^{-5})\,,\\
\frac{1}{(n+1)^2} &= \phantom{-n^{-1}+\tfrac12}n^{-2}-2n^{-3}+3n^{-4}+O(n^{-5})\,,\\
\frac{1}{(n+1)^4} &= \phantom{-n^{-1}+\tfrac12 n^{-2}-2n^{-3}+3}n^{-4}+O(n^{-5})\,.
\end{aligned}$$

Следовательно, сумма членов в правой части аппроксимации дает

$$\begin{aligned}
&\ln 2+\tfrac14+\tfrac1{16}-\tfrac1{128}+\left(-1-\tfrac12+\tfrac12\right)n^{-1}+\left(\tfrac12-\tfrac12-\tfrac1{12}+\tfrac1{12}\right)n^{-2}\\
&\qquad+\left(-\tfrac13+\tfrac12-\tfrac2{12}\right)n^{-3}+\left(\tfrac14-\tfrac12+\tfrac3{12}+\tfrac1{120}-\tfrac1{120}\right)n^{-4}+R_4(n)\\
&=\ln 2+\tfrac{39}{128}-n^{-1}+R_4(n)+O(n^{-5})\,.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при n^{-2}, n^{-3} и n^{-4} благополучно сократились, как им и положено.

Если с этим миром все в порядке, то мы должны бы суметь доказать, что $R_4(n)$ асимптотически мало, может быть, $O(n^{-5})$, и в результате мы получим аппроксимацию нашей суммы. Но доказать это, по всей видимости, невозможно, поскольку, как мы знаем, постоянное слагаемое равно 1, а не $\ln 2+\frac{39}{128}$ (что есть примерно 0.9978). Таким образом, $R_4(n)$ в действительности равно $\frac{89}{128}-\ln 2+O(n^{-4})$, но формула суммирования Эйлера ничего не говорит нам об этом.

Иными словами, мы потерпели неудачу.

Попытаемся исправить положение. Заметим, что постоянное слагаемое в аппроксимации, по мере роста m, следует схеме:

$$\ln 2-\tfrac12 B_1+\tfrac12\cdot\tfrac34 B_2-\tfrac13\cdot\tfrac78 B_3+\tfrac14\cdot\tfrac{15}{16}B_4-\tfrac15\cdot\tfrac{31}{32}B_5+\cdots\,.$$

Может быть, мы покажем, что этот ряд сходится к 1, когда число слагаемых становится бесконечным? Но нет; числа Бернулли возрастают очень быстро. Например, $B_{22}=\frac{854513}{138}>6192$; следовательно, $|R_{22}(n)|$ будет гораздо больше, чем $|R_4(n)|$. Мы окончательно зашли в тупик.

Тем не менее, путь к спасению существует, и этот обходной путь, оказывается, очень полезен и в других приложениях формулы Эйлера. Ключевой момент здесь — заметить, что $R_4(n)$ стремится к некоторому пределу при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}R_4(n)=-\int_1^\infty B_4(\{x\})\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{(x+1)^5}\right)dx=R_4(\infty)\,.$$

Интеграл $\int_1^\infty B_4(\{x\})f^{(m)}(x)\,dx$ будет существовать, если $f^{(m)}(x) = O(x^{-2})$ при $x \to \infty$, и это несомненно так для $f^{(4)}(x)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} R_4(n) &= R_4(\infty) + \int_n^\infty B_4(\{x\})\Big(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\Big)\,dx \\ &= R_4(\infty) + O\Big(\int_n^\infty x^{-6}\,dx\Big) = R_4(\infty) + O(n^{-5}). \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, с помощью формулы Эйлера, что

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant k<n} \frac{1}{k(k+1)} &= \ln 2 + \tfrac{39}{128} - n^{-1} + R_4(\infty) + O(n^{-5}) \\ &= C - n^{-1} + O(n^{-5}) \end{aligned}$$

для некоторой константы C. Мы не знаем, что это за константа — для ее нахождения нужны другие методы,— однако формула суммирования Эйлера позволила нам установить, что константа существует.

Допустим, мы выбрали значительно большее значение m. Тогда те же рассуждения покажут, что

$$R_m(n) = R_m(\infty) + O(n^{-m-1}),$$

и мы приходим к формуле

$$\sum_{1\leqslant k<n} \frac{1}{k(k+1)} = C - n^{-1} + c_2 n^{-2} + c_3 n^{-3} + \cdots + c_m n^{-m} + O(n^{-m-1})$$

для каких-то констант c_2, c_3, $\ldots$. Мы знаем, что в нашем случае все константы c оказываются нулевыми; тем не менее, докажем это, хотя бы для того, чтобы восстановить репутацию (если не свою, то формулы Эйлера). Член $\ln\frac{n}{n+1}$ вносит в c_m слагаемое $(-1)^m/m$; вклад члена $(-1)^{m+1}(B_m/m)n^{-m}$ в c_m составляет $(-1)^{m+1}B_m/m$; а вклад члена $(-1)^k(B_k/k)(n+1)^{-k}$ равен $(-1)^m\binom{m-1}{k-1}B_k/k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (-1)^m c_m &= \frac{1}{m} - \frac{B_m}{m} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\frac{B_k}{k} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{B_m}{m} + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_k \\ &= \frac{1}{m}\big(1 - B_m + B_m(1) - 1\big). \end{aligned}$$

Совершенно ясно, что это нуль для $m > 1$. Мы доказали, что

$$\sum_{1\leqslant k<n} \frac{1}{k(k+1)} = C - n^{-1} + O(n^{-m-1}) \quad \text{для всех } m \geqslant 1. \quad (9.82)$$

Формулы (9.82) недостаточно, чтобы доказать, что сумма точно равна $C-n^{-1}$; она может равняться $C-n^{-1}+2^{-n}$ или чему-либо в этом роде. Но формула суммирования Эйлера все же дала нам точность $O(n^{-m-1})$ для произвольно большого m, даже несмотря на то что мы не оценивали явно ни одного остаточного члена.

Снова сумма 1: выводы и обобщения

Прежде чем разделаться с нашим тренировочным примером, попробуем вновь взглянуть на сделанное в более широком аспекте. Мы начинали с суммы

$$S_n = \sum_{1\leqslant k<n} f(k)$$

и, воспользовавшись формулой суммирования Эйлера, получили

$$S_n = F(n) - F(1) + \sum_{k=1}^{m}\bigl(T_k(n) - T_k(1)\bigr) + R_m(n)\,, \qquad (9.83)$$

где $F(x)$ есть $\int f(x)\,dx$, а $T_k(x)$ — определенное выражение, включающее B_k и $f^{(k-1)}(x)$. Мы заметили также, что существует константа c, такая, что

$$f^{(m)}(x)=O(x^{c-m}) \quad \text{при } x\to\infty \text{ для всех достаточно больших } m.$$

(А именно, у нас было $f(k) = 1/k(k+1)$; $F(x) = \ln\bigl(x/(x+1)\bigr)$; $c=-2$ и $T_k(x) = (-1)^{k+1}(B_k/k)\bigl(x^{-k}-(x+1)^{-k}\bigr)$.) Это означает, что для всех достаточно больших m остаточные члены имеют маленький хвост,

$$\begin{aligned} R'_m(n) &= R_m(\infty) - R_m(n) \\ &= (-1)^{m+1}\int_n^{\infty}\frac{B_m\bigl(\{x\}\bigr)}{m!}f^{(m)}(x)\,dx = O(n^{c+1-m})\,. \qquad (9.84)\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем заключить, что существует константа C, такая, что

$$S_n = F(n) + C + \sum_{k=1}^{m} T_k(n) - R'_m(n)\,. \qquad (9.85)$$

(Заметьте, что C счастливым образом вобрала в себя неприятные члены $T_k(1)$.)

Мы можем сэкономить усилия в будущих задачах, сразу утверждая существование константы C в тех случаях, когда $R_m(\infty)$ существует.

Предположим теперь, что $f^{(2m+2)}(x)\geqslant 0$ и $f^{(2m+4)}(x)\geqslant 0$ для $1\leqslant x\leqslant n$. Мы доказали, что отсюда следует простая оценка (9.80) остаточного члена:

$$R_{2m}(n) = \theta_{m,n}\bigl(T_{2m+2}(n) - T_{2m+2}(1)\bigr)\,,$$

где $\theta_{m,n}$ лежит между 0 и 1. Но на самом деле нас не интересует оценка, содержащая $R_{2m}(n)$ и $T_{2m+2}(1)$; мы, в конце концов, избавились от $T_k(1)$ путем введения константы C. Что нам действительно нужно, так это оценка вида

$$-R'_{2m}(n) = \phi_{m,n} T_{2m+2}(n)$$

при $0 < \phi_{m,n} < 1$; она позволила бы вывести из (9.85) соотношение

$$S_n = F(n) + C + T_1(n) + \sum_{k=1}^{m} T_{2k}(n) + \phi_{m,n} T_{2m+2}(n)\,, \qquad (9.86)$$

и здесь остаточный член будет действительно лежать между 0 и первым отброшенным членом.

Незначительная модификация наших предыдущих рассуждений полностью исправляет положение. Допустим, что

$$f^{(2m+2)}(x) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f^{(2m+4)}(x) \geqslant 0 \qquad \text{при } x \to \infty. \qquad (9.87)$$

Правая часть (9.85), если рассматривать только остаточные члены, имеет точно такой же вид, как формула суммирования Эйлера (9.67) для $a = n$ и $b = \infty$, взятая с обратным знаком, и последующие остаточные члены получаются индукцией по m. Следовательно, в этом случае можно применить наши предыдущие рассуждения.

Сумма 2: гармония гармонических чисел

Теперь, научившись столь многому на тривиальном (но надежном) примере, мы легко справимся с нетривиальным. Используем формулу суммирования Эйлера для вывода аппроксимации чисел H_n, уже объявленной ранее.

В этом случае $f(x) = 1/x$. Вычисляя сумму 1, мы уже изучили интеграл и производные f; как и ранее, $f^{(m)}(x) = O(x^{-m-1})$ при $x \to \infty$. Поэтому можно сразу же использовать формулу (9.85):

$$\sum_{1 \leqslant k < n} \frac{1}{k} = \ln n + C + B_1 n^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - R'_{2m}(n)$$

для некоторой константы C. Сумма слева есть H_{n-1}, а не H_n; однако оказывается удобнее работать с H_{n-1} и позднее добавить $1/n$, чем возиться с $(n+1)$ в правой части. Тогда $B_1 n^{-1}$ перейдет в $(B_1 + 1)n^{-1} = 1/(2n)$. Обозначим константу буквой γ вместо C, поскольку константа Эйлера γ определяется ровно как $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)$.

С помощью развитой только что теории можно хорошо оценить остаточный член, поскольку $f^{(2m)}(x) = (2m)!/x^{2m+1} \geqslant 0$ для всех $x > 0$. Следовательно, из (9.86) получаем

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - \theta_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)n^{2m+2}}\,, \quad (9.88)$$

где $\theta_{m,n}$ — некоторая дробь между 0 и 1. Первые члены этой общей формулы приведены в табл. 491. Например, для $m = 2$ будем иметь

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{\theta_{2,n}}{252n^6}. \qquad (9.89)$$

Это уравнение, оказывается, дает неплохое приближение к γ уже при $n = 2$:

$$\gamma = H_2 - \ln 2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{48} - \tfrac{1}{1920} + \epsilon = 0.577165\ldots + \epsilon,$$

где ϵ лежит между 0 и $\frac{1}{16128}$. Если взять $n = 10^4$ и $m = 250$, то можно вычислить значение γ с 1271 верной десятичной цифрой, начинающееся так:

$$\gamma = 0.57721\,56649\,01532\,86060\,65120\,90082\,40243\ldots. \qquad (9.90)$$

Однако константа Эйлера встречается и в других формулах, что позволяет вычислять ее еще эффективнее [290].

Сумма 3: аппроксимация Стирлинга

Если $f(x) = \ln x$, то $f'(x) = 1/x$, и мы можем оценить сумму логарифмов, используя практически те же вычисления, что и для суммы обратных величин. Формула суммирования Эйлера дает

$$\sum_{1\leqslant k<n} \ln k = n\ln n - n + \sigma - \frac{\ln n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}} + \varphi_{m,n}\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)n^{2m+1}},$$

где σ есть определенная константа, „константа Стирлинга“, и $0 < \varphi_{m,n} < 1$. (В данном случае $f^{(2m)}(x)$ не положительна, а отрицательна; но мы можем по-прежнему утверждать, что остаточный член подчинен первому отброшенному, поскольку мы могли бы начать с функции $f(x) = -\ln x$ вместо $f(x) = \ln x$.) Добавление к обеим частям $\ln n$ приводит при $m = 2$ к соотношению

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \sigma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{\varphi_{2,n}}{1260n^5}. \qquad (9.91)$$

Аппроксимацию из табл. 491 можно теперь получить, взяв 'exp' от обеих частей. (Значение e^σ оказывается равным $\sqrt{2\pi}$, но доказательство этого мы пока отложим. В действительности сам Стирлинг не знал точного значения константы еще несколько лет после того, как де Муавр [99] доказал ее существование.)

Если m фиксировано, а n стремится к ∞, то общая формула дает все лучшие и лучшие аппроксимации для $\ln n!$ в смысле абсолютной погрешности, следовательно, эти приближения являются все улучшающимися приближениями $n!$ в смысле погрешности относительной. Но если n фиксировано, а m возрастает, то оценка погрешности $|B_{2m+2}|/(2m+2)(2m+1)n^{2m+1}$ убывает лишь до некоторого предела, а затем начинает расти. Таким образом, у этой

аппроксимации имеется некоторый порог точности, переступить который мешает что-то вроде принципа неопределенности.

Здесь не проходил ли Гейзенберг?

В соотношении (5.83) из гл. 5 мы обобщили факториалы на произвольные вещественные числа α с помощью определения, предложенного Эйлером:

$$\frac{1}{\alpha!} = \lim_{n\to\infty} \binom{n+\alpha}{n} n^{-\alpha}.$$

Пусть α — большое число; тогда

$$\ln \alpha! = \lim_{n\to\infty} \Bigl(\alpha \ln n + \ln n! - \sum_{k=1}^{n} \ln(\alpha+k)\Bigr)$$

и для оценки этой суммы можно использовать формулу суммирования Эйлера с $f(x) = \ln(x+\alpha)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+\alpha) = F_m(\alpha, n) - F_m(\alpha, 0) + R_{2m}(\alpha, n),$$

$$F_m(\alpha, x) = (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x + \frac{\ln(x+\alpha)}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)(x+\alpha)^{2k-1}},$$

$$R_{2m}(\alpha, n) = \int_0^n \frac{B_{2m}(\{x\})}{2m} \frac{dx}{(x+\alpha)^{2m}}.$$

(Здесь мы воспользовались (9.67) для $a = 0$ и $b = n$ и затем добавили $\ln(n+\alpha) - \ln\alpha$ к обеим частям.) Если вычесть эту аппроксимацию суммы $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+\alpha)$ из аппроксимации Стирлинга для $\ln n!$, добавить $\alpha \ln n$ и перейти к пределу при $n \to \infty$, то получим

$$\ln \alpha! = \alpha \ln\alpha - \alpha + \frac{\ln\alpha}{2} + \sigma + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)\alpha^{2k-1}} - \int_0^\infty \frac{B_{2m}(\{x\})}{2m} \frac{dx}{(x+\alpha)^{2m}},$$

ибо $\alpha \ln n + n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n - (n+\alpha)\ln(n+\alpha) + n - \frac{1}{2}\ln(n+\alpha) \to -\alpha$ и остальные, не показанные здесь члены, стремятся к нулю. Таким образом, аппроксимация Стирлинга для обобщенных факториалов (и для гамма-функции $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$) выглядит точно так же, как и для обычных факториалов.

Сумма 4: колоколообразные слагаемые

Обратимся теперь к сумме совершенно иного характера:

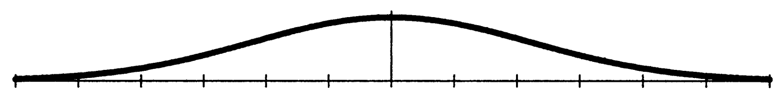
$$\Theta_n = \sum_k e^{-k^2/n} \qquad (9.92)$$

$$= \cdots + e^{-9/n} + e^{-4/n} + e^{-1/n} + 1 + e^{-1/n} + e^{-4/n} + e^{-9/n} + \cdots.$$

Это бесконечная в обе стороны сумма, члены которой достигают максимального значения $e^0 = 1$ при $k = 0$. Мы назвали сумму Θ_n, поскольку это степенной ряд, содержащий величину $e^{-1/n}$ в степени $p(k)$, где $p(k)$ — многочлен степени 2; такие степенные ряды традиционно называются „тета-функциями". Если $n = 10^{100}$, то

$$e^{-k^2/n} = \begin{cases} e^{-.01} \approx 0.99005 & \text{для } k = 10^{49}, \\ e^{-1} \approx 0.36788 & \text{для } k = 10^{50}, \\ e^{-100} < 10^{-43} & \text{для } k = 10^{51}. \end{cases}$$

Таким образом, слагаемые остаются очень близки к 1, пока k не достигнет значений порядка $\sqrt{n}$; в этот момент слагаемые уменьшаются и становятся очень близки к нулю. Мы можем предположить, что Θ_n будет пропорциональна $\sqrt{n}$. Ниже изображен график $e^{-k^2/n}$ для $n = 10$:



При бо́льших значениях n график просто растянется по горизонтали в $\sqrt{n}$ раз.

Чтобы оценить Θ_n с помощью формулы суммирования Эйлера, можно взять $f(x) = e^{-x^2/n}$ и $a = -\infty$, $b = +\infty$. (Если бесконечности страшат вас, то возьмите $a = -A$ и $b = +B$, а затем перейдите к пределу при $A, B \to \infty$.) Интеграл от $f(x)$ можно вычислить при помощи замены x на $u\sqrt{n}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/n}\, dx = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{n}\, C\,.$$

Значение $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$ хорошо известно, но мы пока обозначим его буквой C с тем, чтобы вернуться к нему после того, как закончим разбирательство с формулой суммирования Эйлера.

Следующее, что нам нужно знать,— это последовательность производных $f'(x)$, $f''(x)$, ...; для их нахождения удобно будет воспользоваться заменой

$$f(x) = g\big(x/\sqrt{n}\big)\,, \qquad g(x) = e^{-x^2}\,.$$

Тогда правило замены переменной из дифференциального исчисления говорит нам, что

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\frac{dy}{dx}\,, \qquad y = \frac{x}{\sqrt{n}}\,,$$

а это означает просто

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, g'\big(x/\sqrt{n}\big)\,.$$

По индукции получаем

$$f^{(k)}(x) = n^{-k/2} g^{(k)}\big(x/\sqrt{n}\big)\,.$$

Так, вычислив $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ и $g''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$, получим

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{-x^2/n}, \qquad f''(x) = \frac{1}{n}\left(4\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2-2\right)e^{-x^2/n}.$$

Чтобы было легче увидеть, что произойдет в дальнейшем, лучше работать с более простой функцией $g(x)$.

Нам не понадобится точно вычислять производные $g(x)$, поскольку нас интересуют только предельные значения при $x = \pm\infty$. Но тогда достаточно заметить, что любая производная функции $g(x)$ есть произведение e^{-x^2} и некоторого многочлена от x:

$$g^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}, \qquad \text{где } P_k \text{ — многочлен степени } k.$$

Это доказывается по индукции.

Экспонента e^{-x^2} стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ гораздо быстрее, чем $P_k(x)$ стремится к бесконечности, поэтому мы делаем вывод, что

$$f^{(k)}(+\infty) = f^{(k)}(-\infty) = 0$$

для всех $k \geqslant 0$. Следовательно, все члены в

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

исчезают и остается лишь слагаемое с $\int f(x)\,dx$ и остаточный член:

$$\begin{aligned}
\Theta_n &= C\sqrt{n} + (-1)^{m+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx \\
&= C\sqrt{n} + \frac{(-1)^{m+1}}{n^{m/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_m(\{x\})}{m!} g^{(m)}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)dx \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x = u\sqrt{n}\,) \\
&= C\sqrt{n} + \frac{(-1)^{m+1}}{n^{(m-1)/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_m(\{u\sqrt{n}\,\})}{m!} P_m(u)e^{-u^2}\,du \\
&= C\sqrt{n} + O(n^{(1-m)/2}).
\end{aligned}$$

Выписанная O-оценка остаточного члена вытекает из того, что $\left|B_m(\{u\sqrt{n}\})\right|$ ограничено и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|P(u)|e^{-u^2}\,du$ существует, если P — многочлен. (Константа в этом O зависит от m.)

Мы доказали, что $\Theta_n = C\sqrt{n} + O(n^{-M})$ для сколь угодно большого M; разность между Θ_n и $C\sqrt{n}$ „экспоненциально мала". Займемся теперь определением константы C, играющей столь важную роль в значении Θ_n.

Можно очень просто определить C, найдя нужный интеграл в таблице; но мы предпочтем самостоятельно получить это значение, чтобы в будущем суметь подсчитать также и те интегралы,

которых нет в таблицах. Для вычисления C достаточно элементарного анализа, если только мы догадаемся рассмотреть двойной интеграл

$$C^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

Переход к полярным координатам дает

$$\begin{aligned} C^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-u}\,du \qquad (u = r^2) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $C = \sqrt{\pi}$. Тот факт, что $x^2+y^2 = r^2$ есть уравнение окружности длины $2\pi r$, в какой-то мере объясняет, откуда здесь берется π.

Можно вычислить C иначе, выполнив замену x на $\sqrt{t}$ и dx на $\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt$:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt\,.$$

Этот интеграл равен $\Gamma\bigl(\frac{1}{2}\bigr)$, поскольку, в соответствии с (5.84), $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$. Следовательно, мы показали, что $\Gamma\bigl(\frac{1}{2}\bigr) = \sqrt{\pi}$.

Итак, наша окончательная формула такова:

$$\Theta_n = \sum_k e^{-k^2/n} = \sqrt{\pi n} + O(n^{-M}) \qquad \text{для любого фиксированного } M. \tag{9.93}$$

Константа в O зависит от M; именно поэтому мы говорим о „фиксированном" M.

Если, например, $n = 2$, то бесконечная сумма Θ_2 равняется 2.506628288; это уже превосходное приближение к $\sqrt{2\pi} \approx 2.506628275$, несмотря на малость n. Значение Θ_{100} совпадает с $10\sqrt{\pi}$ до 427-й десятичной цифры! В упр. 59 при помощи более совершенных методов получается быстро сходящийся ряд для Θ_n; оказывается, что

$$\Theta_n/\sqrt{\pi n} = 1 + 2e^{-n\pi^2} + O(e^{-4n\pi^2})\,. \tag{9.94}$$

Сумма 5: завершающий удар

Сейчас займемся нашей последней суммой, которая позволит нам найти значение константы Стирлинга σ. Эта последняя сумма также иллюстрирует многие другие методы из этой последней

главы (и из всей книги), так что это вполне уместный пример в завершение нашего исследования конкретной математики.

Последняя задача выглядит абсурдно простой: мы попытаемся найти асимптотическое значение суммы

$$A_n = \sum_k \binom{2n}{k}$$

с помощью формулы суммирования Эйлера.

Здесь мы вновь встречаемся с ситуацией, когда заранее известен ответ (так ли?); однако всегда интересно попробовать новые методы в старых задачах, чтобы можно было сравнить результаты и, может быть, открыть что-нибудь новое.

Итак, мы ДУМАЕМ О ГЛАВНОМ и обнаруживаем, что основной вклад в A_n вносят средние члены вблизи $k = n$. Почти всегда удобно выбрать такие обозначения, чтобы основной вклад в сумму происходил вблизи $k = 0$; затем мы сможем применить прием замены хвоста, чтобы избавиться от членов с большим $|k|$. Соответственно, заменим k на $n + k$:

$$A_n = \sum_k \binom{2n}{n+k} = \sum_k \frac{(2n)!}{(n+k)!\,(n-k)!}\,.$$

Дела выглядят неплохо, поскольку мы знаем, как аппроксимировать $(n \pm k)!$ в случае больших n и малых k.

Теперь мы собираемся применить трехшаговую процедуру, подразумеваемую приемом замены хвоста. Именно, мы хотим записать

$$\frac{(2n)!}{(n+k)!\,(n-k)!} = a_k(n) = b_k(n) + O\bigl(c_k(n)\bigr) \qquad \text{для } k \in D_n$$

с тем, чтобы получить оценку

$$A_n = \sum_k b_k(n) + O\Bigl(\sum_{k \notin D_n} a_k(n)\Bigr) + O\Bigl(\sum_{k \notin D_n} b_k(n)\Bigr) + \sum_{k \in D_n} O\bigl(c_k(n)\bigr)\,.$$

Попробуем поэтому оценить $\binom{2n}{n+k}$ в области малых $|k|$. Можно было бы использовать аппроксимацию Стирлинга, как она представлена в табл. 491, но проще работать с ее логарифмическим эквивалентом в виде (9.91):

$$\begin{aligned}\ln a_k(n) &= \ln(2n)! - \ln(n+k)! - \ln(n-k)!\\ &= 2n\ln 2n - 2n + \tfrac{1}{2}\ln 2n + \sigma + O(n^{-1})\\ &\quad - (n+k)\ln(n+k) + n + k - \tfrac{1}{2}\ln(n+k) - \sigma + O\bigl((n+k)^{-1}\bigr)\\ &\quad - (n-k)\ln(n-k) + n - k - \tfrac{1}{2}\ln(n-k) - \sigma + O\bigl((n-k)^{-1}\bigr)\,.\end{aligned} \tag{9.95}$$

Хотелось бы преобразовать это в простую и красивую O-оценку.

Но я не из тех, кто доминирует.

Метод замены хвоста позволяет использовать оценки, справедливые только для k из „доминирующего" множества D_n. Но как нам выбрать D_n? Мы должны взять D_n достаточно малым, чтобы можно было получить хорошую оценку; так, например, не стоит допускать приближения k к n, в этом случае член $O\big((n-k)^{-1}\big)$ в (9.95) „взрывается". С другой стороны, D_n должно быть достаточно большим, чтобы остаточные члены (члены с $k \notin D_n$) были пренебрежимо малы в сравнении со всей суммой. Обычно для определения подходящего множества D_n требуется действовать методом проб и ошибок; в данной задаче вычисления, которые мы вскоре проделаем, покажут, что разумно определить множества следующим образом:

$$k \in D_n \iff |k| \leqslant n^{1/2+\epsilon}. \tag{9.96}$$

Здесь ϵ — небольшая положительная константа, значение которой мы выберем позже, после того как лучше изучим местность. (Наши O-оценки будут зависеть от ϵ.) Уравнение (9.95) можно теперь сократить до

$$\begin{aligned}\ln a_k(n) = {} & (2n+\tfrac12)\ln 2 - \sigma - \tfrac12\ln n + O(n^{-1}) \\ & - (n+k+\tfrac12)\ln(1+k/n) - (n-k+\tfrac12)\ln(1-k/n). \end{aligned}\tag{9.97}$$

(Мы вынесли основную часть логарифмов, записав

$$\ln(n \pm k) = \ln n + \ln(1 \pm k/n),$$

в результате чего многие члены, содержащие $\ln n$, сократились.)

Теперь нужно разложить члены $\ln(1 \pm k/n)$ асимптотически, так, чтобы погрешность стремилась к нулю при $n \to \infty$. Мы умножаем $\ln(1 \pm k/n)$ на $(n \pm k + \frac12)$; значит, требуется разложить логарифм до членов $o(n^{-1})$ с учетом предположения $|k| \leqslant n^{1/2+\epsilon}$:

$$\ln\Big(1 \pm \frac{k}{n}\Big) = \pm\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2n^2} + O(n^{-3/2+3\epsilon}).$$

Умножение на $n \pm k + \frac12$ дает

$$\pm k - \frac{k^2}{2n} + \frac{k^2}{n} + O(n^{-1/2+3\epsilon})$$

плюс другие члены, которые поглощаются слагаемым $O(n^{-1/2+3\epsilon})$. Таким образом, (9.97) превращается в

$$\ln a_k(n) = (2n+\frac12)\ln 2 - \sigma - \frac12\ln n - k^2/n + O(n^{-1/2+3\epsilon}).$$

Взяв экспоненту, получим

$$a_k(n) = \frac{2^{2n+1/2}}{e^\sigma\sqrt{n}}\, e^{-k^2/n}\big(1 + O(n^{-1/2+3\epsilon})\big). \tag{9.98}$$

Это и есть наша аппроксимация с

$$b_k(n) = \frac{2^{2n+1/2}}{e^\sigma\sqrt{n}}\, e^{-k^2/n}\,, \qquad c_k(n) = 2^{2n}\, n^{-1+3\epsilon}\, e^{-k^2/n}\,.$$

Заметьте, что k входит в $b_k(n)$ и $c_k(n)$ очень простым образом. Это явная удача, ведь суммировать мы будем по k.

Трюк замены хвоста говорит нам, что $\sum_k a_k(n)$ приближенно равна $\sum_k b_k(n)$, если мы грамотно выполнили аппроксимацию. Вычислим поэтому

$$\begin{aligned}\sum_k b_k(n) &= \frac{2^{2n+1/2}}{e^\sigma\sqrt{n}} \sum_k e^{-k^2/n} \\ &= \frac{2^{2n+1/2}}{e^\sigma\sqrt{n}}\Theta_n = \frac{2^{2n}\sqrt{2\pi}}{e^\sigma}\bigl(1 + O(n^{-M})\bigr)\,.\end{aligned}$$

(И снова удача: можно использовать сумму Θ_n из предыдущего примера.) Это радует, поскольку, как нам известно, исходная сумма равна в действительности

Какое удивительное совпадение.

$$A_n = \sum_k \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}\,.$$

Похоже, таким образом, что $e^\sigma = \sqrt{2\pi}$, как и было объявлено.

Но не торопитесь радоваться. Надо еще доказать, что наши оценки достаточно точны. Посмотрим сначала на погрешность, вносимую $c_k(n)$:

Я так устал, продираясь через длинные, тяжелые книги, и ни в одной не встретил хотя бы слова одобрения от автора. А как было бы приятно прочесть: „Благодарим дошедших до этого места, надеемся, что вы потратили время не зря“,— вместо того, чтобы в конце длинного, сухого доказательства обнаружить холодную картонную обложку. Вы понимаете меня?

$$\begin{aligned}\Sigma_c(n) = \sum_{|k|\leqslant n^{1/2+\epsilon}} 2^{2n} n^{-1+3\epsilon} e^{-k^2/n} &\leqslant 2^{2n} n^{-1+3\epsilon}\Theta_n \\ &= O(2^{2n} n^{-\frac{1}{2}+3\epsilon})\,.\end{aligned}$$

Хорошо; эта величина асимптотически меньше предыдущей суммы, если $3\epsilon < \frac{1}{2}$.

Теперь следует проверить хвосты. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k>n^{1/2+\epsilon}} e^{-k^2/n} &< \exp\bigl(-\lfloor n^{1/2+\epsilon}\rfloor^2/n\bigr)\bigl(1 + e^{-1/n} + e^{-2/n} + \cdots\bigr) \\ &= O(e^{-n^{2\epsilon}}) \cdot O(n)\,,\end{aligned}$$

а это есть $O(n^{-M})$ для любого M; так что $\sum_{k\notin D_n} b_k(n)$ асимптотически пренебрежимо мала. (Мы выбрали границу $n^{1/2+\epsilon}$ как раз так, чтобы $e^{-k^2/n}$ было экспоненциально малым вне D_n. Вполне подошли бы и другие выражения, наподобие $n^{1/2}\log n$, и оценки были бы тогда несколько точнее, зато формулы оказались бы сложнее. Нам совсем не обязательно находить наиболее точную

оценку, поскольку главная наша цель — найти значение константы σ.) Точно так же другой хвост

$$\sum_{k>n^{1/2+\epsilon}} \binom{2n}{n+k}$$

ограничен $2n$-кратным максимальным слагаемым, получаемым в разделительной точке $k \approx n^{1/2+\epsilon}$. Это слагаемое, как известно, приближенно равно $b_k(n)$, что, в свою очередь, экспоненциально мало в сравнении с A_n; экспоненциально малый множитель перевешивает множитель $2n$.

Итак, мы успешно применили трюк замены хвоста и доказали оценку

$$2^{2n} = \sum_k \binom{2n}{k} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^\sigma} 2^{2n} + O(2^{2n} n^{-\frac{1}{2}+3\epsilon}), \quad \text{если } 0 < \epsilon < \tfrac{1}{6}. \qquad (9.99)$$

Можем выбрать $\epsilon = \frac{1}{8}$ и сделать вывод, что

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \ln 2\pi .$$

ЧТД.

Благодарим дошедших до этого места, надеемся, что вы потратили время не зря.
— Авторы

Упражнения

Разминочные упражнения

1 Докажите или опровергните: если $f_1(n) \prec g_1(n)$ и $f_2(n) \prec g_2(n)$, то $f_1(n) + f_2(n) \prec g_1(n) + g_2(n)$.

2 Какая из функций растет быстрее:

a $n^{(\ln n)}$ или $(\ln n)^n$?

b $n^{(\ln \ln \ln n)}$ или $(\ln n)!$?

c $(n!)!$ или $((n-1)!)!\,(n-1)!^{n!}$?

d $F^2_{\lceil H_n \rceil}$ или H_{F_n}?

3 Что неверно в следующих рассуждениях? „Поскольку $n = O(n)$ и $2n = O(n)$ и т. д., то заключаем $\sum_{k=1}^n kn = \sum_{k=1}^n O(n) = O(n^2)$!"

4 Приведите пример верного соотношения, содержащего символ O в левой части, но не в правой. (Не используйте умножение на нуль; это слишком просто.) *Указание:* рассмотрите переход к пределу.

5 Докажите или опровергните: $O\big(f(n) + g(n)\big) = f(n) + O\big(g(n)\big)$, если $f(n)$ и $g(n)$ положительны для всех n. (Сравните с (9.27).)

6 Умножьте $\big(\ln n + \gamma + O(1/n)\big)$ на $\big(n + O(\sqrt{n}\,)\big)$ и выразите ответ в O-обозначениях.

7 Оцените $\sum_{k\geqslant 0} e^{-k/n}$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-1})$.

Обязательные упражнения

8 Приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$, таких, что ни одно из трех отношений $f(n) \prec g(n)$, $f(n) \succ g(n)$, $f(n) \asymp g(n)$ не выполняется, несмотря на то что обе эти функции монотонно стремятся к ∞.

9 Строго докажите (9.22), показав, что левая часть является подмножеством правой части в соответствии с теоретико-множественным определением O.

10 Докажите или опровергните: $\cos O(x) = 1 + O(x^2)$ для всех вещественных x.

11 Докажите или опровергните: $O(x+y)^2 = O(x^2) + O(y^2)$.

12 Докажите, что

$$1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + O(n^{-2})\right)$$

при $n \to \infty$.

13 Вычислите $\left(n + 2 + O(n^{-1})\right)^n$ с относительной погрешностью $O(n^{-1})$.

14 Докажите, что $(n+\alpha)^{n+\beta} = n^{n+\beta}e^{\alpha}\left(1+\alpha(\beta-\frac{1}{2}\alpha)n^{-1}+O(n^{-2})\right)$.

15 Дайте асимптотическую формулу для „среднего“ триномиального коэффициента $\binom{3n}{n,n,n}$, верную с относительной погрешностью $O(n^{-3})$.

16 Предполагая, что $B(1-x) = -B(x) \geqslant 0$ для $0 < x < \frac{1}{2}$, докажите, что

$$\int_a^b B(\{x\}) f(x)\, dx \geqslant 0$$

при дополнительном условии $f'(x) \geqslant 0$ для $a \leqslant x \leqslant b$.

17 Используя производящие функции, покажите, что $B_m(\frac{1}{2}) = (2^{1-m} - 1)B_m$ для всех $m \geqslant 0$.

18 Найдите $\sum_k \binom{2n}{k}^{\alpha}$ для $\alpha > 0$ с относительной погрешностью $O(n^{-1/4})$.

Домашние задания

19 Сравните с помощью компьютера левую и правую части аппроксимаций из табл. 491, положив $n = 10$, $z = \alpha = 0.1$ и $O\big(f(n)\big) = O\big(f(z)\big) = 0$.

20 Докажите или опровергните следующие оценки при $n \to \infty$:

a $O\left(\left(\frac{n^2}{\log\log n}\right)^{1/2}\right) = O(\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2)$.

b $e^{(1+O(1/n))^2} = e + O(1/n)$.

c $n! = O\Big(\big((1-1/n)^n n\big)^n\Big)$.

21 Уравнение (9.48) дает n-е простое число с относительной погрешностью $O(\log n)^{-2}$. Улучшите относительную погрешность до $O(\log n)^{-3}$, использовав в (9.46) еще один член (9.31).

22 Улучшите (9.54) до $O(n^{-3})$.

23 Сделайте еще один шаг в улучшении (9.62), достигнув абсолютной погрешности $O(n^{-3})$. *Указание:* пусть $g_n = c/(n+1)(n+2) + h_n$; какому рекуррентному соотношению удовлетворяет h_n?

24 Предположим, что $a_n = O\big(f(n)\big)$ и $b_n = O\big(f(n)\big)$. Докажите или опровергните то, что свертка $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ также есть $O\big(f(n)\big)$ в следующих случаях:

a $f(n) = n^{-\alpha}$, $\alpha > 1$.
b $f(n) = \alpha^{-n}$, $\alpha > 1$.

25 Докажите формулы (9.1) и (9.2), с которых начиналась эта глава.

26 Уравнение (9.91) показывает, как вычислить $\ln 10!$ с абсолютной погрешностью $< \frac{1}{126000000}$. Следовательно, перейдя к экспонентам, мы получим $10!$ с относительной погрешностью, которая меньше, чем $e^{1/126000000} - 1 < 10^{-8}$. (Фактически эта аппроксимация дает 3628799.9714.) Если теперь, зная, что $10!$ — целое число, округлить результат до ближайшего целого, то получим точный ответ.

Всегда ли возможно вычислить $n!$ подобным методом, взяв достаточное количество членов аппроксимации Стирлинга? Оцените значение m, дающее наилучшее приближение к $\ln n!$ для фиксированного (большого) целого n. Сравните абсолютную погрешность этой аппроксимации с самим значением $n!$.

27 С помощью формулы суммирования Эйлера найдите асимптотическое значение $H_n^{(-\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$, где α — любое фиксированное вещественное число. (Ваш ответ может включать константу, значение которой в замкнутом виде вам неизвестно.)

28 В упр. 5.13 определена функция гиперфакториал: $Q_n = 1^1 2^2 \ldots n^n$. Найдите асимптотическое значение Q_n с относительной погрешностью $O(n^{-1})$. (Ваш ответ может включать константу, значение которой в замкнутом виде вам неизвестно.)

29 Оцените функцию $1^{1/1}2^{1/2}\ldots n^{1/n}$ как в предыдущем упражнении.

30 Найдите асимптотическое значение $\sum_{k\geqslant 0} k^l e^{-k^2/n}$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-3})$, если l — фиксированное неотрицательное целое.

31 Вычислите $\sum_{k\geqslant 0} 1/(c^k + c^m)$ с абсолютной погрешностью $O(c^{-3m})$, если $c > 1$, а m — положительное целое.

Контрольные работы

32 Вычислите $e^{H_n + H_n^{(2)}}$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-1})$.

33 Вычислите $\sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k}/n^{\overline{k}}$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-3})$.

34 Определите значения коэффициентов от A до F, такие, что $(1 + 1/n)^{nH_n}$ равняется

$$An + B(\ln n)^2 + C\ln n + D + \frac{E(\ln n)^2}{n} + \frac{F\ln n}{n} + O(n^{-1})\,.$$

35 Вычислите $\sum_{k=1}^{n} 1/kH_k$ с абсолютной погрешностью $O(1)$.

36 Вычислите $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(n^2 + k^2)$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-5})$.

37 Вычислите $\sum_{k=1}^{n} (n \bmod k)$ с абсолютной погрешностью $O(n \log n)$.

38 Вычислите $\sum_{k\geqslant 0} k^k \binom{n}{k}$ с относительной погрешностью $O(n^{-1})$.

39 Вычислите $\sum_{0\leqslant k<n} \ln(n-k)(\ln n)^k/k!$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-1})$. *Указание:* покажите, что членами с $k \geqslant 10\ln n$ можно пренебречь.

40 Пусть m — положительное целое (фиксированное). Вычислите $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k H_k^m$ с абсолютной погрешностью $O(1)$.

41 Вычислите „факториал Фибоначчи“ $\prod_{k=1}^{n} F_k$ с относительной погрешностью $O(n^{-1})$ или лучшей. Ваш ответ может включать константу, значение которой в замкнутой форме вам неизвестно.

42 Пусть α — константа в диапазоне $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Как мы видели в предыдущих главах, не существует общего выражения в замкнутой форме для суммы $\sum_{k\leqslant \alpha n} \binom{n}{k}$. Покажите, однако, что имеется асимптотическая формула

$$\sum_{k\leqslant\alpha n} \binom{n}{k} = 2^{nH(\alpha) - \frac{1}{2}\lg n + O(1)}\,,$$

где $H(\alpha) = \alpha \lg\frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\lg(\frac{1}{1-\alpha})$. *Указание:* покажите, что $\binom{n}{k-1} < \frac{\alpha}{1-\alpha}\binom{n}{k}$ для $0 < k \leqslant \alpha n$.

43 Покажите, что C_n, число способов размена n центов (рассмотренное в гл. 7), асимптотически равно $cn^4 + O(n^3)$ для некоторой константы c. Чему равна эта константа?

44 Докажите, что

$$x^{\underline{1/2}} = x^{1/2}\left[{1/2 \atop 1/2}\right] - x^{-1/2}\left[{1/2 \atop -1/2}\right] + x^{-3/2}\left[{1/2 \atop -3/2}\right] + O(x^{-5/2})$$

при $x \to \infty$. (Вспомните определение $x^{\underline{1/2}} = x!/(x-\frac{1}{2})!$ из (5.88) и определение обобщенных чисел Стирлинга из табл. 302.)

45 Пусть α — иррациональное число от 0 до 1. В гл. 3 рассматривалась величина $D(\alpha, n)$, измеряющая максимальное отклонение множества $\{k\alpha\}$ для $0 \leqslant k < n$ от равномерного распределения. В (3.31) было доказано рекуррентное соотношение

$$D(\alpha, n) \leqslant D(\{\alpha^{-1}\}, \lfloor \alpha n \rfloor) + \alpha^{-1} + 2;$$

кроме того, имеются очевидные границы

$$0 \leqslant D(\alpha, n) \leqslant n.$$

Докажите, что $\lim_{n\to\infty} D(\alpha, n)/n = 0$. *Указание:* в гл. 6 обсуждаются непрерывные дроби.

46 Покажите, что числа Белла $\varpi_n = e^{-1}\sum_{k\geqslant 0} k^n/k!$ из упр. 7.15 асимптотически равны

$$m(n)^n e^{m(n)-n-1/2}/\sqrt{\ln n},$$

где $m(n)\ln m(n) = n-\frac{1}{2}$. Оцените относительную погрешность этой аппроксимации.

47 Пусть m — целое число $\geqslant 2$. Проанализируйте две суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_m k \rfloor \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lceil \log_m k \rceil .$$

Какая из них асимптотически ближе к $\log_m n!$?

48 Рассмотрим таблицу гармонических чисел H_k для $1 \leqslant k \leqslant n$ в десятичной записи. В этой таблице k-й элемент $\widehat{H}_k$ округлен до d_k значащих цифр, где d_k выбрано как раз таким, чтобы можно было отличить этот элемент от H_{k-1} и H_{k+1}. Здесь в качестве примера приведены 5 строк из этой таблицы в том месте, где H_k преодолевает рубеж 10:

k	H_k	$\widehat{H}_k$	d_k
12364	9.99980041−	9.9998	5
12365	9.99988128+	9.9999	5
12366	9.99996215−	9.99996	6
12367	10.00004301−	10.0000	6
12368	10.00012386+	10.0001	6

Оцените общее число цифр в таблице, $\sum_{k=1}^{n} d_k$, с абсолютной погрешностью $O(n)$.

49 В гл. 6 мы рассмотрели историю червяка, который доползет до конца растягивающейся ленты через n секунд, где $H_{n-1} < 100 \leqslant H_n$. Докажите, что если n — положительное целое число, такое, что $H_{n-1} \leqslant \alpha \leqslant H_n$, то

$$\lfloor e^{\alpha-\gamma} \rfloor \leqslant n \leqslant \lceil e^{\alpha-\gamma} \rceil .$$

50 Рисковые капиталисты из Кремниевой долины получили предложение, дающее шанс на экспоненциально большую прибыль по их инвестициям: консорциум ГКП обещает в случае вклада в размере n миллионов долларов, где $n \geqslant 2$, выплатить через год сумму, соответствующую N миллионам долларов, где $N = 10^n$. Разумеется, существует некоторая доля риска; на самом деле ГКП платит k миллионов долларов с вероятностью $1/(k^2 H_N^{(2)})$ для целых k в диапазоне $1 \leqslant k \leqslant N$. (Все платежи осуществляются в мегадолларах, т. е. целых кратных 1000000 долларов; выплата определяется истинно случайным процессом.) Обратите внимание, что вкладчик всегда получает назад по крайней мере один миллион долларов.

Названный по первым буквам фамилий его основателей — Грэхема, Кнута, Паташника — Перев.

a Чему равен асимптотически ожидаемый результат через год, если было вложено n миллионов долларов? (Другими словами, каково среднее значение выплаты?) Ваш ответ должен быть точен в пределах абсолютной погрешности $O(10^{-n})$ долларов.

Как-то раз я заработал $O(10^{-n})$ долларов.

b С какой асимптотической вероятностью вы будете иметь прибыль, вложив n миллионов? (Другими словами, какова вероятность того, что вы получите назад больше, чем вложили?) Здесь допускается абсолютная погрешность ответа до $O(n^{-3})$.

Конкурсные задачи

51 Докажите или опровергните: $\int_n^\infty O(x^{-2})\,dx = O(n^{-1})$ при $n \to \infty$.

52 Покажите, что существует степенной ряд $A(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_n z^n$, сходящийся для всех комплексных z, и такой, что

$$A(n) \succ n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}\Big\}n .$$

53 Докажите, что если производные функции $f(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$f'(x) \leqslant 0, \quad -f''(x) \leqslant 0, \quad f'''(x) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad (-1)^m f^{(m+1)}(x) \leqslant 0$$

для всех $x \geqslant 0$, то

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}x^{m-1} + O(x^m) \quad \text{для } x \geqslant 0.$$

В частности, в случае $f(x) = -\ln(1+x)$ получаем доказательство (9.64) для всех $k, n > 0$.

54 Пусть $f(x)$ — положительная, дифференцируемая функция, причем $xf'(x) \prec f(x)$ при $x \to \infty$. Докажите, что

$$\sum_{k\geqslant n} \frac{f(k)}{k^{1+\alpha}} = O\left(\frac{f(n)}{n^\alpha}\right), \qquad \text{если } \alpha > 0.$$

Указание: рассмотрите величину $f(k-\frac{1}{2})/(k-\frac{1}{2})^\alpha - f(k+\frac{1}{2})/(k+\frac{1}{2})^\alpha$.

55 Улучшите (9.99), уменьшив относительную погрешность до $O(n^{-3/2+5\epsilon})$.

56 Величина $Q(n) = 1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \cdots = \sum_{k\geqslant 1} n^{\underline{k}}/n^k$ встречается при анализе многих алгоритмов. Найдите ее асимптотическое значение с абсолютной погрешностью $o(1)$.

57 В (9.54) получена асимптотическая формула для суммы Голомба $\sum_{k\geqslant 1} 1/k\lfloor 1+\log_n k\rfloor^2$. Найдите асимптотическую формулу для аналогичной суммы без округления до целых, $\sum_{k\geqslant 1} 1/k(1 + \log_n k)^2$. *Указание:* рассмотрите интеграл $\int_0^\infty ue^{-u}k^{-tu}\,du = 1/(1+t\ln k)^2$.

58 Докажите, что

$$B_m(\{x\}) = -2\frac{m!}{(2\pi)^m}\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(2\pi kx - \frac{1}{2}\pi m)}{k^m} \quad \text{для } m \geqslant 2.$$

Для этого вычислите с помощью теории вычетов интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{2\pi i\, e^{2\pi i z\theta}}{e^{2\pi i z}-1}\frac{dz}{z^m}$$

по квадратному контуру $z = x + iy$, где $\max(|x|,|y|) = M + \frac{1}{2}$, устремив затем целое M к ∞.

59 Пусть $\Theta_n(t) = \sum_k e^{-(k+t)^2/n}$ — периодическая функция t. Покажите, что разложение $\Theta_n(t)$ в ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$\Theta_n(t) = \sqrt{\pi n}\Big(1 + 2e^{-\pi^2 n}(\cos 2\pi t) + 2e^{-4\pi^2 n}(\cos 4\pi t) + 2e^{-9\pi^2 n}(\cos 6\pi t) + \cdots\Big).$$

(Эта формула дает быстро сходящийся ряд для суммы $\Theta_n = \Theta_n(0)$ из уравнения (9.93).)

60 Объясните, почему у всех коэффициентов в асимптотическом разложении

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{1024n^3} - \frac{21}{32768n^4} + O(n^{-5})\right)$$

знаменатели являются степенями 2.

61 В упр. 45 доказывается, что отклонение от равномерного распределения $D(\alpha, n)$ есть $o(n)$ для любого иррационального числа α. Предъявите иррациональное α, такое, что $D(\alpha, n)$ *не* является $O(n^{1-\epsilon})$ ни для какого $\epsilon > 0$.

62 Для данного n пусть $\left\{ {n \atop m(n)} \right\} = \max_k \left\{ {n \atop k} \right\}$ — максимальный элемент строки n треугольника Стирлинга (для числа подмножеств). Покажите, что для всех достаточно больших n выполняется одно из равенств $m(n) = \lfloor \overline{m}(n) \rfloor$ или $m(n) = \lceil \overline{m}(n) \rceil$, где

$$\overline{m}(n)(\overline{m}(n)+2)\ln(\overline{m}(n)+2) = n(\overline{m}(n)+1)\,.$$

Указание: это трудно.

63 Докажите, что самоописывающиеся последовательности С. В. Голомба из упр. 2.36 удовлетворяют соотношению $f(n) = \phi^{2-\phi} n^{\phi-1} + O(n^{\phi-1}/\log n)$.

64 Дайте доказательство тождества

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2} = \pi^2\bigl(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\bigr) \qquad \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

использующее только „Эйлерову“ математику (т. е. то, что было известно в восемнадцатом столетии).

65 Чему равны коэффициенты асимптотического ряда:

$$1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots ?$$

Исследовательские проблемы

66 Найдите „комбинаторное“ доказательство аппроксимации Стирлинга. (Обратите внимание на то, что n^n есть число отображений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя, тогда как $n!$ — число отображений того же множества на себя.)

67 Рассмотрим решетку точек размера $n \times n$, $n \geqslant 3$, в которой каждая точка имеет четырех соседей. (На краях мы „перескакиваем“ на противоположную сторону по модулю n.) Пусть χ_n означает число способов раскрасить эти точки в три цвета — красный, белый и синий, так чтобы никакие две соседние точки не были окрашены в один цвет. (Так, $\chi_3 = 12$.) Докажите, что

$$\chi_n \sim \bigl(\tfrac{4}{3}\bigr)^{3n^2/2} e^{-\pi/6}\,.$$

68 Обозначим через Q_n минимальное целое m, такое, что $H_m > n$. Найдите наименьшее целое n, для которого $Q_n \neq \lfloor e^{n-\gamma} + \frac{1}{2} \rfloor$, или докажите, что такого n не существует.

Ребята, это коне-е-ец!



Ответы к упражнениям

КАЖДОЕ УПРАЖНЕНИЕ сопровождается (по крайней мере, кратким) ответом, а некоторые из этих ответов выходят за рамки того, что спрашивалось. Читатели извлекут наибольшую пользу, если предпримут серьезную попытку найти свои собственные ответы, ПРЕЖДЕ ЧЕМ ЗАГЛЯНУТЬ в данное приложение.

Авторам будет интересно узнать о любых (хотя бы частичных) решениях исследовательских проблем или же о любых более простых (или более правильных) способах решения других задач.

(Нашедшему первым всякую ошибку в этой книге причитается вознаграждение в 2.56 доллара.)

Это утверждение относится и к русскому переводу?

(На опечатки в русском переводе это не распространяется.)

А как же понять, кто ошибся?

(Гм-м... Попробуйте, а там посмотрим.)

1.1 Доказательство безупречно за исключением случая $n = 2$. Если все пары лошадей состоят из лошадей одинаковой масти, данное утверждение справедливо для любого числа лошадей.

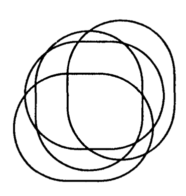
1.2 Если X_n — требуемое число перекладываний, то $X_0 = 0$ и $X_n = X_{n-1} + 1 + X_{n-1} + 1 + X_{n-1}$ при $n > 0$. Отсюда следует (если, например, прибавить 1 к обеим частям), что $X_n = 3^n - 1$. (После $\frac{1}{2}X_n$ перекладываний оказывается, что башня целиком будет находиться на среднем колышке — перевалочный пункт!)

1.3 Всего существует 3^n возможных размещений, ибо каждый диск может оказаться на любом колышке. Мы обязательно столкнемся с каждым из них, поскольку самое короткое решение требует $3^n - 1$ перекладываний. (Подобная конструкция эквивалентна „троичному коду Грея“, который пробегает все числа от $(0\ldots0)_3$ до $(2\ldots2)_3$, изменяя каждый раз только одну цифру.)

1.4 Нет. Если самый большой диск не перекладывать, то будет достаточно $2^{n-1} - 1$ перекладываний (доказывается по индукции); в противном случае будет достаточно $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1)$ перекладываний (также по индукции).

1.5 Нет. Произвольно расположенные окружности могут пересечься самое большее в двух точках, так что добавление четвертой окружности сможет увеличить число областей самое большее до 14. Однако данное задание можно выполнить с помощью

овалов:



„Число точек пересечения“ может послужить сюжетом целой истории, в которой выпуклость играет роль „отвлекающего момента“.

Венн [51] утверждал, что случай пяти множеств невозможно проиллюстрировать эллипсами, однако такое построение было найдено Грюнбаумом [92].

1.6 Если новая n-я прямая пересекает прежние прямые в $k > 0$ различных точках, мы получаем $k-1$ новых конечных областей (в предположении, что ни одна из прежних прямых не параллельна никакой другой) и 2 новые бесконечные области. Следовательно, максимальное число конечных областей равно $(n-2)+(n-3)+\cdots = S_{n-2} = (n-1)(n-2)/2 = L_n - 2n$.

Здесь предполагается, что $n > 0$.

1.7 Мы не доказали базу индукции; и в самом деле, $H(1) \neq 2$.

1.8 $Q_2 = (1+\beta)/\alpha$, $Q_3 = (1+\alpha+\beta)/\alpha\beta$, $Q_4 = (1+\alpha)/\beta$, $Q_5 = \alpha$, $Q_6 = \beta$, так что данная последовательность периодична!

1.9 (a) Утверждение $P(n-1)$ мы получаем из неравенства

$$x_1 \ldots x_{n-1}\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n .$$

(b) $x_1 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_{2n} \leqslant \bigl(((x_1+\cdots+x_n)/n)((x_{n+1}+\cdots+x_{2n})/n)\bigr)^n$ в силу $P(n)$; произведения внутри $\leqslant \bigl((x_1+\cdots+x_{2n})/2n\bigr)^2$ в силу $P(2)$. (c) К примеру, $P(5)$ следует из $P(6)$, $P(6)$ — из $P(3)$, $P(3)$ — из $P(4)$, а $P(4)$ — из $P(2)$.

1.10 Вначале покажите, что $R_n = R_{n-1} + 1 + Q_{n-1} + 1 + R_{n-1}$ при $n > 0$. Между прочим, методы гл. 7 позволяют показать, что $Q_n = \bigl((1+\sqrt{3}\,)^{n+1} - (1-\sqrt{3}\,)^{n+1}\bigr)/(2\sqrt{3}) - 1$.

1.11 (a) Мы не можем сделать ничего лучшего, чем переместить вначале двойную $(n-1)$-башню, затем переложить (с изменением порядка) два самых больших диска, а на них снова поместить двойную $(n-1)$-башню; следовательно, $A_n = 2A_{n-1} + 2$ и $A_n = 2T_n = 2^{n+1} - 2$. Это решение меняет местами два самых больших диска, но сохраняет исходный порядок других $2n-2$ дисков.

(b) Обозначим через B_n минимальное число перекладываний. Тогда $B_1 = 3$, и можно показать, что нет лучшей стратегии, чем $B_n = A_{n-1} + 2 + A_{n-1} + 2 + B_{n-1}$, когда $n > 1$. Следовательно, $B_n = 2^{n+2} - 5$ для всех $n > 0$. Как ни странно, но это просто $2A_n - 1$, и мы также имеем $B_n = A_{n-1} + 1 + A_{n-1} + 1 + A_{n-1} + 1 + A_{n-1}$.

1.12 Если все $m_k > 0$, то $A(m_1, \ldots, m_n) = 2A(m_1, \ldots, m_{n-1}) + m_n$. Это уравнение является уравнением „обобщенного иосифова“ типа с решением $(m_1 \ldots m_n)_2 = 2^{n-1}m_1 + \cdots + 2m_{n-1} + m_n$.

К тому же соответствующее обобщение упр. 11b приводит к рекуррентности

$$B(m_1, \ldots, m_n) = \begin{cases} A(m_1, \ldots, m_n), & \text{если } m_n = 1, \\ 2m_n - 1, & \text{если } n = 1, \\ 2A(m_1, \ldots, m_{n-1}) + 2m_n & \\ \quad + B(m_1, \ldots, m_{n-1}), & \text{если } n > 1 \\ & \text{и } m_n > 1. \end{cases}$$

1.13 Зная, что n прямых разбивают плоскость на L_n областей, мы можем заменить их исключительно узкими зигзагами с настолько длинными отрезками, что каждая пара зигзагов имеет девять пересечений. Это показывает, что $ZZ_n = ZZ_{n-1} + 9n - 8$ при всех $n > 0$; следовательно, $ZZ_n = 9S_n - 8n + 1 = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 1$.

1.14 Число новых трехмерных областей, образованных новым разрезом,— это число двумерных областей, образованных на новой плоскости линиями ее пересечений с прежними плоскостями. Следовательно, $P_n = P_{n-1} + L_{n-1}$, откуда выясняется, что $P_5 = 26$. (С помощью шести разрезов кубической головки сыра можно получить 27 кубиков сыра или же до 42 кусков сыра неправильной формы.)

Между прочим, решение этого рекуррентного соотношения приобретает привлекательный вид, если выразить его через биномиальные коэффициенты (см. гл. 5):

$$X_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1},$$

$$L_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2},$$

$$P_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

Держу пари — я знаю, что будет в случае четырех измерений!

Здесь X_n — наибольшее число одномерных областей, на которые прямая делится n точками.

1.15 При $n > 1$ функция I удовлетворяет тому же самому рекуррентному соотношению, что и функция J, однако при $n = 1$ функция $I(1)$ не определена. Поскольку $I(2) = 2$, а $I(3) = 1$, не существует значения $I(1) = \alpha$, которое позволило бы использовать наш общий метод: „исход“ развертывания зависит от двух старших битов в двоичном представлении n.

Если $n = 2^m + 2^{m-1} + k$, где $0 \leqslant k < 2^{m+1} + 2^m - (2^m + 2^{m-1}) = 2^m + 2^{m-1}$, то решением является $I(n) = 2k + 1$ при всех $n > 2$.

Другой способ записи решения в случае, когда $n = 2^m + l$, таков:

$$I(n) = \begin{cases} J(n) + 2^{m-1}, & \text{если } 0 \leqslant l < 2^{m-1}, \\ J(n) - 2^m, & \text{если } 2^{m-1} \leqslant l < 2^m. \end{cases}$$

1.16 Пусть $g(n) = a(n)\alpha + b(n)\beta_0 + c(n)\beta_1 + d(n)\gamma$. Из (1.18) известно, что $a(n)\alpha + b(n)\beta_0 + c(n)\beta_1 = (\alpha\,\beta_{b_{m-1}}\,\beta_{b_{m-2}}\ldots\beta_{b_1}\,\beta_{b_0})_3$ при $n = (1\,b_{m-1}\ldots b_1\,b_0)_2$; это определяет $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$. Подстановка $g(n) = n$ в наше рекуррентное соотношение означает, что $a(n)+c(n)-d(n) = n$, так что нам все известно. [Подстановка $g(n) = 1$ дает дополнительное равенство $a(n)-2b(n)-2c(n) = 1$, которое может быть использовано для определения $b(n)$ через более простые функции $a(n)$ и $a(n) + c(n)$.]

1.17 В общем случае $W_m \leqslant 2W_{m-k} + T_k$ при $0 \leqslant k \leqslant m$. (Данное соотношение соответствует перемещению верхних $m-k$ дисков с последующим использованием только трех колышков для перекладывания k дисков и завершающим перекладыванием верхних $n-k$ дисков.) Установленное соотношение оказывается основанным на единственном значении k, которое минимизирует правую часть данного общего неравенства при $m = n(n+1)/2$. (Однако мы не можем утверждать, что имеет место равенство, поскольку для перемещения подобной башни приемлемы многие другие способы.) Если мы положим $Y_n = (W_{n(n+1)/2} - 1)/2^n$, то обнаружим, что $Y_n \leqslant Y_{n-1} + 1$; следовательно, $W_{n(n+1)/2} \leqslant 2^n(n-1) + 1$.

1.18 Достаточно показать, что обе линии, выходящие из точки излома $(n^{2j}, 0)$, пересекают другие такие же линии, выходящие из точки $(n^{2k}, 0)$, и что все они пересекаются в различных точках.

Линия, выходящая из точки $(x_j, 0)$ и проходящая через точку $(x_j - a_j, 1)$, пересекает линию, выходящую из точки $(x_k, 0)$ и проходящую через точку $(x_k - a_k, 1)$, в точке $(x_j - ta_j, t)$, где $t = (x_k - x_j)/(a_k - a_j)$. Пусть $x_j = n^{2j}$ и $a_j = n^j + (0 \text{ или } n^{-n})$. Тогда величина отношения $t = (n^{2k} - n^{2j})/\bigl(n^k - n^j + (-n^{-n} \text{ или } 0 \text{ или } n^{-n})\bigr)$ находится строго между $n^j + n^k - 1$ и $n^j + n^k + 1$; следовательно, ордината точки пересечения определяет j и k единственным образом. К тому же четыре точки пересечения с одинаковыми j и k различны.

1.19 Не могут, когда $n > 5$. Ломаная линия, полупрямые которой образуют при вершине углы θ и $\theta + 30°$, может пересечься четыре раза с другой ломаной, полупрямые которой образуют углы ϕ и $\phi + 30°$, только если $30° < |\theta - \phi| < 150°$. Невозможно выбрать более 5 углов, удаленных друг от друга на требуемое расстояние. (5 углов выбрать можно.)

1.20 Пусть $h(n) = a(n)\alpha + b(n)\beta_0 + c(n)\beta_1 + d(n)\gamma_0 + e(n)\gamma_1$. Из (1.18) известно, что $a(n)\alpha + b(n)\beta_0 + c(n)\beta_1 = (\alpha\,\beta_{b_{m-1}}\,\beta_{b_{m-2}}\ldots\beta_{b_1}\,\beta_{b_0})_4$ при $n = (1\,b_{m-1}\ldots b_1\,b_0)_2$; это определяет $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$. Подставляя $h(n) = n$ в нашу рекуррентность, имеем $a(n)+c(n) - 2d(n) - 2e(n) = n$; а подставляя $h(n) = n^2$, имеем $a(n) +$

$c(n) + 4e(n) = n^2$. Итак, $d(n) = \bigl(3a(n) + 3c(n) - n^2 - 2n\bigr)/4$, $e(n) = \bigl(n^2 - a(n) - c(n)\bigr)/4$.

1.21 Можно положить m равным наименьшему (или любому другому) общему кратному чисел $2n$, $2n-1$, ..., $n+1$. [Нестрогое рассуждение наводит на мысль, что „случайное" значение m подойдет с вероятностью

$$\frac{n}{2n}\frac{n-1}{2n-1}\dots\frac{1}{n+1} = 1\Big/\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n},$$

поэтому можно было бы ожидать, что удастся найти m, меньшее 4^n.]

1.22 Возьмите правильный многоугольник с 2^n сторонами и пометьте каждую из сторон элементами „цикла де Брейна" длины 2^n. (Это циклическая последовательность нулей и единиц, в которой все наборы из n смежных элементов различны; см. [139, упр. 2.3.4.2–23] и [140, упр. 3.2.2–17].) Затем добавьте к каждой стороне, которая помечена единицей, очень тонкий „довесок". Требуемые множества представляют собой n таких многоугольников, повернутых „на длину" k сторон при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Я однажды катался на [мото]цикле де Брейна (когда гостил у него дома в Нейене, что в Нидерландах).

1.23 Да. (Нам потребуются основные понятия элементарной теории чисел из гл. 4.) Пусть $L(n) = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$. Можно предположить, что $n > 2$; тогда, согласно постулату Бертрана, между $n/2$ и n имеется простое число p. Можно также предположить, что $j > n/2$, поскольку $q' = L(n) + 1 - q$ оставляет в живых $j' = n + 1 - j$ тогда и только тогда, когда q оставляет в живых j. Выберите q так, что $q \equiv 1 \pmod{L(n)/p}$ и $q \equiv j + 1 - n \pmod{p}$. Тогда люди выбывают в порядке $1, 2, \dots, n-p, j+1, j+2, \dots, n, n-p+1, \dots, j-1$.

1.24 Единственно известные примеры: $X_n = 2i\sin\pi r + 1/X_{n-1}$, где r — рациональное число, $0 \leqslant r < \frac{1}{2}$ (при изменении r все периоды имеют длину $\geqslant 2$); рекуррентность Гаусса с периодом 5 из упр. 8; еще более замечательная рекуррентность Тодда [196] $X_n = (1 + X_{n-1} + X_{n-2})/X_{n-3}$ с периодом 8; а также рекуррентности, полученные из них путем замены X_n на X_{mn}, умноженное на константу. Мы можем считать, что первый ненулевой коэффициент в знаменателе равен единице и что первый ненулевой коэффициент в числителе (если таковой имеется) имеет неотрицательную вещественную часть. Как легко показать при помощи компьютерной алгебры, при $k = 2$ нет никаких других решений с периодом $\leqslant 5$. Частичная теория была разработана Линессом [196, 197] и Куршаном и Гопинатом [172].

Интересным примером иного сорта, когда начальные значения вещественны, служит рекуррентность $X_n = |X_{n-1}| - X_{n-2}$ с периодом 9, обнаруженная Мортоном Брауном [34]. Получение нелинейных рекуррентностей с любым желаемым периодом $\geqslant 5$ может быть основано на „континуантах" [164].

1.25 Если через $T^{(k)}(n)$ обозначить наименьшее число перекладываний, необходимых для перемещения n дисков с k добавочными колышками (так что $T^{(1)}(n) = T_n$ и $T^{(2)}(n) = W_n$), то $T^{(k)}(\binom{n+1}{k}) \leqslant 2T^{(k)}(\binom{n}{k}) + T^{(k-1)}(\binom{n}{k-1})$. Не известно примеров пар (n, k), для которых это неравенство не является на самом деле равенством. Если k мало по сравнению с n, то формула $2^{n+1-k}\binom{n-1}{k-1}$ дает приемлемую (но не оптимальную) верхнюю границу для $T^{(k)}(\binom{n}{k})$.

1.26 Перестановка „порядка экзекуции“ может быть вычислена за $O(n \log n)$ шагов при всех m и n [141, упр. 5.1.1–2 и 5.1.1–5]. Бьерном Пооненом доказано, что неиосифовы множества с ровно четырьмя „гадкими парнями“ существуют при любых $n \equiv 0 \pmod 3$ и $n \geqslant 9$; в действительности таких множеств имеется по меньшей мере $\epsilon\binom{n}{4}$ при некотором $\epsilon > 0$. Путем обширных вычислений им также найдено, что единственным среди других $n < 24$ с неиосифовыми множествами является $n = 20$, которое имеет 236 таких множеств при $k = 14$ и два при $k = 13$. (Одно из последних — множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 17\}$, другое — его отражение относительно 21.) При $n = 15$ и $k = 9$ имеется единственное неиосифово множество, а именно множество $\{3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13\}$.

2.1 По этому поводу нет общего согласия — приемлемы три ответа. (1) Можно считать, что $\sum_{k=m}^{n} q_k$ всегда эквивалентна $\sum_{m \leqslant k \leqslant n}$; тогда указанная сумма равна нулю. (2) Можно было бы считать, что данная сумма есть $q_4 + q_3 + q_2 + q_1 + q_0$ — сумма по убывающим значениям k. Но это противоречит общепринятому соглашению, что $\sum_{k=1}^{n} q_k = 0$ при $n = 0$. (3) Можно также считать, что $\sum_{k=m}^{n} q_k = \sum_{k \leqslant n} q_k - \sum_{k<m} q_k$; тогда указанная сумма есть $-q_1 - q_2 - q_3$. Это соглашение может показаться странным, но оно удовлетворяет удобному правилу $\sum_{k=a}^{b} + \sum_{k=b+1}^{c} = \sum_{k=a}^{c}$ при всех a, b, c.

Лучше всего использовать обозначение $\sum_{k=m}^{n}$ только когда $n - m \geqslant -1$; тогда оба соглашения (1) и (3) дают одинаковый результат.

2.2 Это $|x|$. Величина $([x > 0] - [x < 0])$ часто называется „знаком x“ и обозначается '$\mathrm{sgn}(x)$': она равна $+1$ при $x > 0$, 0 при $x = 0$ и -1 при $x < 0$.

2.3 Первая сумма, разумеется, есть $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, вторая $a_4 + a_1 + a_0 + a_1 + a_4$, так как это сумма по элементам $k \in \{-2, -1, 0, +1, +2\}$. Переместительный закон в данном случае не выполняется, ибо функция $p(k) = k^2$ не является перестановкой. Некоторым значениям n (например, $n = 3$) не соответствует ни одного k, такого, что $p(k) = n$; другим (например, $n = 4$) соответствуют два таких k.

2.4 (a) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{4}\sum_{k=j+1}^{4} a_{ijk} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4} a_{ijk} = \big((a_{123} + a_{124}) + a_{134}\big) + a_{234}$.

(b) $\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ijk} = \sum_{k=3}^{4}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ijk} = a_{123} + \big(a_{124} + (a_{134} + a_{234})\big)$.

2.5 Один и тот же индекс 'k' использован для обозначения двух разных переменных суммирования, хотя k связан с внутренней суммой. Это широко распространенная ошибка в математике (и программировании). Результат будет правильным, если $a_j = a_k$ при всех j и k, $1 \leqslant j, k \leqslant n$.

2.6 Это $[1 \leqslant j \leqslant n](n-j+1)$. Здесь первый множитель необходим потому, что при $j < 1$ или $j > n$ должен получиться нуль.

2.7 Это $mx^{\overline{m-1}}$. Поэтому вариант разностного исчисления, основанный на ∇, а не на Δ, особо выделил бы *возрастающие* факториальные степени.

2.8 Это равно 0, если $m \geqslant 1$, и $1/|m|!$, если $m \leqslant 0$.

2.9 $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$ при целых m и n. Полагая $m = -n$, получаем, что $x^{\overline{-n}} = 1/(x-n)^{\overline{n}} = 1/(x-1)^{\underline{n}}$.

2.10 Другой возможный вариант записи правой части: $\mathrm{E}u\,\Delta v + v\,\Delta u$.

2.11 Разбейте левую часть на две суммы и во второй из них замените k на $k+1$.

2.12 Если $p(k) = n$, то $n+c = k + \big((-1)^k+1\big)c$ и $\big((-1)^k+1\big)$ четно; следовательно, $(-1)^{n+c} = (-1)^k$ и $k = n - (-1)^{n+c}c$. И обратно, это значение k дает $p(k) = n$.

2.13 Пусть $R_0 = \alpha$ и $R_n = R_{n-1} + (-1)^n(\beta + n\gamma + n^2\delta)$ при $n > 0$. Тогда $R(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta$. Подстановка $R_n = 1$ дает $A(n) = 1$. Подстановка $R_n = (-1)^n$ дает $A(n) + 2B(n) = (-1)^n$. Подстановка $R_n = (-1)^n n$ дает $-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$. Подстановка $R_n = (-1)^n n^2$ дает $B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2$. Следовательно, $2D(n) = (-1)^n(n^2+n)$ и искомая сумма равна $D(n)$.

2.14 Предложенное переписывание справедливо, поскольку мы имеем $k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} 1$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Просуммируем вначале по k; тогда кратная сумма сводится к

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (2^{n+1} - 2^j) = n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2)\,.$$

2.15 На первом шаге заменяем $k(k+1)$ на $2\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} j$. Второй шаг дает $⧉_n + \Box_n = \big(\sum_{k=1}^{n} k\big)^2 + \Box_n$.

2.16 $x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}$ согласно (2.52).

2.17 Воспользуйтесь индукцией для доказательства первых двух равенств и правилом (2.52) — для третьего. Вторая формула вытекает из первой.

2.18 Используйте те факты, что $(\Re z)^+ \leqslant |z|$, $(\Re z)^- \leqslant |z|$, $(\Im z)^+ \leqslant |z|$, $(\Im z)^- \leqslant |z|$ и $|z| \leqslant (\Re z)^+ + (\Re z)^- + (\Im z)^+ + (\Im z)^-$.

2.19 Умножьте обе части на $2^{n-1}/n!$ и положите $S_n = 2^n T_n/n! = S_{n-1} + 3\cdot 2^{n-1} = 3(2^n - 1) + S_0$. Решением будет $T_n = 3\cdot n! + n!/2^{n-1}$. (Как выяснится в гл. 4, T_n является целым числом только тогда, когда n равно 0 или степени 2.)

2.20 Метод приведения дает

$$S_n + (n+1)H_{n+1} = S_n + \Bigl(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} H_k\Bigr) + n + 1\,.$$

2.21 Выделение последнего члена суммы S_{n+1} дает $S_{n+1} = 1 - S_n$; выделение же первого члена дает

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (-1)^{n+1} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} (-1)^{n+1-k} \\ &= (-1)^{n+1} + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^{n-k} \\ &= (-1)^{n+1} + S_n\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $2S_n = 1 + (-1)^n$ и $S_n = [n \text{ четно}]$. Точно так же устанавливается, что

$$T_{n+1} = n + 1 - T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}(k+1) = T_n + S_n\,,$$

Следовательно, $2T_n = n + 1 - S_n$ и $T_n = \frac{1}{2}\bigl(n + [n \text{ нечетно}]\bigr)$. Наконец, тот же прием дает

$$\begin{aligned} U_{n+1} = (n+1)^2 - U_n &= U_n + 2T_n + S_n \\ &= U_n + n + [n \text{ нечетно}] + [n \text{ четно}] \\ &= U_n + n + 1\,. \end{aligned}$$

Итак, U_n — это треугольное число $\frac{1}{2}(n+1)n$.

„*Глубоко ошибочный трюизм, который повторяется во всех прописях и речах почтенных ораторов, сводится к тому, что мы должны иметь привычку обдумывать свои поступки. В действительности имеет место как раз обратное. Прогресс цивилизации выражается в умножении числа поведенческих актов, которые мы совершаем необдуманно. Мыслительные же акты подобны кавалерийским атакам, число которых весьма ограничено,— они требуют свежих лошадей и должны совершаться лишь в решающие моменты битвы.*“
— *А. Н. Уайтхед* [298]

2.22 Удвоенная общая сумма дает „ванильную“ сумму по $1 \leqslant j, k \leqslant n$, которая раскладывается и дает $\bigl(\sum_k a_k A_k\bigr)\bigl(\sum_k b_k B_k\bigr) - \bigl(\sum_k a_k B_k\bigr)\bigl(\sum_k b_k A_k\bigr)$.

2.23 (a) Этот подход дает четыре суммы, вычисление которых приводит к $2n + H_n - 2n + (H_n + \frac{1}{n+1} - 1)$. (Проще было бы заменить общий член на $1/k + 1/(k+1)$.) (b) Пусть $u(x) = 2x + 1$ и $\Delta v(x) = 1/x(x+1) = (x-1)^{\underline{-2}}$; тогда $\Delta u(x) = 2$ и $v(x) = -(x-1)^{\underline{-1}} = -1/x$. Ответ: $2H_n - \frac{n}{n+1}$.

2.24 Суммируя по частям, $\sum x^{\underline{m}} H_x \,\delta x = x^{\underline{m+1}} H_x/(m+1) - x^{\underline{m+1}}/(m+1)^2 + C$; следовательно, $\sum_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} H_k = n^{\underline{m+1}} \times \big(H_n - 1/(m+1)\big)/(m+1) + 0^{\underline{m+1}}/(m+1)^2$. В нашем случае $m=-2$, поэтому данная сумма сводится к $1-(H_n+1)/(n+1)$.

2.25 Вот некоторые основные аналоги:

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k \quad\longleftrightarrow\quad \prod_{k\in K} a_k^c = \Big(\prod_{k\in K} a_k\Big)^c$$

$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k \quad\longleftrightarrow\quad \prod_{k\in K} a_k b_k = \Big(\prod\nolimits_{k\in K} a_k\Big)\Big(\prod\nolimits_{k\in K} b_k\Big)$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)} \quad\longleftrightarrow\quad \prod_{k\in K} a_k = \prod_{p(k)\in K} a_{p(k)}$$

$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} \quad\longleftrightarrow\quad \prod_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \prod_{j\in J}\prod_{k\in K} a_{j,k}$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k} a_k[k\in K] \quad\longleftrightarrow\quad \prod_{k\in K} a_k = \prod_{k} a_k^{[k\in K]}$$

$$\sum_{k\in K} 1 = \#K \quad\longleftrightarrow\quad \prod_{k\in K} c = c^{\#K}$$

2.26 $P^2 = \big(\prod_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j a_k\big)\big(\prod_{1\leqslant j=k\leqslant n} a_j a_k\big)$. Первый сомножитель равен $\big(\prod_{k=1}^n a_k^n\big)^2$, а второй — $\prod_{k=1}^n a_k^2$. Следовательно, $P = \big(\prod_{k=1}^n a_k\big)^{n+1}$.

2.27 $\Delta(c^{\underline{x}}) = c^{\underline{x}}(c-x-1) = c^{\underline{x+2}}/(c-x)$. Подстановка $c=-2$ и уменьшение x на 2 дает $\Delta(-(-2)^{\underline{x-2}}) = (-2)^{\underline{x}}/x$, так что искомая сумма равна $(-2)^{\underline{-1}} - (-2)^{\underline{n-1}} = (-1)^n n! - 1$.

2.28 Незаконно изменение порядка суммирования при переходе от второй к третьей строке: члены этой суммы не сходятся абсолютно. Все остальное абсолютно правильно, за исключением того, что промежуточный результат $\sum_{k\geqslant 1}[k=j-1]k/j$ следовало бы, наверное, записать в виде $[j-1\geqslant 1](j-1)/j$ и упростить.

А бывает еще не абсолютно правильно.

2.29 Воспользуйтесь элементарными дробями для получения равенства

$$\frac{k}{4k^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1}\right).$$

Тогда множитель $(-1)^k$ заставит обе половинки каждого члена суммы сократиться с их соседями. Следовательно, ответом будет $-1/4 + (-1)^n/(8n+4)$.

2.30 $\sum_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^{\underline{2}} - a^{\underline{2}}) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a-1)$. Поэтому

$$(b-a)(b+a-1) = 2100 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\,.$$

Существует одно решение нашей задачи для каждого способа записи 2100 в виде произведения $x\cdot y$, где x — четное, а y — нечетное число: мы полагаем $a = \frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}$. Поэтому искомое число решений равно числу делителей $3\cdot 5^2\cdot 7$, а именно 12. В общем случае имеется $\prod_{p>2}(n_p+1)$ способов представления $\prod_p p^{n_p}$, где произведения берутся по простым числам.

2.31 $\sum_{j,k\geqslant 2} j^{-k} = \sum_{j\geqslant 2} 1/j^2(1-1/j) = \sum_{j\geqslant 2} 1/j(j-1)$. Аналогичным образом вторая сумма равна 3/4.

2.32 Если $2n \leqslant x < 2n+1$, то данные суммы суть $0 + \cdots + n + (x-n-1) + \cdots + (x-2n) = n(x-n) = (x-1) + (x-3) + \cdots + (x-2n+1)$. Если же $2n-1 \leqslant x < 2n$, то аналогичным образом обе суммы равны $n(x-n)$. (Забегая вперед, в гл. 3, отметим, что оба случая охватываются формулой $\lfloor\frac{1}{2}(x+1)\rfloor\bigl(x - \lfloor\frac{1}{2}(x+1)\rfloor\bigr)$.

2.33 Если множество K пусто, то $\bigwedge_{k\in K} a_k = \infty$. Вот основные аналоги:

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k \quad\longleftrightarrow\quad \bigwedge_{k\in K}(c+a_k) = c + \bigwedge\nolimits_{k\in K} a_k$$

$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k \longleftrightarrow \bigwedge_{k\in K}\min(a_k,b_k) = \min\Bigl(\bigwedge\nolimits_{k\in K} a_k, \bigwedge\nolimits_{k\in K} b_k\Bigr)$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)} \quad\longleftrightarrow\quad \bigwedge_{k\in K} a_k = \bigwedge_{p(k)\in K} a_{p(k)}$$

$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} \quad\longleftrightarrow\quad \bigwedge_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \bigwedge_{j\in J}\bigwedge_{k\in K} a_{j,k}$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_k a_k[k\in K] \quad\longleftrightarrow\quad \bigwedge_{k\in K} a_k = \bigwedge_k a_k\cdot\infty^{(k\notin K)}$$

2.34 Пусть $K^+ = \{k \mid a_k \geqslant 0\}$ и $K^- = \{k \mid a_k < 0\}$. Тогда, если например n нечетно, мы выбираем F_n равным $F_{n-1}\cup E_n$, где подмножество $E_n \subseteq K^-$ настолько большое, что $\sum_{k\in(F_{n-1}\cap K^+)} a_k - \sum_{k\in E_n}(-a_k) < A^-$.

Перестановка, поглощающая члены одного знака быстрее, чем другого, может сделать сумму равной какому угодно значению.

2.35 То, что сумма Гольдбаха равна

$$\sum_{m,n\geqslant 2} m^{-n} = \sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{m(m-1)} = 1,$$

можно показать следующим образом. Если развернуть каждый ее член в сумму геометрической прогрессии, то она равна $\sum_{k\in P,\, l\geqslant 1} k^{-l}$; поэтому доказательство будет завершено, как только мы установим взаимно однозначное соответствие между упорядоченными парами (m,n) с $m,n \geqslant 2$ и упорядоченными парами (k,l) с $k \in P$ и $l \geqslant 1$, где $m^n = k^l$ в случае соответствия этих пар. Если $m \notin P$, мы полагаем, что $(m,n) \longleftrightarrow (m^n, 1)$, а если $m = a^b \in P$, полагаем, что $(m,n) \longleftrightarrow (a^n, b)$.

При подобном самоописании последовательности Голомба вряд ли кто захочет с ней познакомиться.

2.36 (a) По определению, $g(n) - g(n-1) = f(n)$. (b) Согласно части (a), $g\bigl(g(n)\bigr) - g\bigl(g(n-1)\bigr) = \sum_k f(k)\bigl[g(n-1) < k \leqslant g(n)\bigr] = n\bigl(g(n) - g(n-1)\bigr) = nf(n)$ (c) И снова, согласно части (a), $g\bigl(g(g(n))\bigr) - g\bigl(g(g(n-1))\bigr)$ есть

$$\begin{aligned}
&\sum_k f(k)\bigl[g(g(n-1)) < k \leqslant g(g(n))\bigr] \\
&\quad = \sum_{j,k} j\,\bigl[j = f(k)\bigr]\bigl[g(g(n-1)) < k \leqslant g(g(n))\bigr] \\
&\quad = \sum_{j,k} j\,\bigl[j = f(k)\bigr]\bigl[g(n-1) < j \leqslant g(n)\bigr] \\
&\quad = \sum_{j} j\,\bigl(g(j) - g(j-1)\bigr)\bigl[g(n-1) < j \leqslant g(n)\bigr] \\
&\quad = \sum_{j} jf(j)\,\bigl[g(n-1) < j \leqslant g(n)\bigr] \\
&\quad = n\sum_{j} j\,\bigl[g(n-1) < j \leqslant g(n)\bigr].
\end{aligned}$$

Колин Мэллоуз заметил, что данная последовательность может быть также определена рекуррентно:

$$f(1) = 1; \quad f(n+1) = 1 + f\bigl(n + 1 - f(f(n))\bigr) \quad \text{при } n \geqslant 0.$$

2.37 (Р. Л. Г. полагает, что, вероятно, нельзя; Д. Э. К. считает, что, вероятно, можно; О. П. предпочитает не компрометировать себя.)

3.1 $m = \lfloor \lg n \rfloor$, $l = n - 2^m = n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$.

3.2 (a) $\lfloor x + .5 \rfloor$; (b) $\lceil x - .5 \rceil$.

3.3 Это $\lfloor mn - \{m\alpha\}n/\alpha \rfloor = mn - 1$, поскольку $0 < \{m\alpha\} < 1$.

3.4 Нечто, где требуется не доказательство, а только счастливая догадка. (Угадали?)

3.5 Имеем $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor$ согласно (3.8) и (3.6). Следовательно, $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor \iff \lfloor n\{x\} \rfloor = 0 \iff 0 \leqslant n\{x\} < 1 \iff \{x\} < 1/n$, если n — целое положительное число. (Заметьте, что в этом случае $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$ при любом x.)

3.6 $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lceil x \rceil) \rfloor$.

3.7 $\lfloor n/m \rfloor + n \bmod m$.

3.8 Если в каждом из ящиков содержится $< \lceil n/m \rceil$ предметов, то $n \leqslant (\lceil n/m \rceil - 1)m$, откуда $n/m + 1 \leqslant \lceil n/m \rceil$, что противоречит (3.5). Другое доказывается аналогично.

3.9 Имеем $m/n - 1/q = (n \operatorname{mumble} m)/qn$. Данный процесс должен завершаться, поскольку $0 \leqslant n \operatorname{mumble} m < m$. Знаменатели подобных дробей строго возрастают, а потому они различны, ибо $qn/(n \operatorname{mumble} m) > q$.

3.10 Выражение $\lceil x + \frac{1}{2} \rceil - \big[(2x+1)/4 — \text{не целое}\big]$ — это ближайшее целое к x, если $\{x\} \neq \frac{1}{2}$; в противном случае — это ближайшее четное целое число. (См. упр. 2.) Таким образом, данная формула дает „несмещенный" способ округления.

3.11 Если n — целое число, то $\alpha < n < \beta \iff \lfloor \alpha \rfloor < n < \lceil \beta \rceil$. Когда a и b — целые, количество целых чисел, удовлетворяющих условию $a < n < b$, равно $(b - a - 1)[b > a]$. Поэтому, если бы было $\alpha = \beta =$ целое, мы получили бы неправильный ответ.

3.12 Вычтем $\lfloor n/m \rfloor$ из обеих частей в соответствии с (3.6), получая $\lceil (n \bmod m)/m \rceil = \lfloor (n \bmod m + m - 1)/m \rfloor$. Тогда обе части становятся равными $[n \bmod m > 0]$, так как $0 \leqslant n \bmod m < m$.

Более краткое, не столь прямое доказательство сводится просто к наблюдению, что первый член в (3.24) должен равняться последнему члену в (3.25).

3.13 Если они образуют разбиение, то формула для $N(\alpha, n)$ из текста влечет за собой, что $1/\alpha + 1/\beta = 1$, поскольку коэффициенты при n в уравнении $N(\alpha, n) + N(\beta, n) = n$ должны быть согласованы так, чтобы данное уравнение было справедливым при большом n. Следовательно, числа α и β либо оба рациональны, либо оба иррациональны. Если они оба иррациональны, то мы действительно получаем разбиение, как и показано в тексте. Если же они оба могут быть записаны с числителем m, то величина $m - 1$ не встретится ни в одном из спектров, тогда так m встретится в обоих. (Тем не менее, Голомб [77] обнаружил, что множества $\{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \geqslant 1\}$ и $\{\lceil n\beta \rceil - 1 \mid n \geqslant 1\}$ всегда должны образовывать разбиение, если $1/\alpha + 1/\beta = 1$.)

3.14 Если $ny = 0$, то это очевидно из (3.22); в противном случае это справедливо на основании (3.21) и (3.6).

3.15 Подставьте $\lceil mx \rceil$ вместо n в (3.24), получая $\lceil mx \rceil = \lceil x \rceil + \lceil x - \frac{1}{m} \rceil + \cdots + \lceil x - \frac{m-1}{m} \rceil$.

3.16 Можно убедиться в справедливости формулы $n \bmod 3 = 1 + \frac{1}{3}\big((\omega - 1)\omega^n - (\omega + 2)\omega^{2n}\big)$, проверив ее при $0 \leqslant n < 3$.

Общая формула для $n \bmod m$ при любом целом положительном m приводится в упр. 7.25.

3.17 $\sum_{j,k}[0 \leqslant k < m][1 \leqslant j \leqslant x + k/m]$
$= \sum_{j,k}[0 \leqslant k < m][1 \leqslant j \leqslant \lceil x \rceil]\bigl[k \geqslant m(j-x)\bigr]$
$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant \lceil x \rceil}\sum_k [0 \leqslant k < m] - \sum_{j=\lceil x \rceil}\sum_k \bigl[0 \leqslant k < m(j-x)\bigr]$
$= m\lceil x \rceil - \bigl\lceil m(\lceil x \rceil - x)\bigr\rceil = -\lceil -mx \rceil = \lfloor mx \rfloor$.

3.18 Имеем

$$S = \sum_{0 \leqslant j < \lceil n\alpha \rceil} \sum_{k \geqslant n} \bigl[j\alpha^{-1} \leqslant k < (j+\nu)\alpha^{-1}\bigr]\,.$$

Члены с $j \leqslant n\alpha - 1 \leqslant n\alpha - \nu$ не существенны, поскольку $(j+\nu)\alpha^{-1} \leqslant n$. Следовательно, $j = \lfloor n\alpha \rfloor$ — единственный существенный случай, и искомая величина в этом случае равна $\bigl\lceil(\lfloor n\alpha \rfloor + \nu)\alpha^{-1}\bigr\rceil - n \leqslant \lceil \nu\alpha^{-1} \rceil$.

3.19 Необходимо и достаточно, чтобы b было целым. (Если b — целое число, $\log_b x$ — непрерывная возрастающая функция, которая принимает целочисленные значения только в целых точках. Если b — нецелое число, то это условие нарушается при $x = b$.)

3.20 Имеем $\sum_k kx[\alpha \leqslant kx \leqslant \beta] = x\sum_k k\bigl[\lceil \alpha/x \rceil \leqslant k \leqslant \lfloor \beta/x \rfloor\bigr]$, что в сумме дает $\frac{1}{2}x\bigl(\lfloor \beta/x \rfloor\lfloor \beta/x + 1 \rfloor - \lceil \alpha/x \rceil\lceil \alpha/x - 1 \rceil\bigr)$.

3.21 Если $10^n \leqslant 2^M < 10^{n+1}$, то имеется ровно $n+1$ таких степеней 2, поскольку для каждого k имеется ровно одна такая степень 2 из k цифр. Ответ, поэтому, $1 + \lfloor M \log 2 \rfloor$.

Замечание: найти число степеней двойки с первой цифрой l для $l > 1$ труднее, оно равно $\sum_{0 \leqslant n \leqslant M}\bigl(\lfloor n\log 2 - \log l \rfloor - \lfloor n\log 2 - \log(l+1) \rfloor\bigr)$.

3.22 Все члены при n и $n-1$ одинаковы, за исключением k-го, где $n = 2^{k-1}q$ и q — нечетно; имеем $S_n = S_{n-1}+1$ и $T_n = T_{n-1}+2^kq$. Следовательно, $S_n = n$ и $T_n = n(n+1)$.

3.23 $X_n = m \iff \frac{1}{2}m(m-1) < n \leqslant \frac{1}{2}m(m+1) \iff m^2 - m + \frac{1}{4} < 2n < m^2 + m + \frac{1}{4} \iff m - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \frac{1}{2}$.

3.24 Пусть $\beta = \alpha/(\alpha+1)$. Тогда число вхождений целого неотрицательного числа m в $\mathrm{Spec}(\beta)$ ровно на единицу превышает число его вхождений в $\mathrm{Spec}(\alpha)$. Почему? Потому что $N(\beta, n) = N(\alpha, n) + n + 1$.

3.25 Если бы, продолжая предпринятое в тексте, мы сумели найти m, такое, что $K_m \leqslant m$, то мы нарушили бы указанное неравенство для $n+1$, когда $n = 2m+1$ (а также когда $n = 3m+1$ и $n = 3m+2$). Но для существования такого $m = n'+1$ требуется, чтобы $2K_{\lfloor n'/2 \rfloor} \leqslant n'$ или $3K_{\lfloor n'/3 \rfloor} \leqslant n'$, т. е. чтобы

$$K_{\lfloor n'/2 \rfloor} \leqslant \lfloor n'/2 \rfloor \qquad \text{или} \qquad K_{\lfloor n'/3 \rfloor} \leqslant \lfloor n'/3 \rfloor\,.$$

Ага. Это уводит все дальше и дальше, приводя к тому, что $K_0 \leqslant 0$, однако $K_0 = 1$.

Что нам действительно нужно доказать, так это то, что K_n *строго больше* n при каждом $n > 0$. А это уже легко доказать по индукции, несмотря на то что это более сильный результат, чем тот, который мы не смогли доказать!

(Данное упражнение преподает важный урок — это в большей степени выяснение сущности индукции, нежели свойства функции пол.)

„Когда вы пытаетесь придумать доказательство с помощью математической индукции, вам оно может не удаваться по двум противоположным причинам. Оно может вам не удаваться и потому, что вы пытаетесь доказать слишком много: ваше $P(n+1)$ — слишком тяжелый груз. Оно может вам не удаваться и потому, что вы пытаетесь доказать слишком мало: ваше $P(n)$ — слишком слабая опора. Вообще, вы должны уравновесить утверждение вашей теоремы так, чтобы опора была как раз достаточна для груза."

— Д. Пойа [242]

3.26 Доказательство по индукции с использованием более сильного предположения

$$D_n^{(q)} \leqslant (q-1)\left(\left(\frac{q}{q-1}\right)^{n+1} - 1\right) \qquad \text{при } n \geqslant 0.$$

3.27 Если $D_n^{(3)} = 2^m b - a$, где a равно 0 или 1, то $D_{n+b}^{(3)} = 3^m b - a$.

3.28 Ключевым моментом является то, что $a_n = m^2$ влечет за собой $a_{n+2k+1} = (m+k)^2 + m - k$ и $a_{n+2k+2} = (m+k)^2 + 2m$ при $0 \leqslant k \leqslant m$; отсюда $a_{n+2m+1} = (2m)^2$. Поэтому искомое решение может (следуя Карлу Уитти) быть записано в виде

$$a_{n-1} = 2^l + \left\lfloor \left(\frac{n-l}{2}\right)^2 \right\rfloor, \qquad \text{где } 2^l + l \leqslant n < 2^{l+1} + l + 1.$$

3.29 Величина $D(\alpha', \lfloor \alpha n \rfloor)$ не превышает максимума абсолютного значения выражения

$$s(\alpha', \lfloor n\alpha \rfloor, \nu') \\ = -s(\alpha, n, \nu) - S + \epsilon + \{0 \text{ или } 1\} + \nu' - \{0 \text{ или } 1\}.$$

3.30 $X_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$ (доказывается по индукции), и X_n — целое число.

3.31 Вот „элегантное", „впечатляющее" доказательство, но о том, как оно было обнаружено, остается только догадываться:

Это аргументация на уровне пола.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor &= \lfloor x + \lfloor y \rfloor \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \\ &\leqslant \lfloor x + \tfrac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor + \tfrac{1}{2} \rfloor \\ &= \lfloor 2x + \lfloor 2y \rfloor \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor. \end{aligned}$$

Но существует также простое графическое доказательство, основанное на том наблюдении, что достаточно рассмотреть только случай $0 \leqslant x, y < 1$. Тогда данное соотношение графически выглядит вот как:

1 (над диагональю)	$\leqslant$	1	2	
0 (под диагональю)		0	1	.

Возможен и несколько более сильный результат, а именно

$$\lceil x\rceil + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lceil 2x\rceil + \lfloor 2y\rfloor\,,$$

но это является усилением только при $\{x\} = \frac{1}{2}$. Если же заменить (x, y) на $(-x, x+y)$ и применить рефлексивный закон (3.4), то получим

$$\lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor 2x\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x+2y\rfloor\,.$$

3.32 Обозначим интересующую нас сумму через $f(x)$. Поскольку $f(x) = f(-x)$, то можно считать, что $x \geqslant 0$. Члены суммы ограничены величиной 2^k при $k \to -\infty$ и величиной $x^2/2^k$ при $k \to +\infty$, так что данная сумма существует при любом вещественном x.

Имеем $f(2x) = 2\sum_k 2^{k-1}\|x/2^{k-1}\|^2 = 2f(x)$. Пусть $f(x) = l(x) + r(x)$, где $l(x)$ — исходная сумма при $k \leqslant 0$ и $r(x)$ — исходная сумма при $k > 0$. Тогда $l(x+1) = l(x)$ и $l(x) \leqslant 1/2$ при любом x. Если $0 \leqslant x < 1$, то $r(x) = x^2/2 + x^2/4 + \cdots = x^2$ и $r(x+1) = (x-1)^2/2 + (x+1)^2/4 + (x+1)^2/8 + \cdots = x^2 + 1$. Следовательно, $f(x+1) = f(x) + 1$, если $0 \leqslant x < 1$.

Теперь можно доказать по индукции, что $f(x+n) = f(x)+n$ при любом целом $n \geqslant 0$, если $0 \leqslant x < 1$. В частности, $f(n) = n$. Поэтому в общем случае, $f(x) = 2^{-m}f(2^m x) = 2^{-m}\lfloor 2^m x\rfloor + 2^{-m}f(\{2^m x\})$. Но $f(\{2^m x\}) = l(\{2^m x\}) + r(\{2^m x\}) \leqslant \frac{1}{2} + 1$, поэтому $\bigl|f(x) - x\bigr| \leqslant \bigl|2^{-m}\lfloor 2^m x\rfloor - x\bigr| + 2^{-m}\cdot\frac{3}{2} \leqslant 2^{-m}\cdot\frac{5}{2}$ при любом целом m.

Неизбежный вывод состоит в том, что $f(x) = |x|$ при любом вещественном x.

3.33 Пусть $r = n - \frac{1}{2}$ — радиус окружности. (a) Между клетками доски $2n-1$ горизонтальных прямых и $2n-1$ вертикальных прямых, причем окружность пересекает каждую из этих прямых дважды. Поскольку r^2 — не целое число, то по теореме Пифагора окружность не проходит через угол никакой клетки. Следовательно, окружность проходит через столько клеток, сколько имеется точек ее пересечения с прямыми, а именно $8n-4 = 8r$. (Это то же самое, что и число клеток по краям доски.) (b) $f(n,k) = 4\lfloor\sqrt{r^2-k^2}\rfloor$.

Из (a) и (b) вытекает, что

$$\tfrac{1}{4}\pi r^2 - 2r \leqslant \sum_{0<k<r}\lfloor\sqrt{r^2-k^2}\rfloor \leqslant \tfrac{1}{4}\pi r^2\,, \qquad r = n - \tfrac{1}{2}.$$

См. также книгу Серпинского [272, часть 2, с. 42–43]. — Перев.*

Задача получения более точных оценок этой суммы представляет собой знаменитую проблему теории чисел, которой занимались Гаусс и многие другие; см. Диксон [109, том 2, гл. 6].

3.34 (a) Пусть $m = \lceil \lg n \rceil$. Можно добавить еще $2^m - n$ членов, чтобы упростить вычисления в граничных точках:

$$\begin{aligned} f(n) + (2^m - n)m = \sum_{k=1}^{2^m} \lceil \lg k \rceil &= \sum_{j,k} j[j = \lceil \lg k \rceil][1 \leqslant k \leqslant 2^m] \\ &= \sum_{j,k} j[2^{j-1} < k \leqslant 2^j][1 \leqslant j \leqslant m] \\ &= \sum_{j=1}^{m} j\,2^{j-1} = 2^m(m-1) + 1\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(n) = nm - 2^m + 1$.

(b) Имеем $\lceil n/2 \rceil = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, откуда следует, что решение рекуррентности общего вида $g(n) = a(n) + g(\lceil n/2 \rceil) + g(\lfloor n/2 \rfloor)$ должно удовлетворять соотношению $\Delta g(n) = \Delta a(n) + \Delta g(\lfloor n/2 \rfloor)$. В частности, если $a(n) = n - 1$, то соотношению $\Delta f(n) = 1 + \Delta f(\lfloor n/2 \rfloor)$ удовлетворяет число битов в двоичном представлении n, а именно $\lceil \lg(n+1) \rceil$. Остается перейти от Δ к Σ.

Более прямое решение может быть основано на соотношениях $\lceil \lg 2j \rceil = \lceil \lg j \rceil + 1$ и $\lceil \lg(2j-1) \rceil = \lceil \lg j \rceil + [j > 1]$ для $j \geqslant 1$.

3.35 $(n+1)^2 n!\, e = A_n + (n+1)^2 + (n+1) + B_n$, где

$$A_n = \frac{(n+1)^2 n!}{0!} + \frac{(n+1)^2 n!}{1!} + \cdots + \frac{(n+1)^2 n!}{(n-1)!}$$

кратно n, а

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(n+1)^2 n!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+3)!} + \cdots \\ &= \frac{n+1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots\right) \\ &< \frac{n+1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+3)} + \cdots\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} \end{aligned}$$

меньше 1. Следовательно, ответ $2 \bmod n$.

3.36 Эта сумма равна

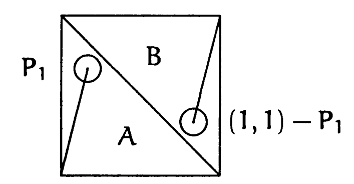
$$\begin{aligned} &\sum_{k,l,m} 2^{-l} 4^{-m} \big[m = \lfloor \lg l \rfloor\big] \big[l = \lfloor \lg k \rfloor\big] [1 < k < 2^{2^n}] \\ &\quad = \sum_{k,l,m} 2^{-l} 4^{-m} [2^m \leqslant l < 2^{m+1}][2^l \leqslant k < 2^{l+1}][0 \leqslant m < n] \\ &\quad = \sum_{l,m} 4^{-m} [2^m \leqslant l < 2^{m+1}][0 \leqslant m < n] \\ &\quad = \sum_{m} 2^{-m} [0 \leqslant m < n] = 2(1 - 2^{-n})\,. \end{aligned}$$

3.37 Сначала рассмотрите случай $m < n$, который распадается на подслучаи в зависимости от того, меньше ли m, чем $\frac{1}{2}n$, или нет; затем покажите, что обе части изменяются одинаково, когда m увеличивается на n.

Несмотря на формулировку, на самом деле это всего лишь задача уровня 4.

3.38 Самое большее одно x_k может быть нецелым числом. Отбросим все целые x_k и предположим, что осталось n чисел. Если $\{x\} \neq 0$, то среднее значение $\{mx\}$ при $m \to \infty$ лежит между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$; следовательно, $\{mx_1\}+\cdots+\{mx_n\}-\{mx_1+\cdots+mx_n\}$ не может иметь нулевое среднее значение при $n > 1$.

Только что проведенное рассуждение основано на трудной теореме о равномерном распределении. Однако возможно элементарное доказательство. Вот его набросок при $n = 2$. Пусть P_m — точка $(\{mx\}, \{my\})$. Разделим единичный квадрат $0 \leqslant x, y < 1$ на треугольные области A и B, для которых $x + y < 1$ и $x + y \geqslant 1$. Мы хотим показать, что $P_m \in B$ при некотором m, если $\{x\}$ и $\{y\}$ отличны от нуля. Если $P_1 \in B$, то показывать нечего. В противном случае найдется круг D радиуса $\epsilon > 0$ с центром в P_1, такой, что $D \subseteq A$. По принципу ящиков Дирихле последовательность $P_1, \ldots, P_N$ должна содержать две точки с $|P_k - P_j| < \epsilon$ и $k > j$, если N достаточно велико.



Отсюда следует, что P_{k-j-1} лежит в ϵ-окрестности точки $(1,1) - P_1$; следовательно, $P_{k-j-1} \in B$.

3.39 Замените j на $b-j$ и добавьте к этой сумме член с $j = 0$, так что для вычисления суммы по m можно воспользоваться упр. 15. В результате члены

$$\lceil x/b^k \rceil - \lceil x/b^{k+1} \rceil + b - 1$$

телескопируются при суммировании по k.

3.40 Пусть $\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = 4k + r$, где $-2 \leqslant r < 2$, и пусть $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Тогда по индукции могут быть установлены следующие зависимости:

Сегмент	r	m	x	y	тогда и только тогда, когда
W_k	-2	$2k-1$	$m(m+1)-n-k$	k	$(2k-1)(2k-1) \leqslant n \leqslant (2k-1)(2k)$
S_k	-1	$2k-1$	$-k$	$m(m+1)-n+k$	$(2k-1)(2k) < n < (2k)(2k)$
E_k	0	$2k$	$n-m(m+1)+k$	$-k$	$(2k)(2k) \leqslant n \leqslant (2k)(2k+1)$
N_k	1	$2k$	k	$n-m(m+1)-k$	$(2k)(2k+1) < n < (2k+1)(2k+1)$

Таким образом, если $k \geqslant 1$, то W_k является сегментом длины $2k$ там, где путь идет на запад и $y(n) = k$; S_k — сегментом длины $2k-2$ там, где путь идет на юг и $x(n) = -k$; и т. д. (a) Поэтому требуемая формула имеет вид

$$y(n) = (-1)^m\Big(\big(n - m(m+1)\big) \cdot \big[\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor \text{ нечетное}\big] - \lceil \tfrac{1}{2}m \rceil\Big).$$

(b) На всех сегментах $k = \max\big(|x(n)|, |y(n)|\big)$. На сегментах W_k и S_k имеем $x < y$ и $n + x + y = m(m+1) = (2k)^2 - 2k$; на сегментах E_k и N_k имеем $x \geqslant y$ и $n - x - y = m(m+1) = (2k)^2 + 2k$. Следовательно, знак определяется по формуле $(-1)^{(x(n)<y(n))}$.

3.41 Поскольку $1/\phi + 1/\phi^2 = 1$, то указанные последовательности действительно разбивают все целые положительные числа. А поскольку условие $g(n) = f\big(f(n)\big) + 1$ определяет f и g единственным образом, то нужно лишь показать, что $\big\lfloor \lfloor n\phi \rfloor \phi \big\rfloor + 1 = \lfloor n\phi^2 \rfloor$ при любом $n > 0$. Это вытекает из упр. 3 при $\alpha = \phi$ и $n = 1$.

3.42 Нет. Рассуждение, подобное проведенному в тексте и упр. 13 анализу случая с двумя спектрами, показывает, что разбиение на три части имеет место тогда и только тогда, когда $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma = 1$ и

$$\left\{\frac{n+1}{\alpha}\right\} + \left\{\frac{n+1}{\beta}\right\} + \left\{\frac{n+1}{\gamma}\right\} = 1$$

при любом $n > 0$. Однако по теореме о равномерном распределении среднее значение последовательности $\big\{(n+1)/\alpha\big\}$ равно $1/2$, если α иррационально. Все параметры не могут быть рациональны, а если $\gamma = m/n$, то среднее значение равно $3/2 - 1/(2n)$. Следовательно, γ должно быть целым числом, но это тоже не годится. (Имеется также доказательство невозможности, в котором используются лишь простые соображения — без теоремы о равномерном распределении; см. [84].)

3.43 Один шаг развертывания рекуррентности для чисел K_n дает минимум из четырех чисел $1 + a + a \cdot b \cdot K_{\lfloor (n-1-a)/(a \cdot b) \rfloor}$, где каждое из чисел a и b равно либо 2, либо 3. (Подобное упрощение требует применения правила (3.11) для удаления „полов" внутри „полов" вместе с тождеством $x + \min(y, z) = \min(x+y, x+z)$. Следует опустить члены с отрицательными индексами, т. е. с индексами $n - 1 - a < 0$.)

Продолжая в таком духе, мы приходим к следующей интерпретации: K_n — наименьшее число $> n$ в мультимножестве S всех чисел вида

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \cdots + a_1 a_2 a_3 \ldots a_m,$$

где $m \geqslant 0$ и каждое a_k равно либо 2, либо 3. Так, в мультимножестве

$$S = \{1, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 19, 21, 22, 27, 28, 31, 31, \ldots\}$$

число 31 встречается „дважды“, поскольку оно имеет два представления $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 1 + 3 + 9 + 18$. (Майкл Фредмен [318] показал, что $\lim_{n\to\infty} K_n/n = 1$, т. е. между элементами S не бывает слишком больших промежутков).

3.44 Пусть $d_n^{(q)} = D_{n-1}^{(q)} \operatorname{mumble}(q-1)$, так что $D_n^{(q)} = (qD_{n-1}^{(q)} + d_n^{(q)})/(q-1)$ и $a_n^{(q)} = \lceil D_{n-1}^{(q)}/(q-1)\rceil$. Тогда $D_{k-1}^{(q)} \leqslant (q-1)n \iff a_k^{(q)} \leqslant n$, откуда вытекает требуемое. (Это решение найдено Эйлером [380], который устанавливал a и d последовательно, не догадываясь, что достаточно одной последовательности $D_n^{(q)}$.)

... такому простому.

3.45 Пусть $\alpha > 1$ удовлетворяет условию $\alpha + 1/\alpha = 2m$. Тогда выясняется, что $2Y_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$, и отсюда следует, что $Y_n = \lceil \alpha^{2^n}/2\rceil$.

3.46 Данное указание вытекает из (3.9), так как $2n(n+1) = \lfloor 2(n+\frac{1}{2})^2\rfloor$. Пусть $n + \theta = (\sqrt{2}^{\,l} + \sqrt{2}^{\,l-1})m$ и $n' + \theta' = (\sqrt{2}^{\,l+1} + \sqrt{2}^{\,l})m$, где $0 \leqslant \theta, \theta' < 1$. Тогда $\theta' = 2\theta \bmod 1 = 2\theta - d$, где d равно 0 или 1. Мы хотим доказать, что $n' = \lfloor \sqrt{2}(n+\frac{1}{2})\rfloor$, а это равенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$0 \leqslant \theta'(2-\sqrt{2}\,) + \sqrt{2}(1-d) < 2\,.$$

Относительно решения рекуррентности отметим, что $\operatorname{Spec}(1 + 1/\sqrt{2}\,)$ и $\operatorname{Spec}(1+\sqrt{2}\,)$ образуют разбиение всех целых положительных чисел, следовательно, любое целое положительное число a может быть записано единственным образом в виде $a = \lfloor(\sqrt{2}^{\,l} + \sqrt{2}^{\,l-1})m\rfloor$, где l и m — целые числа, причем m — нечетное и $l \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что $L_n = \lfloor(\sqrt{2}^{\,l+n} + \sqrt{2}^{\,l+n-1})m\rfloor$.

3.47 (a) $c = -\frac{1}{2}$; (b) c — целое; (c) $c = 0$; (d) c — произвольное число. Относительно более общих результатов см. ответ к упр. 1.2.4–40 в [139].

3.48 Положим $x^{:0} = 1$ и $x^{:(k+1)} = x\lfloor x^{:k}\rfloor$, а также $a_k = \{x^{:k}\}$ и $b_k = \lfloor x^{:k}\rfloor$; тогда наше тождество запишется как $x^3 = 3x^{:3} + 3a_1a_2 + a_1^3 - 3b_1b_2 + b_1^3$. Поскольку $a_k + b_k = x^{:k} = xb_{k-1}$ для $k \geqslant 0$, имеем $(1-xz)(1+b_1z+b_2z^2+\cdots) = 1 - a_1z - a_2z^2 - \cdots$. Следовательно,

$$\frac{1}{1-xz} = \frac{1+b_1z+b_2z^2+\cdots}{1-a_1z-a_2z^2-\cdots}\,.$$

Возьмем логарифм от обеих частей, чтобы отделить a от b. Дифференцируя затем по z, получаем

$$\frac{x}{1-xz} = \frac{a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots}{1-a_1z-a_2z^2-\cdots} + \frac{b_1+2b_2z+3b_3z^2+\cdots}{1+b_1z+b_2z^2+\cdots}\,.$$

Коэффициент при z^{n-1} в левой части равен x^n; в правой части для этого коэффициента имеем формулу, совпадающую с нашим тождеством при $n = 3$. Можно вывести аналогичные тождества и для более общего произведения $x_0x_1 \ldots x_{n-1}$ [340].

3.49 (Решение Генриха Ролечека.) Можно заменить (α, β) на $(\{\beta\}, \alpha + \lfloor\beta\rfloor)$ без изменения $\lfloor n\alpha\rfloor + \lfloor n\beta\rfloor$. Следовательно, условия $\alpha = \{\beta\}$ является необходимым. Оно же является и достаточным. Действительно, пусть $m = \lfloor\beta\rfloor$ — наименьший элемент заданного мультимножества, и пусть S — мультимножество, полученное из заданного вычитанием mn из n-го в порядке возрастания элемента при всех n. Если $\alpha = \{\beta\}$, то последовательные элементы S отличаются либо на 0, либо на 2; следовательно, мультимножество $\frac{1}{2}S = \mathrm{Spec}(\alpha)$ определяет α.

Более интересная (еще не решенная) задача: выяснить, когда заданное мультимножество определяет неупорядоченную пару $\{\alpha, \beta\}$, если как α, так и β меньше 1.

3.50 Согласно неопубликованным заметкам Уильяма А. Вича, достаточно, чтобы $\alpha\beta$, β и 1 были линейно независимы над множеством рациональных чисел.

3.51 Как замечает Г. С. Вильф, функциональное уравнение $f(x^2-1) = f(x)^2$ определяло бы $f(x)$ при любом $x \geqslant \phi$, если бы функция $f(x)$ была задана на некотором интервале $(\phi, \phi + \epsilon)$.

3.52 Существует бесконечное количество способов разбиения всех целых положительных чисел на три или более обобщенных спектра при *иррациональных* α_k; например,

$$\mathrm{Spec}(2\alpha; 0) \cup \mathrm{Spec}(4\alpha; -\alpha) \cup \mathrm{Spec}(4\alpha; -3\alpha) \cup \mathrm{Spec}(\beta; 0).$$

Но суть в том, что все такие разбиения возникают в результате „расширения“ основного спектра $\mathrm{Spec}(\alpha) \cup \mathrm{Spec}(\beta)$; см. [87]. Все известные примеры с рациональными α_k, например

$$\mathrm{Spec}(7; -3) \cup \mathrm{Spec}(\tfrac{7}{2}; -1) \cup \mathrm{Spec}(\tfrac{7}{4}; 0),$$

используют параметры как в сформулированном предположении, которое принадлежит А. С. Френкелю [322].

3.53 Частичные результаты обсуждены в [391, с. 30–31]. Жадный алгоритм, вероятно, не заканчивается.

4.1 Это 1, 2, 4, 6, 16, 12.

4.2 Заметьте, что $m_p + n_p = \min(m_p, n_p) + \max(m_p, n_p)$. Рекуррентность $\text{НОК}(m, n) = \bigl(n/(n \bmod m)\bigr)\, \text{НОК}(n \bmod m, m)$ правомерна, но вычислять с ее помощью величины НОК нецелесообразно; наилучший из известных способов вычисления $\text{НОК}(m, n)$ — сначала вычислить $\text{НОД}(m, n)$, а затем разделить mn на этот НОД.

4.3 Это верно, если x — целое число, однако функция $\pi(x)$ определена при всех вещественных x. Правильная формула

$$\pi(x) - \pi(x-1) = \bigl[\lfloor x\rfloor \text{ — простое число}\bigr]$$

легко проверяется.

4.4 Между дробями $\frac{1}{0}$ и $\frac{0}{-1}$ оказалось бы отраженное слева направо дерево Штерна—Броко с отрицательными знаменателями у всех дробей и т. д. Так что результирующее дерево содержит *все* дроби m/n с $m \perp n$. Условие $m'n - mn' = 1$ остается справедливым в процессе всего построения. Подобную конструкцию называют *венком Штерна—Броко*, поскольку для удобства последнюю дробь $\frac{0}{1}$ можно считать идентичной первой дроби $\frac{0}{1}$, соединяя тем самым наверху деревья в венок. Венки Штерна—Броко имеют интересные применения в машинной графике, поскольку с их помощью представляется любое рациональное направление на плоскости.)

4.5 Это $L^k = \binom{1\,k}{0\,1}$ и $R^k = \binom{1\,0}{k\,1}$, что справедливо и при $k < 0$. (В гл. 6 будет установлена общая формула для произведения любого числа матриц L и R.)

4.6 Это означает $a = b$. (В гл. 3 было определено $x \bmod 0 = x$ главным образом для того, чтобы это было так.)

В конечном счете, в записи 'mod y' как бы подразумевается, что „претензии у игрека равны нулю". А если это уже так, то и претендовать не на что.

4.7 Для этого необходимо, чтобы $m \bmod 10 = 0$, $m \bmod 9 = k$ и $m \bmod 8 = 1$. Но m не может быть одновременно как четным, так и нечетным числом.

4.8 Надо, чтобы $10x + 6y \equiv 10x + y \pmod{15}$; отсюда имеем $5y \equiv 0 \pmod{15}$; откуда $y \equiv 0 \pmod 3$. Должно быть: $y = 0$ или 3 и $x = 0$ или 1.

4.9 Так как $3^{2k+1} \bmod 4 = 3$, то $(3^{2k+1}-1)/2$ нечетно. Указанное число делится на $(3^7-1)/2$ и на $(3^{11}-1)/2$ (и на другие числа).

4.10 $999(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{37}) = 648$.

4.11 Это функция $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = -1$, $\sigma(n) = 0$ при $n > 1$. (Обобщенные функции Мёбиуса, определенные на произвольных частично упорядоченных множествах, обладают интересными и важными свойствами, впервые установленными Вейснером [50] и развитыми многими другими, особенно Джан-Карло Ротой [264].)

4.12 Согласно формулам (4.7) и (4.9) $\sum_{d\backslash m}\sum_{k\backslash d}\mu(d/k)\,g(k) = \sum_{k\backslash m}\sum_{d\backslash(m/k)}\mu(d)\,g(k) = \sum_{k\backslash m} g(k)[m/k=1] = g(m)$,

4.13 (a) $n_p \leqslant 1$ при любом p; (b) $\mu(n) \neq 0$.

4.14 Эти правила правильные, если $k > 0$. Воспользуйтесь (4.12), (4.14) и (4.15).

4.15 Нет. К примеру, $e_n \bmod 5 = [2\,\text{или}\,3]$, а $e_n \bmod 11 = [2, 3, 7, \text{или}\,10]$.

4.16 $1/e_1 + 1/e_2 + \cdots + 1/e_n = 1 - 1/\bigl(e_n(e_n-1)\bigr) = 1 - 1/(e_{n+1}-1)$.

4.17 Имеем $f_n \bmod f_m = 2$; следовательно, $\text{НОД}(f_n, f_m) = \text{НОД}(2, f_m) = 1$. (Между прочим, соотношение $f_n = f_0 f_1 \ldots f_{n-1} + 2$ весьма напоминает рекуррентность, посредством которой определяются числа Евклида e_n.)

4.18 Если $n = qm$, а q нечетное, то $2^n + 1 = (2^m + 1)(2^{n-m} - 2^{n-2m} + \cdots - 2^m + 1)$.

4.19 Первая сумма равна $\pi(n)$, так как ее общий член есть $[k + 1 \text{ — простое}]$. Внутренняя сумма во втором равенстве есть $\sum_{1\leqslant k<m}[k\backslash m]$, так что она больше 1 тогда и только тогда, когда m — составное число; и снова мы получаем $\pi(n)$. Наконец, $\lceil\{m/n\}\rceil = [n\nmid m]$, так что третья сумма — упражнение на применение теоремы Вильсона. Но, разумеется, вычислять $\pi(n)$ по любой из этих формул — полнейшая глупость.

4.20 Пусть $p_1 = 2$ и пусть p_n — наименьшее простое число, большее, чем $2^{p_{n-1}}$. Тогда $2^{p_{n-1}} < p_n < 2^{p_{n-1}+1}$, откуда следует, что надо взять $b = \lim_{n\to\infty} \lg^{(n)} p_n$, где $\lg^{(n)}$ — это функция lg, проитерированная n раз. Указанное числовое значение получается из $p_2 = 5$ и $p_3 = 37$. Оказывается, что $p_4 = 2^{37} + 9$, и это дает более точное значение

$$b \approx 1.2516475977905$$

(но не дает ключа к значению p_5).

4.21 В силу постулата Бертрана $P_n < 10^n$. Пусть

$$K = \sum_{k\geqslant 1} 10^{-k^2} P_k = .200300005\ldots\ .$$

Тогда $10^{n^2}K \equiv P_n + \text{дробь} \pmod{10^{2n-1}}$.

4.22 $(b^{mn}-1)/(b-1) = \bigl((b^m-1)/(b-1)\bigr)(b^{mn-m}+\cdots+1)$. [При $p < 2000$ простые числа вида $(10^p - 1)/9$ встречаются только для $p = 2$, 19, 23, 317, 1031.] Числа такого вида называют „repunits".

4.23 Это $\rho(2k + 1) = 0$ и $\rho(2k) = \rho(k) + 1$ при $k \geqslant 1$. Можно показать по индукции, что $\rho(n) = \rho(n - 2^m)$, если $n > 2^m$ и $m > \rho(n)$. На k-м шаге перекладывается $\rho(k)$-й диск ханойской башни, если диски перенумеровать номерами $0, 1, \ldots, n-1$. Если k — степень 2, то ясно, что это так. А если $2^m < k < 2^{m+1}$, то $\rho(k) < m$; k-е и $k - 2^m$-е перекладывания соответствуют друг другу в последовательности перекладываний, перемещающей $m+1$ дисков за $T_m + 1 + T_m$ шагов.

4.24 Цифра, которая вносит вклад dp^m в n, вносит вклад $dp^{m-1} + \cdots + d = d(p^m - 1)/(p - 1)$ в $\epsilon_p(n!)$, следовательно, $\epsilon_p(n!) = \bigl(n - \nu_p(n)\bigr)/(p - 1)$.

4.25 Поскольку $m\backslash\backslash n \iff m_p = 0$ или $m_p = n_p$ при всех p, то отсюда следует, что утверждение (a) верно. Однако утверждение (b) неверно уже для нашего излюбленного примера $m = 12$ и $n = 18$. (Это широко распространенное заблуждение.)

4.26 Верно, так как последовательность $\mathcal{G}_N$ определяет некоторое поддерево дерева Штерна—Броко.

4.27 Дополните более короткую строку символами M (исходя из того, что в алфавите M находится между L и R) так, чтобы обе строки стали одинаковой длины, а затем воспользуйтесь словарным упорядочением. К примеру, самые верхние уровни дерева упорядочены так: LL < LM < MM < RL < RM < RR. (Другое решение заключается в присоединении бесконечной строки символов RL^∞ к обоим входам, после чего сравнение производится до установления L < R.)

4.28 Достаточно воспользоваться лишь началом этого представления:

$$\begin{matrix} R & R & R & L & L & L & L & L & L & L & R & R & R & R & R & R \\ \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{7}{2}, & \frac{10}{3}, & \frac{13}{4}, & \frac{16}{5}, & \frac{19}{6}, & \frac{22}{7}, & \frac{25}{8}, & \frac{47}{15}, & \frac{69}{22}, & \frac{91}{29}, & \frac{113}{36}, & \frac{135}{43}, & \ldots . \end{matrix}$$

Дробь $\frac{4}{1}$ появляется потому, что оценивает сверху лучше, чем дробь $\frac{1}{0}$, а не потому, что она оценивает лучше, чем дробь $\frac{3}{1}$. Аналогично, дробь $\frac{25}{8}$ — лучшая оценка снизу, чем дробь $\frac{3}{1}$. Здесь присутствуют все простейшие оценки сверху и все простейшие оценки снизу, но ближайшее действительно хорошее приближение не должно встречаться до тех пор, пока строка символов R не перейдет обратно в строку символов L.

4.29 Число $1/\alpha$. Чтобы получить $1-x$ из x в двоичной системе счисления, мы меняем местами 0 и 1, а чтобы получить $1/\alpha$ из α в системе Штерна—Броко, мы меняем местами L и R. (Кроме того, следует обратить внимание на случаи с конечным числом знаков, но с ними должно быть все в порядке, так как данное соответствие сохраняет упорядочение.)

4.30 Поскольку m целых чисел $x \in [A, A+m)$ различны по mod m, то их остатки $(x \bmod m_1, \ldots, x \bmod m_r)$ пробегают все $m_1 \ldots m_r = m$ возможных значений, одним из которых должно быть $(a_1 \bmod m_1, \ldots, a_r \bmod m_r)$ согласно принципу „голубиных гнезд".

4.31 Вообще, число, записанное в системе счисления с основанием b, делится на d тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на d при условии, что $b \equiv 1 \pmod d$. Это вытекает из того, что $(a_m \ldots a_0)_b = a_m b^m + \cdots + a_0 b^0 \equiv a_m + \cdots + a_0$.

4.32 Система $\varphi(m)$ чисел $\{kn \bmod m \mid k \perp m \text{ и } 0 \leqslant k < m\}$ представляет собой систему чисел $\{k \mid k \perp m \text{ и } 0 \leqslant k < m\}$, взятых в некотором порядке. Перемножьте их и поделите на $\prod_{0 \leqslant k < m,\, k \perp m} k$.

4.33 Очевидно, что $h(1) = 1$. Если $m \perp n$, то $h(mn) = \sum_{d \backslash mn} f(d)\, g(mn/d) = \sum_{c \backslash m, d \backslash n} f(cd)\, g\bigl((m/c)(n/d)\bigr) = \sum_{c \backslash m} \sum_{d \backslash n} f(c)\, g(m/c)\, f(d)\, g(n/d)$, а это равно $h(m)\, h(n)$, так как $c \perp d$ в каждом члене этой суммы.

4.34 Действительно, $g(m) = \sum_{d\backslash m} f(d) = \sum_{d\backslash m} f(m/d) = \sum_{d\geqslant 1} f(m/d)$, если функция $f(x)$ равна нулю, когда x не является целым числом.

4.35 Начальные условия суть

$$I(0,n) = 0; \qquad I(m,0) = 1\,.$$

А при $m, n > 0$ имеются два правила:

$$I(m,n) = I(m, n \bmod m) - \lfloor n/m \rfloor I(n \bmod m, m)\,,$$
$$I(m,n) = I(m \bmod n, n)\,,$$

первое из которых тривиально при $m > n$ и второе тривиально при $m < n$.

4.36 Разложение любой из заданных величин на необратимые множители должно содержать $m^2 - 10n^2 = \pm 2$ или ± 3, а это невозможно по модулю 10.

4.37 Пусть $a_n = 2^{-n}\ln(e_n - \frac{1}{2})$ и $b_n = 2^{-n}\ln(e_n + \frac{1}{2})$. Тогда

$$e_n = \lfloor E^{2^n} + \tfrac{1}{2} \rfloor \iff a_n \leqslant \ln E < b_n\,.$$

Но $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$, так что можно взять $E = \lim_{n\to\infty} e^{a_n}$. На самом деле оказывается, что

$$E^2 = \frac{3}{2}\prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{1}{(2e_n - 1)^2}\right)^{1/2^n}$$

— произведение, которое быстро сходится к числу $(1.26408473530530111)^2$. Однако эти наблюдения не позволяют выяснить, чему равно число e_n, если мы не сможем найти другое выражение для E, которое не зависело бы от чисел Евклида.

4.38 Пусть $r = n \bmod m$. Тогда $a^n - b^n = (a^m - b^m) \times (a^{n-m}b^0 + a^{n-2m}b^m + \cdots + a^r b^{n-m-r}) + b^{m\lfloor n/m \rfloor}(a^r - b^r)$.

4.39 Если $a_1 \ldots a_t$ и $b_1 \ldots b_u$ — полные квадраты, то таковым будет и число

$$a_1 \ldots a_t b_1 \ldots b_u / c_1^2 \ldots c_v^2\,,$$

где $\{a_1, \ldots, a_t\} \cap \{b_1, \ldots, b_u\} = \{c_1, \ldots, c_v\}$. (На самом деле можно показать, что последовательность $\langle S(1), S(2), S(3), \ldots, \rangle$ содержит любое не простое целое положительное число ровно один раз.)

4.40 Пусть $f(n) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n,\, p\nmid k} k = n!/p^{\lfloor n/p \rfloor}\lfloor n/p \rfloor!$ и $g(n) = n!/p^{\epsilon_p(n!)}$. Тогда

$$g(n) = f(n) f(\lfloor n/p \rfloor) f(\lfloor n/p^2 \rfloor) \ldots = f(n) g(\lfloor n/p \rfloor)\,.$$

Кроме того, $f(n) \equiv a_0!(p-1)!^{\lfloor n/p \rfloor} \equiv a_0!(-1)^{\lfloor n/p \rfloor} \pmod p$, и $\epsilon_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor + \epsilon_p(\lfloor n/p \rfloor !)$. Эти рекуррентности позволяют легко доказать требуемое по индукции. (Возможны и другие решения.)

4.41 (a) Если $n^2 \equiv -1 \pmod p$, то $(n^2)^{(p-1)/2} \equiv -1$, но теорема Ферма говорит, что это $+1$. (b) Пусть $n = ((p-1)/2)!$, тогда $n \equiv (-1)^{(p-1)/2} \prod_{1 \leqslant k < p/2} (p-k) = (p-1)!/n$, следовательно, $n^2 \equiv (p-1)!$.

4.42 Вначале заметим, что $k \perp l \iff k \perp l + ak$ для любого целого a, так как НОД(k, l) = НОД$(k, l + ak)$ в соответствии с алгоритмом Евклида. Итак,

$$m \perp n \text{ и } n' \perp n \iff mn' \perp n$$
$$\iff mn' + nm' \perp n.$$

Аналогично,

$$m' \perp n' \text{ и } n \perp n' \iff mn' + nm' \perp n'.$$

Следовательно,

$$m \perp n \text{ и } m' \perp n' \text{ и } n \perp n' \iff mn' + nm' \perp nn'.$$

4.43 Надо умножить на $L^{-1}R$, затем на $R^{-1}L^{-1}RL$, затем на $L^{-1}R$, затем на $R^{-2}L^{-1}RL^2$ и т. д.; n-м множителем будет $R^{-\rho(n)}L^{-1}RL^{\rho(n)}$, поскольку мы должны сократить $\rho(n)$ матриц R. А $R^{-m}L^{-1}RL^m = \binom{0 \;\; -1}{1 \;\; 2m+1}$.

4.44 Мы можем найти простейшее рациональное число, которое лежит в интервале

$$[.3155, .3165) = \left[\tfrac{631}{2000}, \tfrac{633}{2000}\right),$$

просматривая представления Штерна—Броко дробей $\frac{631}{2000}$ и $\frac{633}{2000}$ и останавливаясь непосредственно перед тем, как в первой из них встречается символ L, а во второй — символ R:

John .316 — *такой флаг можно было увидеть на чемпионате мира 1993 г., когда Джон Крук вступил в борьбу.*

$(m_1, n_1, m_2, n_2) := (631, 2000, 633, 2000)$;
как только $m_1 > n_1$ **или** $m_2 < n_2$ **исполнять**
  если $m_2 < n_2$
    то (вывод(L); $(n_1, n_2) := (n_1, n_2) - (m_1, m_2)$)
    иначе (вывод(R); $(m_1, m_2) := (m_1, m_2) - (n_1, n_2)$) .

Искомый результат $LLLRRRRR = \frac{6}{19} \approx .3158$. Между прочим, коэффициент .334 означает по меньшей мере 287 ударов.

4.45 Имеем $x^2 \equiv x \pmod{10^n} \iff x(x-1) \equiv 0 \pmod{2^n}$ и $x(x-1) \equiv 0 \pmod{5^n} \iff x \bmod 2^n = [0 \text{ или } 1]$ и $x \bmod 5^n = [0 \text{ или } 1]$. (Последний шаг оправдан, поскольку $x(x-1) \bmod 5 = 0$ означает, что либо число x, либо число $x-1$ кратно 5, в случае чего другой множитель взаимно прост с 5^n и может быть выделен из данного сравнения.)

Поэтому существует самое большее четыре решения, два из которых ($x = 0$ и $x = 1$) не достойны имени „n-значного числа“, кроме случая $n = 1$. Два других решения имеют вид x и $10^n + 1 - x$, и по меньшей мере одно из этих чисел $\geqslant 10^{n-1}$. Если $n = 4$, то

другое решение $10001 - 9376 = 625$ не является четырехзначным числом. Мы надеемся получить два n-значных решения примерно для 90% всех n, но это предположение еще не доказано.

(Подобные самовоспроизводящиеся числа называют „автоморфами".)

4.46 (a) Если $j'j - k'k = \text{НОД}(j,k)$, то $n^{k'k}n^{\text{НОД}(j,k)} = n^{j'j} \equiv 1$ и $n^{k'k} \equiv 1$. (b) Пусть $n = pq$, где p — наименьший простой делитель числа n. Если $2^n \equiv 1 \pmod n$, то $2^n \equiv 1 \pmod p$. К тому же $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, следовательно, $2^{\text{НОД}(p-1,n)} \equiv 1 \pmod p$. Но $\text{НОД}(p-1,n) = 1$ по определению p.

4.47 Если $n^{m-1} \equiv 1 \pmod m$, то должно быть $n \perp m$. Если $n^k \equiv n^j$ при некоторых $1 \leqslant j < k < m$, то $n^{k-j} \equiv 1$, поскольку можно разделить на n^j. Поэтому если числа $n^1 \bmod m, \ldots, n^{m-1} \bmod m$ не все различны, то имеется некоторое $k < m - 1$, для которого $n^k \equiv 1$. Наименьшее из таких k делит $m - 1$, согласно упр. 46(a). Но тогда $kq = (m-1)/p$ при некотором простом числе p и некотором целом положительном числе q, что невозможно, так как $n^{kq} \not\equiv 1$. Поэтому все числа $n^1 \bmod m, \ldots, n^{m-1} \bmod m$ различны и взаимно просты с m, а потому числа $1, \ldots, m-1$ взаимно просты с m, и число m должно быть простым.

4.48 Объединяя числа с обратными к ним попарно, произведение $(\bmod m)$ можно свести к произведению $\prod_{1 \leqslant n < m,\, n^2 \bmod m = 1} n$. А теперь можно воспользоваться нашим умением решать уравнения $n^2 \bmod m = 1$. С помощью модулярной арифметики выясняется, что искомый результат равен $m - 1$, если $m = 4$, p^k или $2p^k$ $(p > 2)$; в остальных случаях он равен $+1$.

4.49 (a) Либо $m < n$ ($\Phi(N-1)$ случаев), либо $m = n$ (один случай), либо $m > n$ (вновь $\Phi(N-1)$ случаев). Следовательно, $R(N) = 2\Phi(N-1) + 1$. (b) Из (4.62) получаем, что

$$2\Phi(N) - 1 = -1 + \sum_{d \geqslant 1} \mu(d) \lfloor N/d \rfloor \lfloor 1 + N/d \rfloor ;$$

следовательно, требуемый результат справедлив тогда и только тогда, когда

$$\sum_{d \geqslant 1} \mu(d) \lfloor N/d \rfloor = 1 \qquad \text{при } N \geqslant 1.$$

А это частный случай правила (4.61), если положить $f(x) = [x \geqslant 1]$.

4.50 (a) Если f — некоторая функция, то

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant k < m} f(k) &= \sum_{d \backslash m} \sum_{0 \leqslant k < m} f(k) \bigl[d = \text{НОД}(k,m)\bigr] \\ &= \sum_{d \backslash m} \sum_{0 \leqslant k < m} f(k) \bigl[k/d \perp m/d\bigr] \end{aligned}$$

$$= \sum_{d\backslash m} \sum_{0\leqslant k<m/d} f(kd)[k\perp m/d]$$
$$= \sum_{d\backslash m} \sum_{0\leqslant k<d} f(km/d)[k\perp d]\,.$$

С частным случаем этого вывода мы знакомы по выводу формулы (4.63). Аналогичный вывод проходит и при замене $\prod$ на $\sum$. Таким образом, имеем

$$z^m - 1 = \prod_{0\leqslant k<m} (z-\omega^k) = \prod_{d\backslash m} \prod_{\substack{0\leqslant k<d \\ k\perp d}} (z-\omega^{km/d})$$
$$= \prod_{d\backslash m} \Psi_d(z)\,,$$

ибо $\omega^{m/d} = e^{2\pi i/d}$.

Пункт (b) следует из пункта (a) по аналогии с принципом (4.56) для произведений вместо сумм. Кстати, эта формула показывает, что многочлен $\Psi_m(z)$ имеет целочисленные коэффициенты, так как $\Psi_m(z)$ получается путем умножения и деления многочленов со старшим коэффициентом 1.

4.51 Имеем $(x_1+\cdots+x_n)^p = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} p!/(k_1!\ldots k_n!)x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$, где коэффициент при иксах делится на p, если только некоторое k_j не равно p. Следовательно, $(x_1+\cdots+x_n)^p \equiv x_1^p+\cdots+x_n^p$ $(\bmod p)$. А теперь можно положить все иксы равными 1, получая $n^p \equiv n$.

4.52 Если $p > n$, то доказывать нечего. В противном случае $x \perp p$, так что $x^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod p$; это означает, что по меньшей мере $\lfloor (n-1)/(p-1)\rfloor$ заданных чисел кратны p. А $(n-1)/(p-1) \geqslant n/p$, поскольку $n \geqslant p$.

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“
— Л. Кронекер [48]

4.53 Вначале покажите, что если $m \geqslant 6$ и m — не простое число, то выполняется условие $(m-2)! \equiv 0 \pmod m$. (Если $m = p^2$, то произведение для $(m-2)!$ включает p и 2p; в противном случае оно включает d и m/d, где $d < m/d$.) Затем рассмотрите следующие случаи:

Случай 0, $n < 5$. Данное условие выполняется только при $n = 1$.

Случай 1, $n \geqslant 5$ и n простое. Тогда $(n-1)!/(n+1)$ — целое число и оно не может быть кратным n.

Случай 2, $n \geqslant 5$, n составное и $n+1$ составное. Тогда n и $n+1$ делят $(n-1)!$ и $n \perp n+1$; следовательно, $n(n+1)\backslash(n-1)!$.

Случай 3, $n \geqslant 5$, n составное, а $n+1$ простое. Тогда $(n-1)! \equiv 1 \pmod{n+1}$ по теореме Вильсона и

$$\lfloor (n-1)!/(n+1)\rfloor = \bigl((n-1)!+n\bigr)/(n+1)\,,$$

а это число делится на n.

Итак, ответ такой: либо $n = 1$, либо $n \neq 4$ — составное число.

4.54 Поскольку $\epsilon_2(1000!) > 500$, а $\epsilon_5(1000!) = 249$, то $1000! = a \cdot 10^{249}$ при некотором четном целом a. А так как $1000 = (1300)_5$, то упр. 40 говорит, что $a \cdot 2^{249} = 1000!/5^{249} \equiv -1 \pmod 5$. Кроме того, $2^{249} \equiv 2$, следовательно, и $a \equiv 2$, а значит, $a \bmod 10 = 2$ или 7, и, следовательно, ответ такой: $2 \cdot 10^{249}$.

4.55 Один из способов доказательства — доказать по индукции, что $P_{2n}/P_n^4(n+1)$ — целое число; этот более сильный результат обеспечивает дальнейшее проведение индукции. Другой путь основан на доказательстве того, что каждое простое число делит числитель по меньшей мере столько же раз, сколько оно делит и знаменатель. А это сводится к доказательству неравенства

$$\sum_{k=1}^{2n} \lfloor k/m \rfloor \geqslant 4 \sum_{k=1}^{n} \lfloor k/m \rfloor\,,$$

которое следует из неравенства

$$\lfloor (2n-1)/m \rfloor + \lfloor 2n/m \rfloor \geqslant 4 \lfloor n/m \rfloor\,.$$

Обе части последнего неравенства, справедливого при $0 \leqslant n < m$, увеличиваются на 4, когда n увеличивается на m.

4.56 Пусть $f(m) = \sum_{k=1}^{2n-1} \min(k, 2n-k)[m \backslash k]$, $g(m) = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k-1)\bigl[m \backslash (2k+1)\bigr]$. Число раз, которое p делит числитель указанного отношения, равно $f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \cdots$, а число раз, которое p делит его знаменатель, равно $g(p) + g(p^2) + g(p^3) + \cdots$. Но $f(m) = g(m)$ всякий раз, когда m нечетно, согласно упр. 2.32. Следовательно, согласно упр. 3.22, указанное отношение сводится к $2^{n(n-1)}$.

4.57 Указание предполагает обычное изменение порядка суммирования, поскольку

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} [d \backslash m] = \sum_{0 < k \leqslant n/d} [m = dk] = \lfloor n/d \rfloor\,.$$

Обозначая сумму в указании через $\Sigma(n)$, получаем

$$\Sigma(m+n) - \Sigma(m) - \Sigma(n) = \sum_{d \in S(m,n)} \varphi(d)\,.$$

С другой стороны, из (4.54) известно, что $\Sigma(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Следовательно, $\Sigma(m+n) - \Sigma(m) - \Sigma(n) = mn$.

4.58 Функция $f(m)$ мультипликативна, а когда $m = p^k$, она равна $1+p+\cdots+p^k$. А это равно степени 2 тогда и только тогда, когда p — простое число Мерсенна и $k = 1$. Действительно, k должно быть нечетным, и в таком случае данная сумма есть

$$(1+p)(1+p^2+p^4+\cdots+p^{k-1})$$

и $(k-1)/2$ должно быть нечетно и т. д. Требуемое необходимое и достаточное условие состоит в том, что m должно быть произведением различных простых чисел Мерсенна.

4.59 Доказательство указания. Если $n = 1$, то $x_1 = \alpha = 2$ и нет проблем. Если $n > 1$, можно считать, что $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Случай 1: $x_1^{-1} + \cdots + x_{n-1}^{-1} + (x_n - 1)^{-1} \geqslant 1$ и $x_n > x_{n-1}$. Тогда можно найти $\beta \geqslant x_n - 1 \geqslant x_{n-1}$, такое, что $x_1^{-1} + \cdots + x_{n-1}^{-1} + \beta^{-1} = 1$; следовательно, $x_n \leqslant \beta + 1 \leqslant e_n$ и $x_1 \ldots x_n \leqslant x_1 \ldots x_{n-1}(\beta + 1) \leqslant e_1 \ldots e_n$ — по индукции. Существует целое положительное число m, такое, что $\alpha = x_1 \ldots x_n/m$; следовательно, $\alpha \leqslant e_1 \ldots e_n = e_{n+1} - 1$, и имеем $x_1 \ldots x_n(\alpha + 1) \leqslant e_1 \ldots e_n e_{n+1}$. Случай 2: $x_1^{-1} + \cdots + x_{n-1}^{-1} + (x_n - 1)^{-1} \geqslant 1$ и $x_n = x_{n-1}$. Пусть $a = x_n$ и $a^{-1} + (a-1)^{-1} = (a-2)^{-1} + \zeta^{-1}$. Тогда можно показать, что $a \geqslant 4$ и $(a-2)(\zeta+1) \geqslant a^2$. Так что существует некоторое $\beta \geqslant \zeta$, такое, что $x_1^{-1} + \cdots + x_{n-2}^{-1} + (a-2)^{-1} + \beta^{-1} = 1$; отсюда по индукции следует, что $x_1 \ldots x_n \leqslant x_1 \ldots x_{n-2}(a-2)(\zeta+1) \leqslant x_1 \ldots x_{n-2}(a-2)(\beta+1) \leqslant e_1 \ldots e_n$, и можно закруглиться, как и раньше. Случай 3: $x_1^{-1} + \cdots + x_{n-1}^{-1} + (x_n - 1)^{-1} < 1$. Пусть $a = x_n$ и $a^{-1} + \alpha^{-1} = (a-1)^{-1} + \beta^{-1}$. Можно показать, что $(a-1)(\beta+1) > a(\alpha+1)$, ибо это соотношение эквивалентно соотношению

$$a\alpha^2 - a^2\alpha + a\alpha - a^2 + \alpha + a > 0\,,$$

которое является следствием неравенства $a\alpha(\alpha - a) + (1 + a)\alpha \geqslant (1 + a)\alpha > a^2 - a$. Следовательно, x_n и α можно заменить на $a - 1$ и β, повторяя подобное преобразование до тех пор, пока не будут применимы случаи 1 или 2.

Другим следствием данного указания является то, что $1/x_1 + \cdots + 1/x_n < 1$ влечет за собой $1/x_1 + \cdots + 1/x_n \leqslant 1/e_1 + \cdots + 1/e_n$; см. упр. 16.

4.60 Суть дела в том, что $\theta < \frac{2}{3}$. В таком случае можно выбрать p_1 достаточно большим (с тем, чтобы удовлетворить указанным ниже условиям), а p_n — наименьшим простым числом, большим p_{n-1}^3. При таком определении p_n положим $a_n = 3^{-n}\ln p_n$ и $b_n = 3^{-n}\ln(p_n + 1)$. Если нам удастся показать, что $a_{n-1} \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1}$, то мы сможем взять $P = \lim_{n\to\infty} e^{a_n}$, как в упр. 37. Но это предположение эквивалентно тому, что $p_{n-1}^3 \leqslant p_n < (p_{n-1} + 1)^3$. Если в этих пределах не найдется простого числа p_n, то должно быть некоторое простое число $p < p_{n-1}^3$, такое, что $p + p^\theta > (p_{n-1} + 1)^3$. Но это означает, что $p^\theta > 3p^{2/3}$, а это невозможно, если p достаточно большое.

Можно почти наверняка выбрать $p_1 = 2$, так как все имеющиеся данные указывают на то, что известные оценки для промежутков между простыми числами много слабее по сравнению с истинными промежутками (см. упр. 69). В таком случае $p_2 = 11$, $p_3 = 1361$, $p_4 = 2521008887$ и $1.306377883863 < P < 1.306377883869$.

„Человек создал целые числа, все остальное — Дьёдонне!"
— Р. К. Ги
(Или „от бога", если переводить фамилию известного французского реформатора математики Dieudonné буквально.
— Перев.)

4.61 Обозначим через $\hat{m}$ и $\hat{n}$ правые части; заметим, что имеет место равенство $\hat{m}n' - m'\hat{n} = 1$, следовательно, $\hat{m} \perp \hat{n}$. Кроме того, $\hat{m}/\hat{n} > m'/n'$ и $N = \big((n+N)/n'\big)n' - n \geqslant \hat{n} >$

$\big((n+N)/n'-1\big)n'-n = N-n' \geqslant 0$, так что $\hat{m}/\hat{n} \geqslant m''/n''$. Если же равенство не имеет места, то получаем, что $n'' = (\hat{m}n' - m'\hat{n})n'' = n'(\hat{m}n'' - m''\hat{n}) + \hat{n}(m''n' - m'n'') \geqslant n' + \hat{n} > N$ — противоречие.

Между прочим, из этого упражнения следует равенство $(m+m'')/(n+n'') = m'/n'$, хотя первая из этих дробей не всегда несократима.

4.62 Это число $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}-2^{-6}-2^{-7}+2^{-12}+2^{-13}-2^{-20}-2^{-21}+2^{-30}+2^{-31}-2^{-42}-2^{-43}+\cdots$, которое может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}+3\sum_{k\geqslant 0}\left(2^{-4k^2-6k-3}-2^{-4k^2-10k-7}\right).$$

Между прочим, эту сумму можно выразить в замкнутой форме, используя „тета-функцию“ $\theta(z,\lambda)=\sum_k e^{-\pi\lambda k^2+2izk}$:

$$e \;\leftrightarrow\; \tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}\theta\left(\tfrac{4}{\pi}\ln 2, 3i\ln 2\right)-\tfrac{3}{128}\theta\left(\tfrac{4}{\pi}\ln 2, 5i\ln 2\right).$$

4.63 Всякое число $n>2$ либо имеет нечетный простой делитель $d>2$, либо делится на $d=4$. В любом случае разрешимость уравнения с показателем n влечет за собой разрешимость уравнения $(a^{n/d})^d+(b^{n/d})^d=(c^{n/d})^d$ с показателем d. А так как при $d=4$ уравнение неразрешимо, то d должно быть простым числом.

Я нашел поистине чудесное доказательство ПОСЛЕДНЕЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА, *однако поля слишком малы, чтобы оно здесь уместилось.*

Указание проистекает из биномиальной теоремы, поскольку $(a^p+(x-a)^p)/x \equiv pa^{p-1} \pmod x$, если p нечетно. В наименьшем контрпримере если (4.46) неверно, то должно быть $a\perp x$. Если x не делится на p, то x взаимно просто с c^p/x. Это означает, что всякий раз, когда простое q обладает свойством $q^e\backslash\backslash x$ и $q^f\backslash\backslash c$, мы будем иметь $e=fp$. Следовательно, $x=m^p$ при некотором m. Если же x делится на p, то c^p/x делится на p, но не делится на p^2, и c^p не имеет других общих с x множителей.

4.64 Одинаковые дроби в последовательности $\mathcal{P}_N$ появляются в „порядке органных труб“:

$$\frac{2m}{2n},\frac{4m}{4n},\ldots,\frac{rm}{rn},\ldots,\frac{3m}{3n},\frac{m}{n}.$$

Предположим, что описание $\mathcal{P}_N$ корректно; надо доказать, что и описание $\mathcal{P}_{N+1}$ корректно. Это означает, что если kN нечетно, то нужно показать, что

$$\frac{k-1}{N+1}=\mathcal{P}_{N,kN};$$

а если kN четно, то нужно показать, что

$$\mathcal{P}_{N,kN-1}\ \mathcal{P}_{N,kN}\ \frac{k-1}{N+1}\ \mathcal{P}_{N,kN}\ \mathcal{P}_{N,kN+1}.$$

В обоих случаях полезно знать число дробей в $\mathcal{P}_N$ строго меньших дроби $(k-1)/(N+1)$; их число равно

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m}\Bigl[0\leqslant\frac{m}{n}<\frac{k-1}{N+1}\Bigr]=\sum_{n=1}^{N}\Bigl\lceil\frac{(k-1)n}{N+1}\Bigr\rceil$$
$$=\sum_{n=0}^{N}\Bigl\lfloor\frac{(k-1)n+N}{N+1}\Bigr\rfloor=\frac{(k-2)N}{2}+\frac{d-1}{2}+d\Bigl\lfloor\frac{N}{d}\Bigr\rfloor$$

согласно (3.32), где $d=\text{нод}(k-1,N+1)$. Это сводится к $\frac{1}{2}(kN-d+1)$, поскольку $N \bmod d = d-1$.

Кроме того, число дробей в $\mathcal{P}_N$, равных $(k-1)/(N+1)$, которые должны предшествовать ей в $\mathcal{P}_{N+1}$, равно $\frac{1}{2}(d-1-[d-\text{четное}])$ — в соответствии с порядком органных труб.

Если kN нечетно, то d четно и $(k-1)/(N+1)$ предшествуют $\frac{1}{2}(kN-1)$ элементов $\mathcal{P}_N$: это именно то число, которое нужно. Если kN четно, то d нечетно и $(k-1)/(N+1)$ предшествуют $\frac{1}{2}(kN)$ элементов $\mathcal{P}_N$. Если $d=1$, ни один из них не равен $(k-1)/(N+1)$ и $\mathcal{P}_{N,kN}$ есть символ '$<$'; в противном случае $(k-1)/(N+1)$ оказывается между двумя равными элементами и $\mathcal{P}_{N,kN}$ есть символ '$=$'. (Ч. С. Пирс [238] независимо обнаружил дерево Штерна—Броко примерно в то же время, когда он обнаружил последовательность $\mathcal{P}_N$.)

„Ни один квадрат, меньший 25×10^{14}, не делит никакое число Евклида."
—Илан Варди

4.65 Аналогичный вопрос для (аналогичных) чисел Ферма f_n — одна из знаменитых нерешенных проблем. Наш же вопрос может оказаться полегче, а может — и потруднее.

4.66 Известно, что ни один квадрат, меньший 36×10^{18}, не делит никакое число Мерсенна или число Ферма. Однако до сих пор не доказано предположение Шинцеля о том, что существует бесконечно много чисел Мерсенна, свободных от квадратов. Не известно даже, существует ли бесконечно много p, таких, что $p\backslash\backslash(a\pm b)$, где все простые множители чисел a и $b\leqslant31$.

4.67 М. Сегеди доказал это предположение для всех больших n; см. [267], [391, с. 78–79] и [326].

4.68 Это предположение гораздо слабее по сравнению с результатом из следующего упражнения.

4.69 Правдоподобность этого предположения показана Крамером [166] из вероятностных соображений и подтверждена вычислительными экспериментами: Брентом [38] показано, что $P_{n+1}-P_n\leqslant602$ для $P_{n+1}<2.686\times10^{12}$. Однако гораздо более слабые оценки из упр. 60 — это наилучшее из того, что было известно к 1994 г. [205]. Упражнение 68 имеет ответ „да", если $P_{n+1}-P_n<2P_n^{1/2}$ при любом достаточно большом n. По утверждению Ги [73, проблема A8], Пауль Эрдёш предлагает 10 000 долларов за доказательство того, что существует бесконечно много n,

таких, что

$$P_{n+1} - P_n > \frac{c \ln n \ln\ln n \ln\ln\ln\ln n}{(\ln\ln\ln n)^2}$$

для всех $c > 0$.

При этом, как утверждает Грэхем, возможна замена на марки, золото, бриллианты или нефть — кто что предпочитает.

— Перев.

4.70 В соответствии с упр. 24 это имеет место тогда и только тогда, когда $\nu_2(n) = \nu_3(n)$. Методы из [392] могут помочь расколоть этот орешек.

4.71 Если $k = 3$, то наименьшим решением является $n = 4700063497 = 19 \cdot 47 \cdot 5263229$; другого решения в этом случае неизвестно.

4.72 Известно, что это справедливо для бесконечно многих значений a, включая -1 (само собой разумеется) и 0 (не столь очевидно). Лемеру [191] принадлежит знаменитое утверждение о том, что $\varphi(n)\backslash(n-1)$ тогда и только тогда, когда n — простое число.

4.73 Известно, что это эквивалентно гипотезе Римана (согласно которой комплекснозначная дзета-функция $\zeta(z)$ отлична от нуля, если вещественная часть z больше $1/2$).

4.74 Экспериментальные данные дают основание предполагать, что существует около $p(1-1/e)$ различных величин — точно так же, как если бы факториалы были беспорядочно распределены по модулю p.

5.1 $(11)_r^4 = (14641)_r$ в любой системе счисления с основанием $r \geqslant 7$ согласно биномиальной теореме.

А что такое 11^4 по основанию 11?

5.2 Отношение $\binom{n}{k+1}/\binom{n}{k} = (n-k)/(k+1)$; это число $\leqslant 1$, если $k \geqslant \lfloor n/2 \rfloor$, и $\geqslant 1$, если $k < \lceil n/2 \rceil$, так что максимум достигается при $k = \lfloor n/2 \rfloor$ и при $k = \lceil n/2 \rceil$.

5.3 Выразите через факториалы. Оба произведения равны $f(n)/f(n-k)f(k)$, где $f(n) = (n+1)!\,n!\,(n-1)!$.

5.4 $\binom{-1}{k} = (-1)^k\binom{k+1-1}{k} = (-1)^k\binom{k}{k} = (-1)^k[k \geqslant 0]$.

5.5 Если $0 < k < p$, то в числителе дроби $\binom{p}{k}$ имеется p, которое ни с чем не сокращается в знаменателе. Поскольку $\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1}$, то должно быть $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$ при $0 \leqslant k < p$.

5.6 Решающим шагом (после избавления от второго k) должен быть следующий:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}\sum_k \binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k \\
&\quad = \frac{1}{n+1}\sum_{k \geqslant 0} \binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k \\
&\quad = \frac{1}{n+1}\sum_k \binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k \\
&\qquad - \frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}(-1)^{-1}.
\end{aligned}$$

В первоначальном выводе был забыт этот дополнительный член, который представляет собой $[n=0]$.

5.7 Да, поскольку $r^{\underline{-k}} = (-1)^k/(-r-1)^{\underline{k}}$. Кроме того,

$$r^{\overline{k}}(r+\tfrac{1}{2})^{\overline{k}} = (2r)^{\overline{2k}}/2^{2k}.$$

5.8 Функция $f(k) = (k/n-1)^n$ является многочленом степени n со старшим коэффициентом n^{-n}. Согласно (5.40), данная сумма равна $n!/n^n$. При большом n в соответствии с приближением Стирлинга это примерно $\sqrt{2\pi n}/e^n$. (Это совершенно отлично от величины $(1-1/e)$, которая получается, если воспользоваться приближением $(1-k/n)^n \sim e^{-k}$, справедливым при фиксированном k и $n \to \infty$.)

5.9 $\mathcal{E}_t(z)^t = \sum_{k\geqslant 0} t(tk+t)^{k-1}z^k/k! = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)^{k-1}(tz)^k/k! = \mathcal{E}_1(tz)$, в соответствии с (5.60).

5.10 $\sum_{k\geqslant 0} 2z^k/(k+2) = F(2,1;3;z)$, поскольку $t_{k+1}/t_k = (k+2)z/(k+3)$.

Но не бессильной.

5.11 Первая функция является бесселевой, а вторая — гауссовой:

$$z^{-1}\sin z = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k z^{2k}/(2k+1)! = F(1;1,\tfrac{3}{2};-z^2/4),$$
$$z^{-1}\arcsin z = \sum_{k\geqslant 0} z^{2k}(\tfrac{1}{2})^{\overline{k}}/(2k+1)k! = F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};z^2).$$

Любое значение гипергеометрического члена $t(k)$ может быть записано в виде $0^{e(k)}v(k)$, где $e(k)$ — целое и $v(k) \neq 0$. Допустим, что отношение членов $t(k+1)/t(k)$ есть $p(k)/q(k)$ и p и q полностью факторизованы в комплексных числах. Тогда для любого k $e(k+1)$ равняется $e(k)$ плюс число нулевых множителей в разложении $p(k)$ минус число нулевых множителей в разложении $q(k)$; $v(k+1)$ есть $v(k)$, умноженное на произведение ненулевых множителей $p(k)$ и деленное на произведение ненулевых множителей $q(k)$.

5.12 (a) Является, если $n \neq 0$, поскольку отношение членов равно n. (b) Является, если n — целое число; отношение членов равно $(k+1)^n/k^n$. Заметьте, что для получения этого члена из (5.115) мы полагаем $m = n+1$, $a_1 = \cdots = a_m = 1$, $b_1 = \cdots = b_n = 0$, $z = 1$ и умножаем на 0^n. (c) Является — отношение членов равно $(k+1)(k+3)/(k+2)$. (d) Не является — отношение членов равно $1+1/(k+1)H_k$ и $H_k \sim \ln k$ не рациональная функция. (e) Является — обратное к любому гипергеометрическому члену есть снова гипергеометрический член. Тот факт, что $t(k) = \infty$ при $k < 0$ и $k > n$ не исключает $t(k)$ из гипергеометрических членов. (f) Да, конечно. (g) Не всегда — например, при $t(k) = 2^k$ и $T(k) = 1$ не является. (h) Да; отношение членов $t(n-1-k)/t(n-1-(k+1))$ — рациональная функция (обратное к отношению членов для t при замене k на $n-1-k$) при произвольном n. (i) Является — отношение членов может быть записано как

$$\frac{a\,t(k+1)/t(k) + b\,t(k+2)/t(k) + c\,t(k+3)/t(k)}{a + b\,t(k+1)/t(k) + c\,t(k+2)/t(k)}$$

и $t(k+m)/t(k) = \bigl(t(k+m)/t(k+m-1)\bigr)\ldots\bigl(t(k+1)/t(k)\bigr)$ является рациональной по k функцией. (j) Нет. Если две рациональные функции $p_1(k)/q_1(k)$ и $p_2(k)/q_2(k)$ равны для бесконечно многих значений k, они равны для всех k, поскольку $p_1(k)q_2(k) = q_1(k)p_2(k)$ — полиномиальное тождество. Поэто-

му отношение членов $\lceil (k+1)/2 \rceil / \lceil k/2 \rceil$ должно было быть равным 1, если это рациональная функция. (k) Нет. Отношение членов должно было быть равным $(k+1)/k$ для всех k, поскольку это так для всех $k > 0$; но тогда $t(-1)$ может быть нулем, только если $t(0)$ кратно 0^2, тогда как $t(1)$ может быть равно 1, только если $t(0) = 0^1$.

5.13 $R_n = n!^{n+1}/P_n^2 = Q_n/P_n = Q_n^2/n!^{n+1}$.

5.14 Первый сомножитель в тождестве (5.25) — это $\binom{l-k}{l-k-m}$ при $k \leqslant l$, а это есть $(-1)^{l-k-m}\binom{-m-1}{l-k-m}$. При $k \leqslant l$ данная сумма представляет собой сумму по всем k, поскольку $m \geqslant 0$. (Условие $n \geqslant 0$ на самом деле необязательно, хотя переменная k должна принимать отрицательные значения при $n < 0$.)

Чтобы перейти от (5.25) к (5.26), сначала замените s на $-1-n-q$.

5.15 Если n нечетно, то данная сумма равна нулю, поскольку k можно заменить на $n-k$. Если же $n = 2m$, то в соответствии с (5.29) при $a = b = c = m$ данная сумма равна $(-1)^m(3m)!/m!^3$.

5.16 Это всего лишь $(2a)!\,(2b)!\,(2c)!/(a+b)!\,(b+c)!\,(c+a)!$, помноженное на (5.29), если выразить слагаемые через факториалы.

5.17 Поскольку $\binom{2n-1/2}{n} = \binom{4n}{2n}/2^{2n}$ и $\binom{2n-1/2}{2n} = \binom{4n}{2n}/2^{4n}$, имеем $\binom{2n-1/2}{n} = 2^{2n}\binom{2n-1/2}{2n}$.

5.18 $\binom{3r}{3k}\binom{3k}{k,k,k}/3^{3k}$.

5.19 $\mathcal{B}_{1-t}(-z)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{k-tk-1}{k}\bigl(-1/(k-tk-1)\bigr)(-z)^k$ согласно (5.60), а это есть $\sum_{k\geqslant 0}\binom{tk}{k}\bigl(1/(tk-k+1)\bigr)z^k = \mathcal{B}_t(z)$.

5.20 Этот ряд равен $F(-a_1,\ldots,-a_m;-b_1,\ldots,-b_n;(-1)^{m+n}z)$; см. упр. 2.17.

5.21 $\lim_{n\to\infty}(n+m)^{\underline{m}}/n^m = 1$.

5.22 Умножение и деление отдельных значений (5.83) дает

$$\frac{(-1/2)!}{x!\,(x-1/2)!} = \lim_{n\to\infty}\binom{n+x}{n}\binom{n+x-1/2}{n}n^{-2x}\Big/\binom{n-1/2}{n} = \lim_{n\to\infty}\binom{2n+2x}{2n}n^{-2x},$$

согласно (5.34) и (5.36). К тому же

$$1/(2x)! = \lim_{n\to\infty}\binom{2n+2x}{2n}(2n)^{-2x}.$$

Следовательно, и т. д. Между прочим, гамма-функциональным эквивалентом этой формулы является

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2x)\,\Gamma(\tfrac{1}{2})/2^{2x-1}\,.$$

5.23 Это $(-1)^n n_{\textrm{¡}}$, см. (5.50).

5.24 Согласно (5.35) и (5.93) сумма равна $\binom{n}{m} F\left({m-n,-m \atop 1/2}\middle|1\right) = \binom{2n}{2m}$.

5.25 Это эквивалентно легко доказуемому соотношению

$$(a-b)\frac{a^{\overline{k}}}{(b+1)^{\overline{k}}} = a\,\frac{(a+1)^{\overline{k}}}{(b+1)^{\overline{k}}} - b\,\frac{a^{\overline{k}}}{b^{\overline{k}}}$$

или, в операторной форме, $a-b = (\vartheta+a)-(\vartheta+b)$.

Аналогично,

$$(a_1-a_2)\,F\left({a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|z\right) = a_1\,F\left({a_1+1,a_2,a_3,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|z\right) - a_2\,F\left({a_1,a_2+1,a_3,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|z\right),$$

поскольку $a_1-a_2 = (a_1+k)-(a_2+k)$. Если a_1-b_1 — целое неотрицательное число d, то второе соотношение позволяет выразить функцию $F(a_1,\ldots,a_m;b_1,\ldots,b_n;z)$ в виде линейной комбинации функций $F(a_2+j,a_3,\ldots,a_m;b_2,\ldots,b_n;z)$ при $0\leqslant j\leqslant d$, тем самым удаляя один верхний параметр и один нижний параметр. К примеру, таким образом получаются выражения в замкнутой форме для $F(a,b;a-1;z)$, $F(a,b;a-2;z)$ и т. д.

Гаусс [68, §7] вывел аналогичные соотношения между $F(a,b;c;z)$ и любыми двумя „смежными" гипергеометрическими функциями, в которых один из параметров изменен на ± 1. Рейнвиль [255] обобщил их на случай нескольких параметров.

5.26 Если отношение членов в исходном гипергеометрическом ряду есть $t_{k+1}/t_k = r(k)$, то отношение членов в новом ряду есть $t_{k+2}/t_{k+1} = r(k+1)$. Следовательно,

$$F\left({a_1,\ldots,a_m \atop b_1,\ldots,b_n}\middle|z\right) = 1 + \frac{a_1\ldots a_m z}{b_1\ldots b_n}\,F\left({a_1+1,\ldots,a_m+1,1 \atop b_1+1,\ldots,b_n+1,2}\middle|z\right).$$

5.27 Сумма четных членов ряда $F(2a_1,\ldots,2a_m;2b_1,\ldots,2b_m;z)$. Имеем $(2a)^{\overline{2k+2}}/(2a)^{\overline{2k}} = 4(k+a)(k+a+\frac{1}{2})$ и т. д.

Приравнивая коэффициенты при z^n, получаем формулу Пфаффа—Заальшютца (5.97).

5.28 $F\left({a,b \atop c}\middle|z\right) = (1-z)^{-a}F\left({a,c-b \atop c}\middle|\frac{-z}{1-z}\right) = (1-z)^{-a}F\left({c-b,a \atop c}\middle|\frac{-z}{1-z}\right) = (1-z)^{c-a-b}F\left({c-a,c-b \atop c}\middle|z\right)$.

(Эйлер доказал это тождество, показав, что обе части удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Правило симметрии зачастую приписывается Эйлеру, но оно, кажется, не встречается в опубликованных им работах.)

5.29 В соответствии с правилом свертки Вандермонда коэффициенты при z^n равны. (Первоначальное доказательство Куммера было другим: он рассматривал $\lim_{m\to\infty} F(m, b-a; b; z/m)$ в правиле симметрии (5.101).)

5.30 Продифференцируйте еще раз, получая $z(1-z)F''(z) + (2-3z)F'(z)-F(z)=0$. Поэтому, согласно (5.108), $F(z)=F(1,1;2;z)$.

5.31 Условие $f(k) = cT(k+1)-cT(k)$ означает, что $f(k+1)/f(k) = \bigl(T(k+2)/T(k+1)-1\bigr)/\bigl(1-T(k)/T(k+1)\bigr)$ является рациональной по k функцией.

5.32 При суммировании многочлена относительно k метод Госпера сводится к „методу неопределенных коэффициентов“. Имеем $q(k) = r(k) = 1$ и пытаемся найти решение соотношения $p(k) = s(k+1) - s(k)$. В этом методе предполагается, что $s(k)$ является многочленом, степень которого $d = \deg(p) + 1$.

5.33 Решением соотношения $k = (k-1)s(k+1) - (k+1)s(k)$ служит $s(k) = -k+\frac{1}{2}$; следовательно, ответ: $(1-2k)/2k(k-1)+C$.

5.34 Предельное соотношение выполняется, ибо все члены при $k > c$ стремятся к нулю, а при вычислении предела остальных членов $\epsilon - c$ сокращается с $-c$, т. е. вторая частичная сумма есть $\lim_{\epsilon\to 0} F(-m,-n;\epsilon-m;1) = \lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon+n-m)^{\overline{m}}/(\epsilon-m)^{\overline{m}} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$.

5.35 (a) $2^{-n}3^n[n\geqslant 0]$. (b) $(1-\frac{1}{2})^{-k-1}[k\geqslant 0] = 2^{k+1}[k\geqslant 0]$.

5.36 Сумма цифр числа $m+n$ является суммой цифр числа m плюс сумма цифр числа n минус $p-1$, умноженное на число переносов, поскольку каждый перенос уменьшает сумму цифр на $p-1$. [См. в [158] расширение этого результата на обобщенные биномиальные коэффициенты.]

5.37 Деление первого соотношения на $n!$ дает свертку Вандермонда $\binom{x+y}{n} = \sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$. Второе соотношение вытекает, к примеру, из формулы $x^{\overline{k}} = (-1)^k(-x)^{\underline{k}}$, если обратить как x, так и y.

5.38 Выберите c как можно бо́льшим так, чтобы $\binom{c}{3} \leqslant n$; тогда $0 \leqslant n - \binom{c}{3} < \binom{c+1}{3} - \binom{c}{3} = \binom{c}{2}$. Замените n на $n - \binom{c}{3}$ и продолжайте в том же духе. И наоборот, любое такое представление получается тем же способом. (Можно проделать то же самое с

представлением

$$n = \binom{a_1}{1} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_m}{m}, \quad 0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_m$$

при любом фиксированном m.)

5.39 Индукция по $m+n$: $x^m y^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m+n-1-k}{n-1} a^n b^{m-k} x^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{m+n-1-k}{m-1} a^{n-k} b^m y^k$ при любых $m > 0$ и $n > 0$.

Заключенное в рамку утверждение на обороте этой страницы истинно.

5.40 $(-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \binom{r}{j} \binom{m-rk-s-1}{m-j} = (-1)^m \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{m-rk-s-1}{m} - \binom{m-r(k-1)-s-1}{m} \right) = (-1)^m \left(\binom{m-rn-s-1}{m} - \binom{m-s-1}{m} \right) = \binom{rn+s}{m} - \binom{s}{m}$.

5.41 $\sum_{k \geqslant 0} n!/(n-k)!\,(n+k+1)! = \bigl(n!/(2n+1)!\bigr) \sum_{k>n} \binom{2n+1}{k}$, что равно $2^{2n} n!/(2n+1)!$.

5.42 Будем рассматривать n как неопределенную вещественную переменную. При $q(k) = k+1$ и $r(k) = k-1-n$ метод Госпера дает решение $s(k) = 1/(n+2)$ — следовательно, требуемое выражение для неопределенной суммы есть $(-1)^{x-1} \frac{n+1}{n+2} / \binom{n+1}{x}$. И

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big/ \binom{n}{k} = (-1)^{x-1} \frac{n+1}{n+2} \Big/ \binom{n+1}{x} \Bigg|_0^{n+1} = 2\,\frac{n+1}{n+2} \qquad [n\text{ — четное}]\,.$$

Между прочим, из этого упражнения вытекает формула

$$\frac{1}{n\binom{n-1}{k}} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k+1}} + \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}},$$

„двойственная“ основной рекуррентности (5.8).

5.43 После подсказанного первого шага можно применить правило (5.21) и просуммировать по k. Затем правило (5.21) применяется еще раз и завершает дело свертка Вандермонда. (Комбинаторное доказательство этого тождества было дано Эндрюсом [385]. Способ быстрого перехода от этого тождества к доказательству соотношения (5.29) объяснен в [139, упр. 1.2.6–62].)

5.44 Сокращение факториалов показывает, что

$$\binom{m}{j}\binom{n}{k}\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-j-k}{m-j}\binom{j+k}{j}\binom{m+n}{j+k},$$

так что вторая сумма — это дробь $1/\binom{m+n}{m}$, умноженная на первую сумму. А первая сумма есть просто частный случай (5.32) для $l = 0$, $n = b$, $r = a$, $s = m+n-b$, так что она равна $\binom{a+b}{a}\binom{m+n-a-b}{n-a}$.

5.45 Согласно (5.9), $\sum_{k \leqslant n} \binom{k-1/2}{k} = \binom{n+1/2}{n}$. Если же это выражение недостаточно „замкнуто“, то можно применить (5.35) и получить $(2n+1)\binom{2n}{n} 4^{-n}$.

5.46 По формуле (5.69) эта свертка противоположна к коэффициенту при z^{2n} в разложении $\mathcal{B}_{-1}(z)\mathcal{B}_{-1}(-z)$. Далее, $(2\mathcal{B}_{-1}(z)-1)(2\mathcal{B}_{-1}(-z)-1)=\sqrt{1-16z^2}$; следовательно, $\mathcal{B}_{-1}(z)\mathcal{B}_{-1}(-z)=\frac{1}{4}\sqrt{1-16z^2}+\frac{1}{2}\mathcal{B}_{-1}(z)+\frac{1}{2}\mathcal{B}_{-1}(-z)-\frac{1}{4}$. По биномиальной теореме,

$$(1-16z^2)^{1/2}=\sum_n\binom{1/2}{n}(-16)^n z^{2n}=-\sum_n\binom{2n}{n}\frac{4^n z^{2n}}{2n-1},$$

так что ответ такой: $\binom{2n}{n}4^{n-1}/(2n-1)+\binom{4n-1}{2n}/(4n-1)$.

Заключенное в рамку утверждение на обороте этой страницы ложно

5.47 Согласно (5.61), это коэффициент при z^n в разложении $\bigl(\mathcal{B}_r(z)^s/Q_r(z)\bigr)\bigl(\mathcal{B}_r(z)^{-s}/Q_r(z)\bigr)=Q_r(z)^{-2}$, где $Q_r(z)=1-r+r\mathcal{B}_r(z)^{-1}$.

5.48 Это $F(2n+2,1;n+2;\frac{1}{2})=2^{2n+1}/\binom{2n+1}{n+1}$, частный случай соотношения (5.111).

5.49 Тождество Заальшютца (5.97) дает

$$\binom{x+n}{n}\frac{y}{y+n}\,F\left({-x,\ -n,\ -n-y \atop -x-n,\ 1-n-y}\,\Big|\,1\right)=\frac{(y-x)^{\overline{n}}}{(y+1)^{\overline{n}}}.$$

5.50 Левая часть есть

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{a^{\overline{k}}b^{\overline{k}}}{c^{\overline{k}}}\frac{(-z)^k}{k!}\sum_{m\geqslant 0}\binom{k+a+m-1}{m}z^m$$

$$=\sum_{n\geqslant 0}z^n\sum_{k\geqslant 0}\frac{a^{\overline{k}}b^{\overline{k}}}{c^{\overline{k}}k!}(-1)^k\binom{n+a-1}{n-k},$$

а по правилу свертки Вандермонда (5.92) коэффициент при z^n равен

$$\binom{n+a-1}{n}F\left({a,b,-n \atop c,a}\,\Big|\,1\right)=\frac{a^{\overline{n}}}{n!}\frac{(c-b)^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}}.$$

5.51 (a) Согласно правилу симметрии имеем $F(a,-n;2a;2)=(-1)^nF(a,-n;2a;2)$. (Между прочим, из этой формулы вытекает замечательное соотношение $\Delta^{2m+1}f(0)=0$, когда $f(n)=2^n x^{\underline{n}}/(2x)^{\underline{n}}$.)

(b) Почленный предел равен $\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\binom{m}{k}\frac{2m+1}{2m+1-k}(-2)^k$ плюс некий дополнительный член при $k=2m-1$; этот дополнительный член есть

$$\frac{(-m)\ldots(-1)\,(1)\ldots(m)\,(-2m+1)\ldots(-1)\,2^{2m+1}}{(-2m)\ldots(-1)\,(2m-1)!}$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{m!\,m!\,2^{2m+1}}{(2m)!}=\frac{-2}{\binom{-1/2}{m}};$$

следовательно, согласно (5.104), искомый предел равен $-1/\binom{-1/2}{m}$, противоположному значению того, что мы имели.

5.52 При $k > N$ члены обоих рядов равны нулю. Это тождество соответствует замене k на $N - k$. Заметьте, что

$$a^{\overline{N}} = a^{\overline{N-k}}(a+N-k)^{\overline{k}} = a^{\overline{N-k}}(a+N-1)^{\underline{k}} = a^{\overline{N-k}}(1-a-N)^{\overline{k}}(-1)^k\,.$$

5.53 Если $b = -\frac{1}{2}$, то независимо от a левая часть (5.110) равна $1 - 2z$, а правая часть равна $(1 - 4z + 4z^2)^{1/2}$. Правая часть — это формальный степенной ряд

$$1 + \binom{1/2}{1}4z(z-1) + \binom{1/2}{2}16z^2(z-1)^2 + \cdots,$$

который может быть расписан по степеням z и переупорядочен так, чтобы получить $1 - 2z + 0z^2 + 0z^3 + \cdots$; однако подобное переупорядочение включает, в качестве промежуточного шага, расходящийся при $z = 1$ степенной ряд, так что оно незаконно.

5.54 Если $m + n$ нечетно, скажем, $2N - 1$, то нужно показать, что

$$\lim_{\epsilon\to 0} F\left(\left.{N-m-\frac{1}{2},\ -N+\epsilon \atop -m+\epsilon}\right|1\right) = 0\,.$$

Равенство (5.92) применимо, поскольку $-m + \epsilon > -m - \frac{1}{2} + \epsilon$, а сомножитель $\Gamma(c - b) = \Gamma(N - m)$ в знаменателе бесконечен, поскольку $N \leqslant m$; все остальные сомножители конечны. В противном случае $m + n$ четно; подставляя $n = m - 2N$, получаем

$$\lim_{\epsilon\to 0} F\left(\left.{-N,\ N-m-\frac{1}{2}+\epsilon \atop -m+\epsilon}\right|1\right) = \frac{(N-1/2)^{\underline{N}}}{m^{\underline{N}}}$$

согласно (5.93). Остается показать, что

$$\binom{m}{m-2N}\frac{(N-1/2)!}{(-1/2)!}\frac{(m-N)!}{m!} = \binom{m-N}{m-2N}2^{-2N},$$

а это случай $x = N$ из упр. 22.

5.55 Пусть $Q(k) = (k + A_1)\ldots(k + A_M)Z$ и $R(k) = (k + B_1)\ldots(k + B_N)$. Тогда $t(k+1)/t(k) = P(k)Q(k-1)/P(k-1)R(k)$, где $P(k) = Q(k) - R(k)$ — ненулевой многочлен.

5.56 Решением соотношения $-(k+1)(k+2) = s(k+1) + s(k)$ служит $s(k) = -\frac{1}{2}k^2 - k - \frac{1}{4}$; следовательно, $\sum\binom{-3}{k}\,\delta k = \frac{1}{8}(-1)^{k-1}(2k^2 + 4k + 1) + C$. К тому же

$$(-1)^{k-1}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{k+2}{2}\right\rfloor = \frac{(-1)^{k-1}}{4}\left(k+1-\frac{1+(-1)^k}{2}\right)\left(k+2-\frac{1-(-1)^k}{2}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{8}(2k^2+4k+1) + \frac{1}{8}\,.$$

5.57 Имеем $t(k+1)/t(k) = (k-n)(k+1+\theta)(-z)/(k+1)(k+\theta)$. Поэтому можно взять $p(k) = k+\theta$, $q(k) = (k-n)(-z)$, $r(k) = k$. Секретная функция $s(k)$ должна быть константой α_0, и мы находим

$$k+\theta = \bigl(-z(k-n)-k\bigr)\,\alpha_0\,;$$

следовательно, $\alpha_0 = -1/(1+z)$ и $\theta = -nz/(1+z)$. Сумма равна

$$\sum \binom{n}{k} z^k \left(k - \frac{nz}{1+z}\right) \delta k = -\frac{n}{1+z}\binom{n-1}{k-1} z^k + C\,.$$

(Формула (5.18) соответствует частному случаю $z = 1$.)

5.58 Если $m > 0$, то можно заменить $\binom{k}{m}$ на $\frac{k}{m}\binom{k-1}{m-1}$ и вывести формулу $T_{m,n} = \frac{n}{m}T_{m-1,n-1} - \frac{1}{m}\binom{n-1}{m}$. Следовательно, уместен суммирующий множитель $\binom{n}{m}^{-1}$:

$$\frac{T_{m,n}}{\binom{n}{m}} = \frac{T_{m-1,n-1}}{\binom{n-1}{m-1}} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\,.$$

А это можно развернуть, получая

$$\frac{T_{m,n}}{\binom{n}{m}} = T_{0,n-m} - H_m + H_n - H_{n-m}\,.$$

Наконец, $T_{0,n-m} = H_{n-m}$, так что $T_{m,n} = \binom{n}{m}(H_n - H_m)$. (Этот результат можно также получить, воспользовавшись производящими функциями; см. пример 2 в разд. 7.5.)

5.59 $\sum_{j\geqslant 0,\,k\geqslant 1}\binom{n}{j}\bigl[j = \lfloor \log_m k\rfloor\bigr] = \sum_{j\geqslant 0,\,k\geqslant 1}\binom{n}{j}[m^j \leqslant k < m^{j+1}]$, что равно $\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}(m^{j+1} - m^j) = (m-1)\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}m^j = (m-1)(m+1)^n$.

5.60 В случае $m = n$ приближение

$$\binom{m+n}{n} \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n\left(1+\frac{n}{m}\right)^m$$

сводится к $\binom{2n}{n} \approx 4^n/\sqrt{\pi n}$

5.61 Пусть $\lfloor n/p\rfloor = q$ и $n \bmod p = r$. Полиномиальное тождество $(x+1)^p \equiv x^p + 1 \pmod p$ означает, что

$$(x+1)^{pq+r} \equiv (x+1)^r (x^p+1)^q \pmod p\,.$$

Коэффициент при x^m слева равен $\binom{n}{m}$. Справа же он равен $\sum_k \binom{r}{m-pk}\binom{q}{k}$, что равняется всего лишь $\binom{r}{m \bmod p}\binom{q}{\lfloor m/p\rfloor}$, поскольку $0 \leqslant r < p$.

5.62 $\binom{np}{mp} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=mp} \binom{p}{k_1}\ldots\binom{p}{k_n} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^2}$, поскольку все члены данной суммы кратны p^2, за исключением $\binom{n}{m}$ членов, для которых ровно m из $k_1, \ldots, k_n$ равны p. (Стенли [282, упр. 1.6(d)] показывает, что данное сравнение в действительности выполняется по модулю p^3 при $p > 3$.)

Заключенное в рамку утверждение на обороте этой страницы не является утверждением.

5.63 Это $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-4)^{n-k}\binom{2n-k}{k}$. Знаменатель в (5.74) обращается в нуль при $z = -1/4$, так что мы не можем просто так осуществить подстановку в эту формулу. Рекуррентное соотношение $S_n = -2S_{n-1} - S_{n-2}$ приводит к решению $S_n = (-1)^n(2n+1)$.

5.64 Это $\sum_{k\geqslant 0}\bigl(\binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1}\bigr)/(k+1) = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+1}{2k+1}/(k+1)$, что равно

$$\frac{2}{n+2}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+2}{2k+2} = \frac{2^{n+2}-2}{n+2}.$$

5.65 Умножая обе части на n^{n-1} и заменяя k на $n-1-k$, получаем

$$\sum_k \binom{n-1}{k} n^k (n-k)! = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(n^{k+1}/k! - n^k/(k-1)!\bigr)$$
$$= (n-1)!\,n^n/(n-1)!\,.$$

(Частичные суммы на самом деле могут быть установлены с помощью алгоритма Госпера.) С другой стороны, $\binom{n}{k}kn^{n-1-k}k!$ можно интерпретировать как число отображений множества $\{1, \ldots, n\}$ в само себя при условии, что $f(1), \ldots, f(k)$ различны, а $f(k+1) \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$; суммирование по k должно дать n^n.

5.66 Это задача о „прогулке по аллее парка“, где имеется только один „очевидный“ способ продолжения на каждом шаге. Сперва заменяем $k - j$ на l, затем заменяем $\lfloor\sqrt{l}\rfloor$ на k, получая

$$\sum_{j,k\geqslant 0}\binom{-1}{j-k}\binom{j}{m}\frac{2k+1}{2^j}.$$

Бесконечный ряд сходится, поскольку все его члены при фиксированном j не превосходят некоторый многочлен относительно j, деленный на 2^j. Теперь просуммируем по k, получая

$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{j}{m}\frac{j+1}{2^j}.$$

Внося в скобки $j+1$ и применяя (5.57), получаем ответ: $4(m+1)$.

5.67 Согласно (5.26), это $3\binom{2n+2}{n+5}$, ибо

$$\binom{\binom{k}{2}}{2} = 3\binom{k+1}{4}.$$

5.68 Исходя из того факта, что

$$\sum_{k\leqslant n/2}\binom{n}{k} = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}[n\text{ — четное}],$$

получаем $n\bigl(2^{n-1} - \binom{n-1}{\lfloor n/2\rfloor}\bigr)$.

5.69 Поскольку $\binom{k+1}{2}+\binom{l-1}{2} \leqslant \binom{k}{2}+\binom{l}{2} \iff k < l$, то минимум достигается при как можно более одинаковых k. Следовательно, согласно формуле разбиения на как можно более равные части из гл. 3, минимум равен

$$(n \bmod m)\binom{\lceil n/m\rceil}{2} + (n - (n \bmod m))\binom{\lfloor n/m\rfloor}{2}$$
$$= n\binom{\lfloor n/m\rfloor}{2} + (n \bmod m)\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor.$$

Аналогичный результат справедлив при любом нижнем индексе вместо 2.

Заключенное в рамку утверждение на обороте этой страницы не заключено в рамку.

5.70 Это $F(-n,\frac{1}{2};1;2)$, но это также $(-2)^{-n}\binom{2n}{n}F(-n,-n;\frac{1}{2}-n;\frac{1}{2})$, если сделать замену k на $n-k$. Однако $F(-n,-n;\frac{1}{2}-n;\frac{1}{2}) = F(-\frac{n}{2},-\frac{n}{2};\frac{1}{2}-n;1)$ согласно тождеству Гаусса (5.111). С другой стороны, $F(-n,-n;\frac{1}{2}-n;\frac{1}{2}) = 2^{-n}F(-n,\frac{1}{2};\frac{1}{2}-n;-1)$ по правилу симметрии (5.101), а формула Куммера (5.94) сводит это к (5.55). Ответ: 0, если n нечетно, и $2^{-n}\binom{n}{n/2}$, если n четно. (См. [82, §1.2] по поводу другого вывода. Эта сумма возникает при изучении одного простого алгоритма поиска [123].)

5.71 (a) Заметьте, что $S(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^{m+k}/(1-z)^{m+2k+1} = z^m(1-z)^{-m-1}A\bigl(z/(1-z)^2\bigr)$. (b) $A(z) = \sum_{k\geqslant 0}\binom{2k}{k}(-z)^k/(k+1) = \bigl(\sqrt{1+4z}-1\bigr)/2z$, так что мы имеем $A\bigl(z/(1-z)^2\bigr) = 1-z$. Таким образом, $S_n = [z^n]\,\bigl(z/(1-z)\bigr)^m = \binom{n-1}{n-m}$.

5.72 Указанную величину можно представить как $m(m-n)\ldots(m-(k-1)n)n^{k-\nu(k)}/k!$. Любой простой делитель p числа n делит числитель самое меньшее $k-\nu(k)$ раз и делит знаменатель самое большее $k-\nu(k)$ раз, так как именно столько раз 2 делит $k!$. Простое число p, которое не делит n, должно делить произведение $m(m-n)\ldots\bigl(m-(k-1)n\bigr)$ по меньшей мере столько же раз, сколько оно делит $k!$, ибо $m(m-n)\ldots\bigl(m-(p^r-1)n\bigr)$ кратно p^r при любом $r \geqslant 1$ и любом m.

5.73 Подстановка $X_n = n!$ дает $\alpha = \beta = 1$, подстановка $X_n = n¡$ дает $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Поэтому общее решение таково: $X_n = \alpha n¡ + \beta(n! - n¡)$.

5.74 Это $\binom{n+1}{k} - \binom{n-1}{k-1}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$.

5.75 Рекуррентность $S_k(n+1) = S_k(n) + S_{(k-1) \bmod 3}(n)$ дает возможность индуктивно подтвердить, что два из чисел S совпадают и что $S_{(-n) \bmod 3}(n)$ отличается от них на $(-1)^n$. Три этих величины разбивают свою сумму $S_0(n)+S_1(n)+S_2(n) = 2^n$ как можно более поровну, так что здесь должно быть $2^n \bmod 3$ вхождений величины $\lceil 2^n/3 \rceil$ и $3 - (2^n \bmod 3)$ вхождений величины $\lfloor 2^n/3 \rfloor$.

5.76 Решением является $Q_{n,k} = (n+1)\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}$.

5.77 Все члены суммы равны нулю, за исключением случая $k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_m$, когда данное произведение представляет собой мультиномиальный коэффициент

$$\binom{k_m}{k_1, k_2 - k_1, \ldots, k_m - k_{m-1}}.$$

Следовательно, сумма по $k_1, \ldots, k_{m-1}$ равна m^{k_m}, а последняя сумма по k_m дает $(m^{n+1} - 1)/(m - 1)$.

5.78 Расширьте область суммирования до $k = 2m^2 + m - 1$, тогда новые члены суть $\binom{1}{4} + \binom{2}{6} + \cdots + \binom{m-1}{2m} = 0$. Поскольку $m \perp (2m+1)$, то пары $\bigl(k \bmod m, k \bmod (2m+1)\bigr)$ различны. Кроме того, числа $(2j+1) \bmod (2m+1)$, когда j изменяется от 0 до $2m$,— это числа $0, 1, \ldots, 2m$, взятые в некотором порядке. Следовательно, данная сумма — это

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k < m \\ 0 \leqslant j < 2m+1}} \binom{k}{j} = \sum_{0 \leqslant k < m} 2^k = 2^m - 1.$$

5.79 (a) Эта сумма равна 2^{2n-1}, так что искомый НОД должен быть степенью 2. Если $n = 2^k q$, где q нечетно, то $\binom{2n}{1}$ делится на 2^{k+1} и не делится на 2^{k+2}. А поскольку каждое из чисел $\binom{2n}{2j+1}$ делится на число 2^{k+1} (см. упр. 36), то это число должно быть их НОД. (b) Если $p^r \leqslant n+1 < p^{r+1}$, то наибольшее число переносов при сложении k с $n-k$ по основанию p получается при $k = p^r - 1$. В этом случае число переносов равно $r - \epsilon_p(n+1)$, и $r = \epsilon_p\bigl(L(n+1)\bigr)$.

5.80 Сначала докажите по индукции, что $k! \geqslant (k/e)^k$.

5.81 Обозначим через $f_{l,m,n}(x)$ левую часть. Достаточно показать, что $f_{l,m,n}(1) > 0$ и что $f'_{l,m,n}(x) < 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Величина $f_{l,m,n}(1)$ равна $(-1)^{n-m-1}\binom{l+m+\theta}{l+n}$ согласно (5.23); эта величина положительна, поскольку данный биномиальный коэффициент имеет ровно $n - m - 1$ отрицательных сомножителей. По той же

самой причине данное неравенство справедливо и при $l = 0$. А если $l > 0$, то $f'_{l,m,n}(x) = -l f_{l-1,m,n+1}(x)$, и по индукции эта величина отрицательна.

5.82 Пусть $\epsilon_p(a)$ — показатель степени, в которой простое число p делит a, и пусть $m = n - k$. Тождество, которое требуется доказать, сводится к

$$\min\bigl(\epsilon_p(m)-\epsilon_p(m+k), \epsilon_p(m+k+1)-\epsilon_p(k+1), \epsilon_p(k)-\epsilon_p(m+1)\bigr)$$
$$=\min\bigl(\epsilon_p(k)-\epsilon_p(m+k), \epsilon_p(m)-\epsilon_p(k+1), \epsilon_p(m+k+1)-\epsilon_p(m+1)\bigr).$$

Для краткости запишем это как $\min(x_1, y_1, z_1) = \min(x_2, y_2, z_2)$. Обратите внимание, что $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$. Общее соотношение

$$\epsilon_p(a) < \epsilon_p(b) \quad\Longrightarrow\quad \epsilon_p(a) = \epsilon_p\bigl(|a \pm b|\bigr)$$

позволяет заключить, что $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \min(x_1, x_2) = 0$; то же самое справедливо также для (y_1, y_2) и (z_1, z_2). Теперь не составляет труда завершить доказательство.

5.83 (Решение П. Пауле.) Пусть r — неотрицательное целое. Данная сумма есть коэффициент при $x^l y^m$ в

$$\sum_{j,k}(-1)^{j+k}\frac{(1+x)^{j+k}}{x^k}\binom{r}{j}\binom{n}{k}(1+y)^{s+n-j-k}y^j$$
$$= \left(1-\frac{(1+x)y}{1+y}\right)^r\left(1-\frac{1+x}{(1+y)x}\right)^n(1+y)^{s+n}$$
$$= (-1)^n(1-xy)^{n+r}(1+y)^{s-r}/x^n\,;$$

ясно поэтому, что она равна $(-1)^l\binom{n+r}{n+l}\binom{s-r}{m-n-l}$. (См. также упр. 106.)

5.84 Следуя указанию, получаем

$$z\mathcal{B}_t(z)^{r-1}\mathcal{B}'_t(z) = \sum_{k\geqslant 0}\binom{tk+r}{k}\frac{kz^k}{tk+r}$$

и аналогичную формулу для $\mathcal{E}_t(z)$. Таким образом, формулы $\bigl(zt\mathcal{B}_t^{-1}(z)\mathcal{B}'_t(z)+1\bigr)\mathcal{B}_t(z)^r$ и $\bigl(zt\mathcal{E}_t^{-1}(z)\mathcal{E}'_t(z)+1\bigr)\mathcal{E}_t(z)^r$ дают соответствующие правые части формул (5.61). Поэтому необходимо доказать, что

$$\bigl(zt\mathcal{B}_t^{-1}(z)\mathcal{B}'_t(z)+1\bigr)\mathcal{B}_t(z)^r = \frac{1}{1-t+t\mathcal{B}_t(z)^{-1}}\,,$$
$$\bigl(zt\mathcal{E}_t^{-1}(z)\mathcal{E}'_t(z)+1\bigr)\mathcal{E}_t(z)^r = \frac{1}{1-zt\mathcal{E}(z)^t}\,,$$

а это вытекает из (5.59).

Заключенное в рамку утверждение на обороте этой страницы опирается само на себя.

5.85 Если $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ является некоторым многочленом степени $\leqslant n$, то можно доказать по индукции, что

$$\sum_{0\leqslant\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\leqslant 1} (-1)^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n} f(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n) = (-1)^n n!\, a_n x_1 \ldots x_n\,.$$

Предложенное в упражнении соотношение является частным случаем данного при $a_n = 1/n!$ и $x_k = k^3$.

5.86 (a) Сперва представьте с $n(n-1)$ переменными индексами l_{ij} при всех $i \neq j$. Подстановка $k_{ij} = l_{ij} - l_{ji}$ при $1 \leqslant i < j < n$ и использование ограничений $\sum_{i\neq j}(l_{ij} - l_{ji}) = 0$ при всех $i < n$ позволяет вычислить суммы по l_{jn} при $1 \leqslant j < n$, а затем по l_{ji} при $1 \leqslant i < j < n$ по правилу свертки Вандермонда. (b) $f(z) - 1$ является многочленом степени $< n$, который имеет n корней, так что он должен быть равным нулю. (c) Рассмотрите постоянные члены в

$$\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right)^{a_i} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right)^{a_i - [i=k]}.$$

5.87 Согласно (5.61), первый член — это $\sum_k \binom{n-k}{k} z^{mk}$. А слагаемые во втором члене — это

$$\frac{1}{m}\sum_{k\geqslant 0}\binom{(n+1)/m + (1+1/m)k}{k}(\zeta z)^{k+n+1} = \frac{1}{m}\sum_{k>n}\binom{(1+1/m)k - n - 1}{k-n-1}(\zeta z)^k.$$

Поскольку $\sum_{0\leqslant j<m}(\zeta^{2j+1})^k = m(-1)^l[k=ml]$, эти члены дают в сумме

$$\sum_{k>n/m}\binom{(1+1/m)mk - n - 1}{mk-n-1}(-z^m)^k = \sum_{k>n/m}\binom{(m+1)k-n-1}{k}(-z^m)^k = \sum_{k>n/m}\binom{n-mk}{k}z^{mk}.$$

Между прочим, функции $\mathcal{B}_m(z^m)$ и $\zeta^{2j+1} z\,\mathcal{B}_{1+1/m}(\zeta^{2j+1}z)^{1/m}$ суть $m+1$ комплексных корней уравнения $w^{m+1} - w^m = z^m$.

5.88 Воспользуемся теми фактами, что $\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-nt})\,dt/t = \ln n$ и $(1-e^{-t})/t \leqslant 1$. (Согласно (5.83), $\binom{x}{k} = O(k^{-x-1})$ при $k \to \infty$, так что эта оценка означает, что ряд Стирлинга $\sum_k s_k\binom{x}{k}$ сходится при $x > -1$. Эрмит [395] показал, что его сумма равна $\ln\Gamma(1+x)$.)

5.89 В силу биномиальной теоремы, сложение этого соотношения с (5.19) дает $y^{-r}(x+y)^{m+r}$ в обеих частях. Дифференцирование же дает

$$\sum_{k>m}\binom{m+r}{k}\binom{m-k}{n}x^k y^{m-k-n} = \sum_{k>m}\binom{-r}{k}\binom{m-k}{n}(-x)^k(x+y)^{m-k-n},$$

и можно заменить k на $k+m+1$ и применить (5.15), получая

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{m+r}{m+1+k}\binom{-n-1}{k}(-x)^{m+1+k}y^{-1-k-n} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{-r}{m+1+k}\binom{-n-1}{k}x^{m+1+k}(x+y)^{-1-k-n}.$$

В гипергеометрической форме это сводится к

$$F\left({1-r,\,n+1 \atop m+2}\middle|\frac{-x}{y}\right) = \left(1+\frac{x}{y}\right)^{-n-1} F\left({m+1+r,\,n+1 \atop m+2}\middle|\frac{x}{x+y}\right),$$

что является частным случаем правила симметрии (5.101) при $(a,b,c,z) = (n+1, m+1+r, m+2, -x/y)$ (Таким образом, преобразование (5.105) связано с правилом симметрии и формулой из упр. 52.)

Заключенное в рамку утверждение на обороте этой страницы не опирается само на себя.

5.90 Если r — целое неотрицательное число, то данная сумма конечна, и вывод в тексте справедлив постольку, поскольку ни в одном из членов этой суммы при $0 \leqslant k \leqslant r$ не содержится нуля в знаменателе. В противном случае данная сумма бесконечна, и, согласно (5.83), ее k-й член $\binom{k-r-1}{k}/\binom{k-s-1}{k}$ приблизительно равен $k^{s-r}(-s-1)!/(-r-1)!$. Поэтому необходимо условие $r > s+1$ для того, чтобы данный бесконечный ряд сходился. (Если r и s — комплексные числа, то этим условием будет $\Re r > \Re s + 1$, поскольку $|k^z| = k^{\Re z}$.) Согласно (5.92), искомая сумма равна

$$F\left({-r,\,1 \atop -s}\middle|1\right) = \frac{\Gamma(r-s-1)\Gamma(-s)}{\Gamma(r-s)\Gamma(-s-1)} = \frac{s+1}{s+1-r},$$

а это та же формула, что и установленная для целых r и s.

5.91 (В этой задаче лучше всего прибегнуть к помощи компьютера.) Между прочим, ввиду правила симметрии Пфаффа, при $c = (a+1)/2$ это сводится к тождеству, которое эквивалентно тождеству Гаусса (5.110). Действительно, если $w = -z/(1-z)$, то $4w(1-w) = -4z/(1-z)^2$, и

$$F\left({\tfrac12 a,\,\tfrac12 a+\tfrac12-b \atop 1+a-b}\middle|4w(1-w)\right) = F\left({a,\,a+1-2b \atop 1+a-b}\middle|\frac{-z}{1-z}\right) = (1-z)^a F\left({a,\,b \atop 1+a-b}\middle|z\right).$$

Карточка Журдена

5.92 Эти правила можно доказать так, как их доказал Пфафф более 150 лет назад, показав, что обе части удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Один из способов записать получающиеся равенства между коэффициентами при z^n — запись через биномиальные коэффициенты:

$$\sum_k \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{k}\binom{r}{n-k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s-1/2}{k}\binom{r+s-1/2}{n-k}} = \frac{\binom{2r}{n}\binom{r+s}{n}\binom{2s}{n}}{\binom{2r+2s}{n}\binom{r+s-1/2}{n}};$$

$$\sum_k \frac{\binom{-1/4+r}{k}\binom{-1/4+s}{k}\binom{-1/4-r}{n-k}\binom{-1/4-s}{n-k}}{\binom{-1+r+s}{k}\binom{-1-r-s}{n-k}} = \frac{\binom{-1/2}{n}\binom{-1/2+r-s}{n}\binom{-1/2-r+s}{n}}{\binom{-1+r+s}{n}\binom{-1-r-s}{n}}.$$

Другой способ — выразить их в гипергеометрической форме:

$$F\left({a,b,\frac12-a-b-n,-n \atop \frac12+a+b,1-a-n,1-b-n}\,\middle|\,1\right) = \frac{(2a)^{\overline{n}}\,(a+b)^{\overline{n}}\,(2b)^{\overline{n}}}{(2a+2b)^{\overline{n}}\,a^{\overline{n}}\,b^{\overline{n}}};$$

$$F\left({\frac14+a,\frac14+b,a+b-n,-n \atop 1+a+b,\frac34+a-n,\frac34+b-n}\,\middle|\,1\right) = \frac{(1/2)^{\overline{n}}\,(1/2+a-b)^{\overline{n}}\,(1/2-a+b)^{\overline{n}}}{(1+a+b)^{\overline{n}}\,(1/4-a)^{\overline{n}}\,(1/4-b)^{\overline{n}}}.$$

5.93 Это $\alpha^{-1}\prod_{j=1}^{k}\bigl(f(j)+\alpha\bigr)/f(j)$.

5.94 Алгоритм Госпера находит ответ $-\binom{a-1}{k-1}\binom{-a-1}{n-k}a/n+C$. Следовательно, если $m \geqslant 0$ — целое, получаем

$$\sum \binom{a}{k}\binom{m-a}{n-k}\delta k = \sum_j \binom{m}{j}\frac{-a}{n-j}\binom{a-1}{k-1}\binom{-a-1}{n-j-k}+C.$$

5.95 Старшие коэффициенты многочленов p и r должны быть единицей, p не должен иметь общих множителей с q или r. Эти дополнительные условия легко выполнимы при помощи перестановки множителей из одного многочлена в другой.

Теперь предположим, что $p(k+1)q(k)/p(k)r(k+1) = P(k+1)Q(k)/P(k)R(k+1)$, причем обе тройки многочленов (p,q,r) и (P,Q,R) удовлетворяют новому критерию. Пусть $p_0(k) = p(k)/g(k)$ и $P_0(k) = P(k)/g(k)$, где $g(k) = \text{НОД}\bigl(p(k),P(k)\bigr)$ является произведением всех общих множителей p и P. Тогда

$$p_0(k+1)q(k)P_0(k)R(k+1) = p_0(k)r(k+1)P_0(k+1)Q(k).$$

Допустим, что $p_0(k) \neq 1$. Тогда найдется комплексное число α, такое, что $p_0(\alpha) = 0$; отсюда следует $q(\alpha) \neq 0$, $r(\alpha) \neq 0$ и

$P_0(\alpha) \neq 0$. Таким образом, мы должны иметь $p_0(\alpha+1)R(\alpha+1) = 0$ и $p_0(\alpha-1)Q(\alpha-1) = 0$. Пусть N — положительное целое, такое, что $p_0(\alpha+N) \neq 0$ и $p_0(\alpha-N) \neq 0$. Повторяя те же рассуждения N раз, получаем $R(\alpha+1)\dots R(\alpha+N) = 0 = Q(\alpha-1)\dots Q(\alpha-N)$, что противоречит (5.118). Аналогично, $p_0(k) = 1$. Следовательно, $P_0(k) = 1$, так что $p(k) = P(k)$. Далее, $q(\alpha) = 0$ влечет за собой $r(\alpha+1) \neq 0$ в силу (5.118); следовательно, $q(k)\backslash Q(k)$. Аналогично, $Q(k)\backslash q(k)$; так что $q(k) = Q(k)$, поскольку у этих многочленов одинаковый старший коэффициент. Это влечет за собой и $r(k) = R(k)$.

5.96 Если $r(k)$ — ненулевая рациональная функция и $T(k)$ — гипергеометрический член, то $r(k)T(k)$ — тоже гипергеометрический член, который называется *подобным* $T(k)$. (Мы допускаем обращение $r(k)$ в ∞, а $T(k)$ — в 0, или наоборот, для конечного множества значений k.) В частности, $T(k+1)$ всегда подобен $T(k)$. Если $T_1(k)$ и $T_2(k)$ — два подобных гипергеометрических члена, то $T_1(k)+T_2(k)$ есть снова гипергеометрический член. Если $T_1(k)$, $\dots$, $T_m(k)$ взаимно неподобны и $m > 1$, то $T_1(k)+\dots+T_m(k)$ не может быть нулем для всех k, кроме конечного множества. Действительно, если бы это было возможно, мы взяли бы контрпример с минимальным m и положили $r_j(k) = T_j(k+1)/T_j(k)$. Поскольку $T_1(k) + \dots + T_m(k) = 0$, то $r_m(k)T_1(k) + \dots + r_m(k)T_m(k) = 0$ и $r_1(k)T_1(k)+\dots+r_m(k)T_m(k) = T_1(k+1)+\dots+T_m(k+1) = 0$; следовательно, $\big(r_m(k)-r_1(k)\big)T_1(k)+\dots+\big(r_m(k)-r_{m-1}(k)\big)T_{m-1}(k) = 0$. Не может быть $r_m(k)-r_j(k) = 0$ для всех $j < m$, поскольку T_j и T_m неподобны. Но m было выбрано минимальным, так что выбранный набор не может быть контрпримером; отсюда следует, что $m = 2$. Но тогда $T_1(k)$ и $T_2(k)$ должны быть подобными, поскольку они оба равны нулю для всех k, кроме конечного множества.

Пусть теперь $t(k)$ — любой гипергеометрический член, такой, что $t(k+1)/t(k) = r(k)$, допустим также, что $t(k) = \big(T_1(k+1) + \dots + T_m(k+1)\big) - \big(T_1(k) + \dots + T_m(k)\big)$, где m — минимально. Тогда T_1, $\dots$, T_m должны быть взаимно неподобны. Пусть $r_j(k)$ — такая рациональная функция, что

$$r(k)\big(T_j(k+1) - T_j(k)\big) - \big(T_j(k+2) - T_j(k+1)\big) = r_j(k)T_j(k)\,.$$

Допустим, что $m > 1$. Так как $0 = r(k)t(k)-t(k+1) = r_1(k)T_1(k)+ \dots + r_m(k)T_m(k)$, мы должны иметь $r_j(k) = 0$ для всех j, за исключением, возможно, одного. Если $r_j(k) = 0$, то функция $\bar{t}(k) = T_j(k+1)-T_j(k)$ удовлетворяет соотношению $\bar{t}(k+1)/\bar{t}(k) = t(k+1)/t(k)$. Поэтому алгоритм Госпера найдет решение.

5.97 Примем сначала, что z не равно $-d-1/d$ ни для какого целого $d > 0$. Тогда имеем в алгоритме Госпера $p(k) = 1$, $q(k) = (k+1)^2$, $r(k) = k^2 + kz + 1$. Поскольку $\deg(Q) < \deg(R)$ и $\deg(p) - \deg(R) + 1 = -1$, то единственным возможным выбором будет $z = d+2$ для некоторого неотрицательного целого d. Попытка взять $s(k) = \alpha_d k^d + \dots + \alpha_0$ терпит неудачу при $d = 0$,

но оказывается успешной при любом $d > 0$. (Система линейных уравнений, получаемая приравниванием коэффициентов при k^d, $k^{d-1}, \ldots, k^1$ в (5.122), выражает $\alpha_{d-1}, \ldots, \alpha_0$ как положительные кратные α_d, и тогда оставшееся уравнение $1 = \alpha_d + \cdots + \alpha_1$ определяет α_d.) Например, для $z = 3$ неопределенная сумма равна $(k+2)k!^2 / \prod_{j=1}^{k-1}(j^2+3j+1) + C$.

Если, напротив, $z = -d - 1/d$, то указанные члены $t(k)$ бесконечны для $k \geqslant d$. Есть два разумных способа действий в этой ситуации. Можно убрать нули из знаменателя, переопределив $t(k)$:

$$t(k) = \frac{k!^2}{\prod_{j=d+1}^{k}\bigl(j^2 - j(d+1/d) + 1\bigr)} = \frac{(d-1/d)!\,k!^2}{(k-1/d)!\,(k-d)!}\,.$$

Тем самым мы делаем $t(k)$ нулевым для $0 \leqslant k < d$ и положительным для $k \geqslant d$. В этом случае алгоритм Госпера дает $p(k) = k^{\underline{d}}$, $q(k) = k+1$, $r(k) = k - 1/d$ и мы можем решить (5.122) относительно $s(k)$, поскольку коэффициент при k^j в правой части равен $(j+1+1/d)\alpha^j$ плюс кратные $\{\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d\}$. Например, для $d = 2$ неопределенная сумма равна $(3/2)!\,k!\,\times$ $(\frac{2}{7}k^2 - \frac{26}{35}k + \frac{32}{105})/(k-3/2)! + C$.

Действуя по-другому, мы можем суммировать исходные члены, но только в диапазоне $0 \leqslant k < d$. Тогда можно заменить $p(k) = k^{\underline{d}}$ на

Заметьте, что любая конечная последовательность суммируема тривиальным образом, поскольку всегда можно найти многочлен, совпадающий с $t(k)$ для $0 \leqslant k < d$.

$$p'(k) = \sum_{j=1}^{d}(-1)^{d-j} j \begin{bmatrix} d \\ j \end{bmatrix} k^{j-1}\,.$$

Эта замена допустима, поскольку (5.117) по-прежнему выполнено для $0 \leqslant k < d-1$; имеем $p'(k) = \lim_{\epsilon\to 0}\bigl((k+\epsilon)^{\underline{d}} - k^{\underline{d}}\bigr)/\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0}(k+\epsilon)^{\underline{d}}/\epsilon$, так что этот трюк по существу сокращает нули в числителе и знаменателе (5.117), как в правиле Лопиталя. После этого метод Госпера вычисляет неопределенную сумму.

5.98 $nS_{n+1} = 2nS_n$. (Будьте осторожны: мы не имеем информации относительно S_1/S_0.)

5.99 Пусть $p(n,k) = (n+1+k)\beta_0(n) + (n+1+a+b+c+k)\beta_1(n) = \hat{p}(n,k)$, $\bar{t}(n,k) = t(n,k)/(n+1+k)$, $q(n,k) = (n+1+a+b+c+k)(a-k)(b-k)$, $r(n,k) = (n+1+k)(c+k)k$. Тогда решением (5.129) будет $\beta_0(n) = (n+1+a+b+c)(n+1+a+b)$, $\beta_1(n) = -(n+1+a)(n+1+b)$, $\alpha_0(n) = s(n,k) = -1$. Мы находим (5.134), заметив, что это равенство выполнено для $n = -a$, и используя индукцию по n.

5.100 Алгоритм Госпера — Зильбергера легко находит, что

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n+1-k}{\binom{n}{k}}, \qquad 0 \leqslant k < n.$$

В результате суммирования от $k = 0$ до $n-1$ получаем $(n+2)(S_n - 1) - (2n+2)(S_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1}) = -n$. Следовательно, $(2n+2)S_{n+1} = (n+2)S_n + 2n+2$. Теперь применение суммирующего множителя приводит к выражению $S_n = (n+1)2^{-n-1}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k/k$.

5.101 (a) Если зафиксировать m, то алгоритм Госпера—Зильбергера обнаруживает, что $(n+2)S_{m,n+2}(z) = (z-1)(n+1)\times S_{m,n}(z) + (2n+3-z(n-m+1))S_{m,n+1}(z)$. Можно также применить тот же метод к слагаемому

$$\beta_0(m,n)t(m,n,k) + \beta_1(m,n)t(m+1,n,k) \\ + \beta_2(m,n)t(m,n+1,k),$$

получая в этом случае более простое рекуррентное соотношение

$$(m+1)S_{m+1,n}(z) - (n+1)S_{m,n+1}(z) \\ = (1-z)(m-n)S_{m,n}(z).$$

(b) Здесь нам достается чуть больше работы — пять уравнений с шестью неизвестными. Алгоритм находит

$$(n+1)(z-1)^2\binom{n}{k}^2 z^k - (2n+3)(z+1)\binom{n+1}{k}^2 z^k \\ + (n+2)\binom{n+2}{k}^2 z^k = T(n,k+1) - T(n,k),$$

$$T(n,k) = \binom{n+1}{k-1}^2 \frac{s(n,k)}{n+1} z^k,$$
$$s(n,k) = (z-1)k^2 - 2((n+2)z - 2n - 3)k \\ + (n+2)((n+2)z - 4n - 5).$$

Следовательно, $(n+1)(z-1)^2 S_n(z) - (2n+3)(z+1)S_{n+1}(z) + (n+2)S_{n+2}(z) = 0$. Оказывается, что это соотношение выполняется и для отрицательных n, и мы имеем $S_{-n-1}(z) = S_n(z)/(1-z)^{2n+1}$.

Сумму $S_n(z)$ можно рассматривать как некую модификацию многочлена Лежандра $P_n(z) = \sum_k \binom{n}{k}^2 (z-1)^{n-k}(z+1)^k/2^n$, поскольку можно записать $S_n(z) = (1-z)^n P_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Аналогично, $S_{m,n}(z) = (1-z)^n P_n^{(0,m-n)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ является модификацией многочлена Якоби.

5.102 Эта сумма есть $F(a - \frac{1}{3}n, -n; b - \frac{4}{3}n; -z)$, так что можем не рассматривать случай $z = -1$. Пусть $n = 3m$. Мы ищем решение (5.129) для

А как насчет $z = 0$?

$$p(m,k) = (3m+3-k)^{\underline{3}}(m+1-k)\beta_0 + (4m+4-b-k)^{\underline{4}}\beta_1,$$
$$q(m,k) = (3m+3-k)(m+1-a-k)z,$$
$$r(m,k) = k(4m+1-b-k),$$
$$s(m,k) = \alpha_2 k^2 + \alpha_1 k + \alpha_0.$$

Получающиеся в результате пять однородных уравнений имеют ненулевое решение $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1)$ тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов имеет нулевой определитель; этот определитель, многочлен от m, обращается в нуль только в восьми случаях. Один из этих случаев есть, конечно, (5.113); однако теперь мы можем вычислить сумму для всех неотрицательных целых n, а не только для $n \not\equiv 2 \pmod 3$:

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{\frac13 n - \frac16}{k} 8^k \Big/ \binom{\frac43 n - \frac23}{k} = [1, 1, -\tfrac12]\binom{2n}{n}\Big/\binom{\frac43 n - \frac23}{n}.$$

Здесь запись $[c_0, c_1, c_2]$ обозначает одно значение $c_{n \bmod 3}$. Другой случай, $(a, b, z) = (\frac12, 0, 8)$, приводит к тождеству

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{\frac13 n - \frac12}{k} 8^k \Big/ \binom{\frac43 n}{k} = [1,0,0]\, 16^{n/3}\binom{\frac23 n}{\frac13 n}\Big/\binom{\frac43 n}{n}.$$

(Удивительным образом эта сумма оказывается нулевой, если n не кратно 3; в последнем случае получаемое тождество

$$\sum_k \binom{3m}{k}\binom{2m}{2k}\binom{2k}{k} 2^k \Big/ \binom{4m}{k}\binom{m}{k} = 16^m \frac{(3m)!\,(2m)!}{(4m)!\,m!}$$

может даже оказаться полезным.) Остальные шесть случаев порождают еще более таинственные суммы

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{\frac13 n - a}{k} z^k \Big/ \binom{\frac43 n - b}{k} = [c_0, c_1, c_2] \frac{\binom{\frac13 n - a}{\lfloor n/3 \rfloor}\binom{\frac13 n - a'}{\lfloor n/3 \rfloor} x^{\lfloor n/3 \rfloor}}{\binom{\frac43 n - b}{n}\binom{\frac13 n - b}{\lfloor n/3 \rfloor}\binom{\frac13 n - b'}{\lfloor n/3 \rfloor}},$$

где значения $(a, b, z, c_0, c_1, c_2, a', b', x)$ равны, соответственно:

$$(\tfrac{7}{12}, \tfrac13, 8, 1, -1, 0, \tfrac14, 0, 64); \quad (\tfrac14, 0, 8, 1, 2, 0, \tfrac{7}{12}, \tfrac13, 64);$$
$$(\tfrac{5}{12}, \tfrac23, 8, 1, 0, -3, \tfrac34, 0, 64); \quad (\tfrac{1}{12}, \tfrac13, 8, 1, 3, 0, \tfrac34, 0, 64);$$
$$(\tfrac12, 0, -4, 1, 2, 0, \tfrac16, \tfrac13, -16); \quad (\tfrac16, \tfrac23, -4, 1, 0, -3, \tfrac56, 0, -16).$$

5.103 Мы будем считать, что все a_i' и b_i' ненулевые, так как в противном случае соответствующие множители не окажут влияния на степени относительно k. Пусть $\hat{t}(n,k) = \hat{p}(n,k)\bar{t}(n,k)$, где

$$\bar{t}(n,k) = \frac{\prod_{i=1}^{p} (a_i n + a_i' k + a_i l[a_i < 0] + a_i'')!}{\prod_{i=1}^{q} (b_i n + b_i' k + b_i l[b_i > 0] + b_i'')!} z^k.$$

Тогда $\deg(\hat{p}) = \deg(f) + \max\bigl(\sum_{i=1}^{q} b_i[b_i>0] - \sum_{i=1}^{p} a_i[a_i<0], \sum_{i=1}^{p} a_i[a_i>0] - \sum_{i=1}^{q} b_i[b_i<0]\bigr) \geqslant \deg(f) + \frac{1}{2}l\bigl(|a_1|+\cdots+|a_p|+|b_1|+\cdots+|b_q|\bigr)$, за теми исключениями, когда в старшем коэффициенте происходит сокращение. Кроме того, $\deg(q) = \sum_{i=1}^{p} a_i'[a_i'>0] - \sum_{i=1}^{q} b_i'[b_i'<0]$, $\deg(r) = \sum_{i=1}^{q} b_i'[b_i'>0] - \sum_{i=1}^{p} a_i'[a_i'<0]$, опять-таки кроме исключительных случаев.

(Используя эти оценки, можно непосредственно показать, что с увеличением l степень $\hat{p}$ в конце концов становится достаточно большой, чтобы обеспечить существование многочлена $s(n,k)$, а число неизвестных α_j и β_j в конце концов становится больше числа однородных уравнений в решаемой системе. Так что мы получаем еще одно доказательство сходимости алгоритма Госпера—Зильбергера, если, как в тексте, прибегнем к аргументу о существовании решения, в котором не все $\beta_0(n), \ldots, \beta_l(n)$ нулевые.)

5.104 Положим $t(n,k) = (-1)^k (r-s-k)!\,(r-2k)!/\bigl((r-s-2k)! \times (r-n-k+1)!\,(n-k)!\,k!\bigr)$. Тогда $\beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k)$ не суммируемо в гипергеометрических членах, поскольку $\deg(\hat{p}) = 1$, $\deg(q-r) = 3$, $\deg(q+r) = 4$, $\lambda = -8$, $\lambda' = -4$; но $\beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) + \beta_2(n)t(n+2,k)$ уже суммируемо, в основном потому, что $\lambda' = 0$ при $q(n,k) = -(r-s-2k)(r-s-2k-1) \times (n+2-k)(r-n-k+1)$ и $r(k) = (r-s-k+1)(r-2k+2)(r-2k+1)k$. Решением является

$$\begin{aligned}
\beta_0(n) &= (s-n)(r-n+1)(r-2n+1)\,,\\
\beta_1(n) &= (rs - s^2 - 2rn + 2n^2 - 2r + 2n)(r-2n-1)\,,\\
\beta_2(n) &= (s-r+n+1)(n+2)(r-2n-3)\,,\\
\alpha_0(n) &= r-2n-1\,,
\end{aligned}$$

и мы можем заключить, что $\beta_0(n)S_n + \beta_1(n)S_{n+1} + \beta_2(n)S_{n+2} = 0$, где S_n обозначает требуемую сумму. Этого достаточно, чтобы доказать тождество по индукции, проверив случаи $n=0$ и $n=1$.

Однако S_n удовлетворяет и более простому рекуррентному соотношению $\bar{\beta}_0(n)S_n + \bar{\beta}_1(n)S_{n+1} = 0$, где $\bar{\beta}_0(n) = (s-n) \times (r-2n+1)$ и $\bar{\beta}_1(n) = -(n+1)(r-2n-1)$. Почему же наш метод не обнаружил это соотношение? Во-первых, никто не утверждал, что такая рекуррентность с необходимостью влечет за собой неопределенную суммируемость членов $\bar{\beta}_0(n)t(n,k) + \bar{\beta}_1(n) \times t(n+1,k)$. Удивительно, однако, то, что метод Госпера—Зильбергера и во многих других случаях не находит простейшего рекуррентного соотношения.

Заметим, что найденное нами рекуррентное соотношение второго порядка может быть факторизовано:

$$\begin{aligned}
&\beta_0(n) + \beta_1(n)N + \beta_2(n)N^2\\
&\qquad = \bigl((r-n+1)N + (r-s-n-1)\bigr)\ \bigl(\bar{\beta}_0(n) + \bar{\beta}_1(n)N\bigr)\,,
\end{aligned}$$

где N — оператор сдвига, как в (5.145).

5.105 Положите $a = 1$ и сравните коэффициенты при z^{3n} в обеих частях тождества Хенричи — „дружественного монстра“,

$$f(a,z)\,f(a,\omega z)\,f(a,\omega^2 z) = F\left({\frac{1}{2}a-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \atop \frac{1}{3}a,\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}a+\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}a-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a+\frac{1}{3},\ a}\,\middle|\,\left(\frac{4z}{9}\right)^3\right),$$

где $f(a,z) = F(1; a, 1; z)$. Это тождество может быть доказано, если показать, что обе части удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению.

Петер Пауле нашел еще один интересный способ вычислить эту сумму:

$$\sum_{k,l}\binom{N}{k,l,N-k-l}^2\omega^{k+2l} = \sum_{k,l}\binom{N}{k-l,l,N-k}^2\omega^{k+l}$$
$$= \sum_{k,l}\binom{N}{k}^2\binom{k}{l}^2\omega^{k+l}$$
$$= \sum_{k}\binom{N}{k}^2\omega^k\,[z^k]\,\bigl((1+z)(\omega+z)\bigr)^k$$
$$= [z^0]\sum_{k}\binom{N}{k}^2\left(\frac{\omega(1+z)(\omega+z)}{z}\right)^k$$
$$= [z^0]\sum_{k,j}\binom{N}{k}^2\binom{k}{j}\left(\frac{\omega(1+z)(\omega+z)}{z}-1\right)^j$$
$$= [z^0]\sum_{k,j}\binom{N}{k}\binom{N-j}{N-k}\binom{N}{j}\left(\frac{(\omega z-1)^2}{\omega z}\right)^j$$
$$= \sum_{j}\binom{2N-j}{N}\binom{N}{j}\,[z^j]\,(z-1)^{2j}$$
$$= \sum_{j}\binom{2N-j}{N}\binom{N}{j}\binom{2j}{j}(-1)^j,$$

использовав биномиальную теорему, свертку Вандермонда и тот факт, что $[z^0]g(az) = [z^0]g(z)$. Мы сейчас можем положить $N = 3n$ и применить алгоритм Госпера—Зильбергера к этой сумме S_n, получая волшебным образом рекуррентное соотношение первого порядка $(n+1)^2 S_{n+1} = 4(4n+1)(4n+3)S_n$; результат Пауле следует отсюда по индукции. Если заменить $3n$ на $3n+2$, то данная сумма обращается в нуль. В самом деле, $\sum_{k+l+m=N} t(k,l,m)\omega^{l-m}$ всегда равно нулю, когда $N \bmod 3 \neq 0$ и $t(k,l,m) = t(l,m,k)$.

5.106 (Решение Шалоша Б. Эхада.) Положим

$$T(r,j,k) = \frac{((1+n+s)(1+r)-(1+n+r)j+(s-r)k)(j-l)j}{(l-m+n-r+s)(n+r+1)(j-r-1)(j+k)} \times t(r,j,k);$$

$$U(r,j,k) = \frac{(s+n+1)(k+l)k}{(l-m+n-r+s)(n+r+1)(j+k)} t(r,j,k).$$

Проверка сформулированного тождества является чисто рутинной работой, а (5.32) получается суммированием по j и k. (Мы суммируем $T(r,j+1,k)-T(r,j,k)$ сначала по j, затем по k; другой член $U(r,j,k+1)-U(r,j,k)$ суммируем сначала по k, затем по j.)

Однако надо еще проверить (5.32) для $r = 0$. В этом случае, после триномиальной перестройки оно приводится к виду $\sum_k (-1)^k \binom{n}{n+l}\binom{n+l}{k+l}\binom{s+n-k}{m} = (-1)^l \binom{n}{n+l}\binom{s}{m-n-l}$. Мы считаем, что l, m и n — целые числа и $n \geqslant 0$. Обе части, очевидным образом, нулевые, если не выполнено $n + l \geqslant 0$. Если же это неравенство выполнено, то можно заменить k на $n - k$ и использовать (5.24).

5.107 Если бы это был подходящий член, то должен был найтись линейный разностный оператор, аннулирующий $1/(nk+1)$. Другими словами, мы бы имели тождество с конечными суммами:

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} \alpha_{i,j}(n)/\bigl((n+i)(k+j)+1\bigr) = 0,$$

где α — некоторые многочлены от n, не все нулевые. Выберем целые числа i, j и n так, чтобы было $n > 1$ и $\alpha_{i,j}(n) \neq 0$. Тогда при $k = -1/(n+i) - j$ член суммы с индексами (i,j) становится бесконечным, тогда как все остальные члены конечны.

Заметьте, что $1/nk$ — подходящий член, поскольку он равен $(n-1)!(k-1)!/n!\,k!$. Также $1/(n^2-k^2)$ — подходящий член. А вот $1/(n^2+k^2)$ — нет.

5.108 Заменим k на $m-k$ в двойной сумме, затем воспользуемся (5.28) и просуммируем по k, получая

$$A_{m,n} = \sum_j \binom{m}{j}^2 \binom{m+n-j}{m}^2;$$

затем триномиальная перестройка (5.21) дает одну из требуемых формул.

Оказывается, довольно трудно найти прямое доказательство того, что две симметричные суммы для $A_{m,n}$ равны. Мы можем, однако, доказать равенство косвенным путем, применяя алгоритм Госпера—Зильбергера, чтобы показать, что обе суммы удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(n+1)^3 A_{m,n} - f(m,n)A_{m,n+1} + (n+2)^3 A_{m,n+2} = 0,$$

где $f(m,n) = (2n+3)(n^2+3n+2m^2+2m+3)$. Полагая $t_1(n,k) = \binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{k}\binom{n+k}{k}$ и $t_2(n,k) = \binom{m+n-k}{k}^2\binom{m+n-2k}{m-k}^2$, находим

$$\begin{aligned}(n+1)^2 t_j(n,k) - f(m,n)t_j(n+1,k) + (n+2)^2 t_j(n+2,k)\\ = T_j(n,k+1) - T_j(n,k)\,,\end{aligned}$$

где $T_1(n,k) = -2(2n+3)k^4 t_1(n,k)/(n+1-k)(n+2-k)$ и $T_2(n,k) = -\big((n+2)(4mn+n+3m^2+8m+2) - 2(3mn+n+m^2+6m+2)k + (2m+1)k^2\big)k^2(m+n+1-k)^2 t_2(n,k)/(n+2-k)^2$. Это доказывает соотношение, так что осталось только проверить равенство для $n=0$ и $n=1$. (Можно было бы также использовать более простое рекуррентное соотношение

$$m^3 A_{m,n-1} - n^3 A_{m-1,n} = (m-n)(m^2+n^2-mn)A_{m-1,n-1}\,,$$

к которому можно прийти методами из упр. 101.)

Тот факт, что первое выражение для $A_{m,n}$ равно третьему, влечет за собой замечательное тождество между производящими функциями $\sum_{m,n} A_{m,n} w^m z^n$:

$$\sum_k \frac{w^k S_k(z)^2}{(1-z)^{2k+1}} = \sum_k \binom{2k}{k}^2 \frac{w^k}{(1-w)^{2k+1}} \frac{z^k}{(1-z)^{2k+1}}\,,$$

где $S_k(z) = \sum_j \binom{k}{j}^2 z^j$. На самом деле оказывается, что

$$\sum_k \frac{w^k S_k(x) S_k(y)}{(1-x)^k(1-y)^k} = \sum_k \binom{2k}{k} \frac{w^k}{(1-w)^{2k+1}} \frac{\sum_j \binom{k}{j}^2 x^j y^{k-j}}{(1-x)^k(1-y)^k}\,;$$

это частный случай тождества, открытого Бейли [18].

5.109 Пусть $X_n = \sum_k \binom{n}{k}^{a_0}\binom{n+k}{k}^{a_1}\ldots\binom{n+lk}{k}^{a_l}x^k$ для любых положительных целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_l$ и для любого целого x. Тогда для $0 \leqslant m < p$ будем иметь

$$X_{m+pn} = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_k \binom{m+pn}{j+pk}^{a_0} \ldots \binom{m+pn+l(j+pk)}{j+pk}^{a_l} x^{j+pk}\,,$$

$$X_m X_n = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_k \binom{m}{j}^{a_0}\binom{n}{k}^{a_0} \ldots \binom{m+lj}{j}^{a_l}\binom{n+lk}{k}^{a_l} x^{j+k}\,.$$

Соответствующие члены сравнимы $(\mathrm{mod}\ p)$, поскольку из упр. 36 следует, что они кратны p при $lj + m \geqslant p$, из упр. 61 следует, что биномиальные коэффициенты сравнимы при $lj + m < p$, а из (4.48) следует, что $x^p \equiv x$.

5.110 Сравнение, несомненно, выполняется, если $2n+1$ простое. Стивен Скиена нашел пример $n = 2953$, где $2n+1 = 3 \cdot 11 \cdot 179$.

Илан Варди заметил, что это условие выполнено для $2n+1 = p^2$ при простом p тогда и только тогда, когда $2^{p-1} \bmod p^2 = 1$. Это дает еще два примера: $n = (1093^2-1)/2$; $n = (3511^2-1)/2$.

5.111 Относительно частичных результатов см. [392]. Машинные эксперименты были выполнены В. А. Высоцким.

5.112 Если n — не степень 2, то $\binom{2n}{n}$ кратно 4 согласно упр. 36. В противном случае А. Гранвиль и О. Рамаре проверили это свойство для $n \leqslant 2^{22000}$; они также усилили теорему Шаркёзи [350], показав, что $\binom{2n}{n}$ делится на квадрат простого числа для всех $n > 2^{22000}$. Это доказывает давно выдвинутое предположение, что $\binom{2n}{n}$ никогда не свободно от квадратов при $n > 4$.

Аналогичные предположения для кубов таковы: $\binom{2n}{n}$ делится на куб простого числа при любом $n > 1056$ и на 2^3 или 3^3 при любом $n > 2^{29} + 2^{23}$. Это было проверено для любых $n < 2^{10000}$. Поль Эрдёш выдвинул предположение, что на самом деле $\max_p \epsilon_p\left(\binom{2n}{n}\right) \to \infty$, при $n \to \infty$; это должно быть справедливо, даже если мы ограничим p значениями 2 и 3.

5.113 Теорема о производящих функциях из упр. 7.20 может помочь в ответе на этот вопрос.

5.114 Штрел [359] показал, что $c_n^{(2)} = \sum_k \binom{n}{k}^3 = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n}$ суть так называемые числа Фрейнела [321], он также показал, что $c_n^{(3)} = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{k}^2 \binom{2k}{n-k}$. Двигаясь в другом направлении, Г. С. Вильф показал, что $c_n^{(m)}$ — целые для всех m, когда $n \leqslant 9$.

6.1 2314, 2431, 3241, 1342, 3124, 4132, 4213, 1423, 2143, 3412, 4321.

6.2 Ровно $\left\{ {n \atop k} \right\} m^{\underline{k}}$, поскольку область определения всякой такой функции разбивается на k непустых подмножеств, а для каждого разбиения имеется $m^{\underline{k}}$ способов приписать функции значения. (Суммирование по k дает комбинаторное доказательство формулы (6.10).)

6.3 В этом случае имеем $d_{k+1} \leqslant (\text{центр тяжести}) - \epsilon = 1 - \epsilon + (d_1 + \cdots + d_k)/k$. Эта рекуррентность подобна (6.55), но с $1 - \epsilon$ вместо 1; следовательно, оптимальным решением является $d_{k+1} = (1-\epsilon)H_k$. А эта величина не ограничена, поскольку $\epsilon < 1$.

6.4 $H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n$. (Точно так же, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}/k = H_{2n} - H_n$.)

6.5 Величина $U_n(x, y)$ равна

$$x \sum_{k \geqslant 1} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k^{-1} (x+ky)^{n-1} + y \sum_{k \geqslant 1} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} (x+ky)^{n-1},$$

и первая сумма есть

$$U_{n-1}(x, y) + \sum_{k \geqslant 1} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k-1} k^{-1} (x+ky)^{n-1}.$$

Лишнее k^{-1} может быть внесено в биномиальный коэффициент, и мы получаем, что

$$\sum_{k\geqslant 1}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}(x+ky)^{n-1}$$
$$= x^{n-1}+\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}(x+ky)^{n-1}$$
$$= x^{n-1}.$$

Тем самым соотношение (6.75) доказано. Пусть $R_n(x,y) = x^{-n}U_n(x,y)$; тогда $R_0(x,y)=0$ и $R_n(x,y)=R_{n-1}(x,y)+1/n+y/x$, следовательно, $R_n(x,y) = H_n + ny/x$. (Между прочим, первоначальная сумма $U_n = U_n(n,-1)$ не приводит к рекуррентности, подобной этой,— поэтому проще вычислить индуктивно более общую сумму, которая лишена зависимости x от n, нежели ее частный случай. Вот еще один поучительный пример, когда сильное индуктивное предположение существенно меняет исход дела.

Фибоначчиева рекуррентность — аддитивного типа, а кролики почему-то множатся.

6.6 Каждая пара крольчат ьь, принесенных в конце одного месяца, становится парой половозрелых кроликов **аа** в конце следующего месяца; каждая пара **аа** становится парой **аа** и ьь. Таким образом, каждая пара ьь ведет себя наподобие трутня в родословном дереве, а каждая пара **аа** ведет себя наподобие матки, за тем исключением, что родословное дерево пчел обращено в прошлое, в то время как кролики обращены в будущее. Через n месяцев имеется в наличии F_{n+1} пар кроликов, из которых F_n — половозрелые, а F_{n-1} — крольчата. (Именно в таком контексте Фибоначчи ввел в употребление свои числа.)

6.7 (a) Положите $k=1-n$ и воспользуйтесь (6.107). (b) Положите $m=1$, $k=n-1$ и воспользуйтесь (6.128).

Это „истинное значение“ соответствует 65 международным милям, но международная миля составляет лишь .999998 американской (уставной) мили. 3937 американских миль содержат ровно 6336 километров; метод Фибоначчи преобразует 3937 в 6370.

6.8 $55+8+2$ превращается в $89+13+3=105$; истинное значение: 104.607361.

6.9 21. (При возведении единиц измерения в квадрат мы переходим от F_n к F_{n+2}. Истинное значение: приблизительно 20.72.)

6.10 Все неполные частные a_0, a_1, a_2, ... равны 1, поскольку $\phi = 1+1/\phi$. (Поэтому представление Штерна—Броко для этой величины имеет вид RLRLRLRLRL... .)

6.11 $(-1)^{\overline{n}} = [n=0]-[n=1]$; см. (6.11).

6.12 Это следствие (6.31) и двойственной формулы в табл. 294.

6.13 Согласно упр. 12, эти две формулы эквивалентны. Можно воспользоваться индукцией. Или же можно заметить, что z^nD^n применительно к $f(z) = z^x$ дает $x^{\underline{n}}z^x$, в то время как ϑ^n применительно к той же самой функции дает x^nz^x; поэтому последовательность $\langle\vartheta^0,\vartheta^1,\vartheta^2,\ldots\rangle$ должна быть связана с $\langle z^0D^0,z^1D^1,z^2D^2,\ldots\rangle$ так же, как последовательность $\langle x^0,x^1,x^2,\ldots\rangle$ связана с $\langle x^{\underline{0}},x^{\underline{1}},x^{\underline{2}},\ldots\rangle$.

6.14 Имеем

$$x\binom{x+k}{n} = (k+1)\binom{x+k}{n+1} + (n-k)\binom{x+k+1}{n+1},$$

поскольку $(n+1)x = (k+1)(x+k-n)+(n-k)(x+k+1)$. (Последнее тождество достаточно проверить при $k=0$, $k=-1$ и $k=n$.)

6.15 Поскольку $\Delta\bigl(\binom{x+k}{n}\bigr) = \binom{x+k}{n-1}$, то общая формула такова:

$$\sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n-m} = \Delta^m(x^n) = \sum_j \binom{m}{j}(-1)^{m-j}(x+j)^n.$$

Положите $x=0$ и обратитесь к (6.19).

6.16 Это $A_{n,k} = \sum_{j\geqslant 0} a_j \left\{ {n-j \atop k} \right\}$; данная сумма всегда конечна.

6.17 (a) $\left| {n \atop k} \right| = \left[{n+1 \atop n+1-k} \right]$. (b) $\left| {n \atop k} \right| = n^{\underline{n-k}} = n!\,[n \geqslant k]/k!$. (c) $\left| {n \atop k} \right| = k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.

6.18 Это эквивалентно правилу (6.3) или рекуррентности (6.8).

6.19 Воспользуйтесь табл. 302.

6.20 $\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 1/j^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}(n+1-j)/j^2 = (n+1)H_n^{(2)} - H_n$.

6.21 Указанное число — это сумма дробей с нечетными знаменателями, так что оно имеет вид a/b с нечетными b. (Между прочим, постулат Бертрана означает, что b_n также делится, по меньшей мере, на одно нечетное простое число, когда $n > 2$.)

6.22 $\bigl|z/k(k+z)\bigr| \leqslant 2|z|/k^2$ при $k > 2|z|$, так что эта сумма определена, когда ее знаменатели не равны нулю. Если $z = n$, то $\sum_{k=1}^{m}\bigl(1/k - 1/(k+n)\bigr) = H_m - H_{m+n} + H_n$, что стремится к H_n при $m \to \infty$. (Величина $H_{z-1} - \gamma$ часто называется пси-функцией $\psi(z)$.)

6.23 $z/(e^z+1) = z/(e^z-1) - 2z/(e^{2z}-1) = \sum_{n\geqslant 0}(1-2^n)B_n z^n/n!$.

6.24 Если n — нечетное число, то $T_n(x)$ является многочленом относительно x^2, следовательно, когда мы берем производную и вычисляем $T_{n+1}(x)$ по формуле (6.95), его коэффициенты умножаются на четные числа. (На самом деле можно доказать даже большее: согласно упр. 54, в знаменателе числа Бернулли B_{2n} всегда содержится 2 в первой степени, следовательно, $2^{2n-k}\backslash\backslash T_{2n+1} \iff 2^k\backslash\backslash(n+1)$. Целые нечетные положительные числа $(n+1)T_{2n+1}/2^{2n}$ называются числами Дженокки $\langle 1, 1, 3, 17, 155, 2073, \ldots\rangle$ в честь Дженокки [106].)

6.25 $100n - nH_n < 100(n-1) - (n-1)H_{n-1} \iff H_{n-1} > 99$. (Наименьшее такое n приблизительно равно $e^{99-\gamma}$, хотя червяк затрачивает на свой путь $N \approx e^{100-\gamma}$ минут — примерно в e раз больше. Так что он приближается к цели на протяжении последних 63% своего пути.)

6.26 Пусть $u(k) = H_{k-1}$ и $\Delta v(k) = 1/k$, так что $u(k) = v(k)$. Тогда $S_n - H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}/k = H_{k-1}^2\big|_1^{n+1} - S_n = H_n^2 - S_n$.

6.27 Заметьте, что если $m > n$, то $\text{НОД}(F_m, F_n) = \text{НОД}(F_{m-n}, F_n)$, согласно (6.108). Это позволяет доказать требуемое по индукции.

6.28 (a) $Q_n = \alpha(L_n - F_n)/2 + \beta F_n$. (Это решение может быть записано также в виде $Q_n = \alpha F_{n-1} + \beta F_n$.) (b) $L_n = \phi^n + \hat{\phi}^n$.

6.29 При $k = 0$ это правило (6.133). При $k = 1$ это, в сущности, соотношение

$$K(x_1, \ldots, x_n)x_m = K(x_1, \ldots, x_m)\,K(x_m, \ldots, x_n) - K(x_1, \ldots, x_{m-2})\,K(x_{m+2}, \ldots, x_n)\,;$$

на языке азбуки Морзе второе произведение справа отбрасывает те случаи, где первое произведение содержит накладывающиеся тире. При $k > 1$ достаточно индукции по k с использованием (6.127) и (6.132). (Это тождество справедливо также и в тех случаях, когда один или более индексов при K становится равным -1, если условиться, что $K_{-1} = 0$. Когда умножение некоммутативно, то тождество Эйлера остается в силе, если записать его в виде

$$\begin{aligned} &K_{m+n}(x_1, \ldots, x_{m+n})\,K_k(x_{m+k}, \ldots, x_{m+1}) \\ &\quad = K_{m+k}(x_1, \ldots, x_{m+k})\,K_n(x_{m+n}, \ldots, x_{m+1}) \\ &\qquad + (-1)^k K_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1})\,K_{n-k-1}(x_{m+n}, \ldots, x_{m+k+2})\,. \end{aligned}$$

К примеру, несколько неожиданные некоммутативные разложения

$$(abc + a + c)(1 + ba) = (ab + 1)(cba + a + c)$$

мы получаем в случае $k = 2$, $m = 0$, $n = 3$.)

6.30 Производной $K(x_1, \ldots, x_n)$ по x_m является

$$K(x_1, \ldots, x_{m-1})\,K(x_{m+1}, \ldots, x_n)\,,$$

а вторая производная равна нулю; следовательно, ответ таков:

$$K(x_1, \ldots, x_n) + K(x_1, \ldots, x_{m-1})\,K(x_{m+1}, \ldots, x_n)\,y\,.$$

6.31 Поскольку $x^{\overline{n}} = (x + n - 1)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} (n-1)^{\underline{n-k}}$, имеем $\left|{n \atop k}\right| = \binom{n}{k}(n-1)^{\underline{n-k}}$. Эти коэффициенты, как оказывается, удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$\left|{n \atop k}\right| = \left|{-k \atop -n}\right|$

$$\left|{n \atop k}\right| = (n - 1 + k)\left|{n-1 \atop k}\right| + \left|{n-1 \atop k-1}\right|, \qquad \text{целые } n, k > 0.$$

6.32 Тождества $\sum_{k \leqslant m} k \left\{{n+k \atop k}\right\} = \left\{{m+n+1 \atop m}\right\}$ и $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left\{{k \atop m}\right\} \times (m+1)^{n-k} = \left\{{n+1 \atop m+1}\right\}$, они оба приводятся в табл. 295.

6.33 Если $n > 0$, то согласно (6.71), $\left[{n \atop 3}\right] = \frac{1}{2}(n-1)!\,(H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)})$, а согласно (6.19), $\left\{{n \atop 3}\right\} = \frac{1}{6}(3^n - 3 \cdot 2^n + 3)$.

6.34 Имеем $\left\langle{-1 \atop k}\right\rangle = 1/(k+1)$, $\left\langle{-2 \atop k}\right\rangle = H^{(2)}_{k+1}$, и вообще при любом целом n величина $\left\langle{n \atop k}\right\rangle$ задается соотношением (6.38).

6.35 Выберите в качестве n наименьшее целое $> 1/\epsilon$, такое, что $\lfloor H_n \rfloor > \lfloor H_{n-1} \rfloor$.

6.36 В этом случае $d_{k+1} = \bigl(100+(1+d_1)+\cdots+(1+d_k)\bigr)/(100+k)$, и решением является $d_{k+1} = H_{k+100} - H_{101} + 1$ при $k \geqslant 1$. Это превышает 2 при $k \geqslant 176$.

6.37 Суммирование (по частям) дает $H_{mn} - \left(\frac{m}{m} + \frac{m}{2m} + \cdots + \frac{m}{mn}\right) = H_{mn} - H_n$. Поэтому бесконечная сумма равна $\ln m$. (Отсюда следует, что

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{\nu_m(k)}{k(k+1)} = \frac{m}{m-1} \ln m\,,$$

поскольку $\nu_m(k) = (m-1)\sum_{j \geqslant 1}(k \bmod m^j)/m^j$.)

6.38 Суммируя по частям и используя (5.16), получаем

$$(-1)^k \left(\binom{r-1}{k} r^{-1} - \binom{r-1}{k-1} H_k\right) + C\,.$$

6.39 Запишите ее в виде $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} j^{-1} \sum_{j \leqslant k \leqslant n} H_k$ и, исходя из (6.67), просуммируйте вначале по k, получая

$$(n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n\,.$$

6.40 Если число $6n-1$ — простое, то числитель суммы

$$\sum_{k=1}^{4n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_{4n-1} - H_{2n-1}$$

делится на $6n-1$, поскольку эта сумма есть

$$\sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=2n}^{3n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{6n-1-k}\right) = \sum_{k=2n}^{3n-1} \frac{6n-1}{k(6n-1-k)}\,.$$

Аналогично, если $6n+1$ — простое число, то числитель суммы $\sum_{k=1}^{4n}(-1)^{k-1}/k = H_{4n} - H_{2n}$ кратен $6n+1$. Для 1987 надо суммировать до $k = 1324$.

6.41 $S_{n+1} = \sum_k \binom{\lfloor (n+1+k)/2 \rfloor}{k} = \sum_k \binom{\lfloor (n+k)/2 \rfloor}{k-1}$, следовательно, $S_{n+1} + S_n = \sum_k \binom{\lfloor (n+k)/2+1 \rfloor}{k} = S_{n+2}$. Ответ: F_{n+2}.

6.42 F_n.

6.43 Положите $z = \frac{1}{10}$ в $\sum_{n\geqslant 0} F_n z^n = z/(1-z-z^2)$, получая $\frac{10}{89}$. Данная сумма представляет собой периодическую десятичную дробь с длиной периода 44:

$$0.11235\,95505\,61797\,75280\,89887\,64044\,94382\,02247\,19101\,12359\,55+ .$$

6.44 При необходимости замените (m,k) либо на $(-m,-k)$, либо на $(k,-m)$, либо на $(-k,m)$ так, чтобы было $m \geqslant k \geqslant 0$. Если $m = k$, то все ясно. Если же $m > k$, то можно заменить (m,k) на $(m-k,m)$ и воспользоваться индукцией.

6.45 $X_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta$, где $B(n) = F_n$, $A(n) = F_{n-1}$, $A(n) + B(n) - D(n) = 1$ и $B(n) - C(n) + 3D(n) = n$.

6.46 Это $\phi/2$ и $\phi^{-1}/2$. Пусть $u = \cos 72^\circ$, а $v = \cos 36^\circ$; тогда $u = 2v^2 - 1$ и $v = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2u^2$. Следовательно, $u + v = 2(u+v)(v-u)$, и $4v^2 - 2v - 1 = 0$. Продолжая, можно найти пять комплексных корней пятой степени из единицы:

$$1\,, \quad \frac{\phi^{-1} \pm i\sqrt{2+\phi}}{2}\,, \quad \frac{-\phi \pm i\sqrt{3-\phi}}{2}\,.$$

„Let p be any old prime."
(см. [341], с. 419.)
(Русский перевод [341] можно не смотреть.
— Перев.)

6.47 $2^n\sqrt{5}F_n = (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n$ и четные степени $\sqrt{5}$ сокращаются. Пусть теперь p — некоторое нечетное простое число. $\binom{p}{2k+1} \equiv 0$ за исключением случая, когда $k = (p-1)/2$, и $\binom{p+1}{2k+1} \equiv 0$ за исключением случая, когда $k = 0$ или $k = (p-1)/2$; следовательно, $F_p \equiv 5^{(p-1)/2}$ и $2F_{p+1} \equiv 1 + 5^{(p-1)/2} \pmod p$. Можно показать, что $5^{(p-1)/2} \equiv 1$, когда p имеет вид $10k \pm 1$, и $5^{(p-1)/2} \equiv -1$, когда p имеет вид $10k \pm 3$.

6.48 Положите $K_{i,j} = K_{j-i+1}(x_i, \ldots, x_j)$. Повторным применением (6.133) обе части сводятся к $(K_{1,m-2}(x_{m-1} + x_{m+1}) + K_{1,m-3}) \times K_{m+2,n} + K_{1,m-2}K_{m+3,n}$.

6.49 Положите $z = \frac{1}{2}$ в (6.146); неполные частные — это 0, 2^{F_0}, 2^{F_1}, 2^{F_2}, … . (Как отмечал Кнут [138], это число является трансцендентным.)

6.50 (a) $f(n)$ — четное $\iff$ $3\backslash n$. (b) Если двоичное представление n имеет вид $(1^{a_1}0^{a_2}\ldots 1^{a_{m-1}}0^{a_m})_2$, где m — четное, то $f(n) = K(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$.

6.51 (a) Комбинаторное доказательство. Представление множества $\{1,2,\ldots,p\}$ в виде k подмножеств или циклов делится на „орбиты" из 1 или p представлений каждая, если к каждому элементу прибавить 1 по модулю p. К примеру,

$$\{1,2,4\}\cup\{3,5\} \to \{2,3,5\}\cup\{4,1\} \to \{3,4,1\}\cup\{5,2\}$$
$$\to \{4,5,2\}\cup\{1,3\} \to \{5,1,3\}\cup\{2,4\} \to \{1,2,4\}\cup\{3,5\}\,.$$

Орбита размера 1 получается только тогда, когда это преобразование переводит представление само в себя; но тогда $k = 1$ или

$k = p$. С другой стороны, можно дать алгебраическое доказательство: имеем $x^{p} \equiv x^{\underline{p}} + x^{\underline{1}}$ и $x^{\underline{p}} \equiv x^{p} - x \pmod p$, поскольку, согласно теореме Ферма, $x^p - x$ делится на $(x-0)(x-1)\ldots\bigl(x-(p-1)\bigr)$.

(b) Этот результат следует из части (a) и теоремы Вильсона, или же можно воспользоваться тем, что $x^{\overline{p-1}} \equiv x^{\overline{p}}/(x-1) \equiv (x^p - x)/(x-1) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x$.

(c) Имеем $\left\{{p+1 \atop k}\right\} \equiv \left[{p+1 \atop k}\right] \equiv 0$ при $3 \leqslant k \leqslant p$, затем $\left\{{p+2 \atop k}\right\} \equiv \left[{p+2 \atop k}\right] \equiv 0$ при $4 \leqslant k \leqslant p$ и т. д. (Аналогично $\left[{2p-1 \atop p}\right] \equiv -\left\{{2p-1 \atop p}\right\} \equiv 1$.)

(d) $p! = p^{\underline{p}} = \sum_k (-1)^{p-k} p^k \left[{p \atop k}\right] = p^p \left[{p \atop p}\right] - p^{p-1}\left[{p \atop p-1}\right] + \cdots + p^3\left[{p \atop 3}\right] - p^2\left[{p \atop 2}\right] + p\left[{p \atop 1}\right]$. Но $p\left[{p \atop 1}\right] = p!$, поэтому величина

$$\left[{p \atop 2}\right] = p\left[{p \atop 3}\right] - p^2\left[{p \atop 4}\right] + \cdots + p^{p-2}\left[{p \atop p}\right]$$

кратна p^2. (Это называется теоремой Вольштенхольма.)

6.52 (a) Заметьте, $H_n = H_n^* + H_{\lfloor n/p \rfloor}/p$, где $H_n^* = \sum_{k=1}^{n} (k \perp p)/k$. (b) Действуя по mod 5, получаем $H_r = \langle 0, 1, 4, 1, 0 \rangle$ при $0 \leqslant r \leqslant 4$. Таким образом, первым решением служит $n = 4$. Из части (a) известно, что $5 \backslash a_n \Longrightarrow 5 \backslash a_{\lfloor n/5 \rfloor}$, поэтому следующим возможным интервалом служит $n = 20 + r$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, где мы имеем $H_n = H_n^* + \frac{1}{5}H_4 = H_{20}^* + \frac{1}{5}H_4 + H_r + \sum_{k=1}^{r} 20/k(20+k)$. Числитель дроби H_{20}^*, как и числитель дроби H_4, делится на 25. Следовательно, в этом интервале есть только два решения: $n = 20$ и $n = 24$. Следующим возможным интервалом является $n = 100 + r$; в этом случае $H_n = H_n^* + \frac{1}{5}H_{20}$, что равно $\frac{1}{5}H_{20} + H_r$ плюс некая дробь, числитель которой кратен 5. Если $\frac{1}{5}H_{20} \equiv m \pmod 5$, где m — целое, то гармоническое число H_{100+r} будет иметь числитель, который делится на 5 тогда и только тогда, когда $m + H_r \equiv 0 \pmod 5$,— следовательно, m должно быть $\equiv 0$, 1 или 4. Действуя по модулю 5, находим, что $\frac{1}{5}H_{20} = \frac{1}{5}H_{20}^* + \frac{1}{25}H_4 \equiv \frac{1}{25}H_4 = \frac{1}{12} \equiv 3$; следовательно, при $100 \leqslant n \leqslant 104$ решений нет. Точно так же нет решений и при $120 \leqslant n \leqslant 124$ — нами найдены все три решения.

(Согласно упр. 6.51(d), мы всегда получаем, что $p^2 \backslash a_{p-1}$, $p \backslash a_{p^2-p}$ и $p \backslash a_{p^2-1}$, если p — некоторое простое число $\geqslant 5$. Только что приведенное рассуждение показывает, что этим исчерпываются все решения для $p \backslash a_n$ тогда и только тогда, когда не существует решения для $p^{-2}H_{p-1} + H_r \equiv 0 \pmod p$ при $0 \leqslant r < p$. Последнее условие справедливо не только при $p = 5$, но и при $p = 13$, 17, 23, 41 и 67, а возможно, и для бесконечного числа простых чисел. Числитель числа H_n делится на 3, только когда $n = 2$, 7 и 22; он делится на 7, только когда $n = 6$, 42, 48, 295, 299, 337, 341, 2096, 2390, 14675, 16731, 16735 и 102728. См. ответ к упр. 92.)

(Вниманию программистов: вот интересное условие для проверки на стольких простых числах, сколько вам по силам.)

6.53 Суммирование по частям дает

$$\frac{n+1}{(n+2)^2}\left(\frac{(-1)^m}{\binom{n+1}{m+1}}\bigl((n+2)H_{m+1} - 1\bigr) - 1\right).$$

6.54 (a) Если $m \geqslant p$, то $S_m(p) \equiv S_{m-(p-1)}(p) \pmod p$, поскольку $k^{p-1} \equiv 1$ при $1 \leqslant k < p$. Кроме того, $S_{p-1}(p) \equiv p-1 \equiv -1$. Если же $0 < m < p-1$, то можно записать, что

$$S_m(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{m} {m \brace j} k^{\underline{j}} = \sum_{j=0}^{m} {m \brace j} \frac{p^{\underline{j+1}}}{j+1} \equiv 0.$$

(b) Обстоятельство, содержащееся в указании к упражнению, означает, что знаменатель числа I_{2n} не делится ни на какое простое p,— следовательно, число I_{2n} должно быть целым. Для доказательства утверждения из указания можно считать, что $n>1$. Тогда число

(Числители чисел Бернулли играли важную роль в ранних исследованиях последней теоремы Ферма; см. Рибенбойм [259].)

(См. также [5, гл. 15]. — Перев.)*

$$B_{2n} + \frac{[(p-1)\backslash(2n)]}{p} + \sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n+1}{k} B_k \frac{p^{2n-k}}{2n+1}$$

— целое, согласно (6.78), (6.84) и п. (a). Поэтому нужно убедиться в том, что ни один из знаменателей $\binom{2n+1}{k}B_k p^{2n-k}/(2n+1) = \binom{2n}{k}B_k p^{2n-k}/(2n-k+1)$ не делится на p. Знаменатель числа $\binom{2n}{k}B_k p$ не делится на p, поскольку в знаменателе B_k не содержится p^2 (по индукции), а знаменатель $p^{2n-k-1}/(2n-k+1)$ не делится на p, поскольку $2n-k+1 < p^{2n-k}$ при $k \leqslant 2n-2$. чтд. (Числа I_{2n} затабулированы в [156]. Вплоть до числа I_{18} их вычислил в 1875 г. Эрмит [393]. Оказывается, что $I_2 = I_4 = I_6 = I_8 = I_{10} = I_{12} = 1$; следовательно, воспроизведенные в тексте числа Бернулли, включая число $\frac{-691}{2730}$(!), на самом деле подчиняются „простой“ закономерности. Однако при $2n > 12$ числа I_{2n}, по-видимому, не обладают сколько-нибудь примечательными свойствами. Так, $B_{24} = -86579 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}$, и число 86579 — простое.)

(c) Числа $2-1$ и $3-1$ всегда делят $2n$. Если n — простое, то делителями числа $2n$ являются только 1, 2, n и $2n$, поэтому при простом $n > 2$ знаменатель числа B_{2n} будет 6, если только число $2n+1$ также не является простым. В последнем случае можно попробовать $4n+3$, $8n+7$, …, до тех пор пока в конце концов не попадется непростое число (поскольку n делит $2^{n-1}n + 2^{n-1} - 1$). (Для этого доказательства не требуется более трудная, но справедливая теорема о том, что существует бесконечно много простых чисел вида $6k+1$.) Число 6 также может быть знаменателем B_{2n} и для непростых значений n, скажем, 49.

6.55 По правилу свертки Вандермонда указанная сумма есть $\frac{m+1}{x+m+1}\binom{x+n}{n}\binom{n}{m+1}$. Для получения (6.70) продифференцируйте и положите $x = 0$.

6.56 Сперва замените k^{n+1} на $\bigl((k-m)+m\bigr)^{n+1}$ и разложите по степеням $k-m$; результат упростится, как при выводе (6.72). Если $m > n$ или $m < 0$, то в результате получится

$(-1)^n n! - m^n/\binom{n-m}{n}$. В противном же случае необходимо взять предел (5.41) при $x \to -m$ за вычетом члена при $k = m$; в результате получается $(-1)^n n! + (-1)^{m+1}\binom{n}{m} m^n (n+1+mH_{n-m} - mH_m)$.

6.57 Сначала докажите по индукции, что в n-м ряду содержится самое большее три различные величины $A_n \geqslant B_n \geqslant C_n$; если n — четное, то они располагаются в циклическом порядке $[C_n, B_n, A_n, B_n, C_n]$, а если n — нечетное, то они располагаются в циклическом порядке $[C_n, B_n, A_n, A_n, B_n]$. Кроме того,

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= A_{2n} + B_{2n}\,, & A_{2n} &= 2A_{2n-1}\,, \\ B_{2n+1} &= B_{2n} + C_{2n}\,, & B_{2n} &= A_{2n-1} + B_{2n-1}\,, \\ C_{2n+1} &= 2C_{2n}\,, & C_{2n} &= B_{2n-1} + C_{2n-1}\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $Q_n = A_n - C_n = F_{n+1}$. (Относительно обернутых биномиальных коэффициентов порядка 3 см. упр. 5.75.)

6.58 (a) $\sum_{n\geqslant 0} F_n^2 z^n = z(1-z)/(1+z)(1-3z+z^2) = \frac{1}{5}\big((2-3z)/(1-3z+z^2) - 2/(1+z)\big)$. (Возведите в квадрат формулу Бине (6.123), просуммируйте по n, затем сгруппируйте члены так, чтобы ϕ и $\hat\phi$ исчезли.) (b) Аналогично,

$$\sum_{n\geqslant 0} F_n^3 z^n = \frac{z(1-2z-z^2)}{(1-4z-z^2)(1+z-z^2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{2z}{1-4z-z^2} + \frac{3z}{1+z-z^2}\right).$$

Отсюда следует, что $F_{n+1}^3 - 4F_n^3 - F_{n-1}^3 = 3(-1)^n F_n$. (Соответствующая рекуррентность для m-х степеней включает фибоначчиевы коэффициенты из упр. 86, она была обнаружена Джарденом и Моцкином [105].)

6.59 Пусть m — фиксированное число. Индукцией по n можно доказать, что и в самом деле можно найти такое x с дополнительным условием $x \not\equiv 2 \pmod 4$. Если x является таким решением, то можно перейти к решению по модулю 3^{n+1}, поскольку

$$F_{8\cdot 3^{n-1}} \equiv 3^n\,, \qquad F_{8\cdot 3^{n-1}-1} \equiv 3^n + 1 \pmod{3^{n+1}};$$

подойдет либо x, либо $x + 8\cdot 3^{n-1}$, либо $x + 16\cdot 3^{n-1}$.

6.60 Единственно возможные случаи: F_1+1, F_2+1, F_3+1, F_4-1 и F_6-1. В противном случае в разложениях возникают числа Люка из упр. 28:

$$\begin{aligned} F_{2m} + (-1)^m &= L_{m+1}F_{m-1}\,; & F_{2m+1} + (-1)^m &= L_m F_{m+1}\,; \\ F_{2m} - (-1)^m &= L_{m-1}F_{m+1}\,; & F_{2m+1} - (-1)^m &= L_{m+1}F_m\,. \end{aligned}$$

(В общем случае, $F_{m+n} - (-1)^n F_{m-n} = L_m F_n$.)

6.61 $1/F_{2m} = F_{m-1}/F_m - F_{2m-1}/F_{2m}$, если m — четное и положительное. Вторая сумма равна $5/4 - F_{3\cdot 2^n - 1}/F_{3\cdot 2^n}$ при $n \geqslant 1$.

6.62 (a) $A_n = \sqrt{5}\,A_{n-1} - A_{n-2}$ и $B_n = \sqrt{5}\,B_{n-1} - B_{n-2}$. Между прочим, кроме того, $\sqrt{5}\,A_n + B_n = 2A_{n+1}$ и $\sqrt{5}\,B_n - A_n = 2B_{n-1}$. (b) Выписывание начальных значений показывает, что

$$A_n = \begin{cases} L_n, & n \text{ четно}, \\ \sqrt{5}\,F_n, & n \text{ нечетно}, \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} \sqrt{5}\,F_n, & n \text{ четно}, \\ L_n, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

(c) $B_n/A_{n+1} - B_{n-1}/A_n = 1/(F_{2n+1} + 1)$, поскольку $B_nA_n - B_{n-1}A_{n+1} = \sqrt{5}$ и $A_nA_{n+1} = \sqrt{5}\,(F_{2n+1} + 1)$. Обратите внимание, что $B_n/A_{n+1} = (F_n/F_{n+1})[n — \text{четное}] + (L_n/L_{n+1})[n — \text{нечетное}]$. (d) Аналогично, $\sum_{k=1}^{n} 1/(F_{2k+1} - 1) = (A_0/B_1 - A_1/B_2) + \cdots + (A_{n-1}/B_n - A_n/B_{n+1}) = 2 - A_n/B_{n+1}$. Это можно также выразить как $(5F_n/L_{n+1})[n — \text{четное}] + (L_n/F_{n+1})[n — \text{нечетное}]$.

6.63 (a) $\left[{n \atop k}\right]$. Всего имеется $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ перестановок с $\pi_n = n$ и $(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$ перестановок с $\pi_n < n$. (b) $\left\langle{n \atop k}\right\rangle$. Каждая перестановка $\rho_1 \ldots \rho_{n-1}$ множества $\{1, \ldots, n-1\}$ приводит к n перестановкам $\pi_1\pi_2 \ldots \pi_n = \rho_1 \ldots \rho_{j-1}\, n\, \rho_{j+1} \ldots \rho_{n-1}\rho_j$. Если $\rho_1 \ldots \rho_{n-1}$ содержит k превышений, то имеется $k+1$ значений j, которые дают k превышений в перестановке $\pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$, а остальные $n-1-k$ значений дают $k+1$. Следовательно, общее число способов получения k превышений в перестановке $\pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$ равно $(k+1)\left\langle{n-1 \atop k}\right\rangle + \bigl((n-1)-(k-1)\bigr)\left\langle{n-1 \atop k-1}\right\rangle = \left\langle{n \atop k}\right\rangle$.

6.64 В соответствии с доказанным в упр. 5.72, знаменатель дроби $\binom{1/2}{2n}$ равен $2^{4n-\nu_2(n)}$. Согласно (6.44), дробь $\left[{1/2 \atop 1/2-n}\right]$ имеет такой же знаменатель, поскольку $\left\langle\!\left\langle{n \atop 0}\right\rangle\!\right\rangle = 1$ и $\left\langle\!\left\langle{n \atop k}\right\rangle\!\right\rangle$ четно при $k > 0$.

6.65 Это равносильно утверждению, что $\left\langle{n \atop k}\right\rangle/n!$ является вероятностью того, что $\lfloor x_1 + \cdots + x_n \rfloor = k$, если $x_1, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные между 0 и 1. Пусть $y_j = (x_1 + \cdots + x_j) \bmod 1$. Тогда $y_1, \ldots, y_n$ независимы и равномерно распределены, а $\lfloor x_1 + \cdots + x_n \rfloor$ — это число спадов в последовательности y. Перестановка y также случайна и вероятность k спадов такая же, как и вероятность k подъемов.

6.66 Это $2^{n+1}(2^{n+1} - 1)B_{n+1}/(n+1)$, если $n > 0$. (См. (7.56) и (6.92); требуемые числа являются, в сущности, коэффициентами разложения $1 - \operatorname{th} z$.)

6.67 Эта сумма равна $\sum_k \left(\left\{{n \atop k+1}\right\}(k+1)! + \left\{{n \atop k}\right\}k!\right)\binom{n-k}{n-m}(-1)^{m-k} = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\}k!(-1)^{m-k}\left(\binom{n-k}{n-m} - \binom{n+1-k}{n-m}\right) = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\}k!(-1)^{m+1-k}\binom{n-k}{n-m-1} = \left\langle{n \atop n-m-1}\right\rangle$ ввиду (6.3) и (6.40). Теперь примените (6.34). (Это тождество допускает и комбинаторное истолкование [348].)

6.68 Имеет место общая формула

$$\left\langle\!\!\left\langle{n \atop m}\right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \binom{2n+1}{k}\left\{{n+m+1-k \atop m+1-k}\right\}(-1)^k \quad \text{при } n > m \geqslant 0,$$

аналогичная формуле (6.38). При $m = 2$ это равно

$$\left\langle\!\!\left\langle {n \atop 2} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\{ {n+3 \atop 3} \right\} - (2n+1)\left\{ {n+2 \atop 2} \right\} + \binom{2n+1}{2}\left\{ {n+1 \atop 1} \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}3^{n+2} - (2n+3)2^{n+1} + \tfrac{1}{2}(4n^2+6n+3)\,.$$

6.69 Это $\frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)(2H_{2n}-H_n)-\frac{1}{36}n(10n^2+9n-1)$. (Было бы неплохо автоматизировать вывод формул, подобных этой.)

6.70 $1/k - 1/(k+z) = z/k^2 - z^2/k^3 + \cdots$, этот ряд сходится при $|z| < 1$.

6.71 Заметьте, что $\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k} = \binom{n+z}{n}n^{-z}e^{(\ln n - H_n)z}$. Если $f(z) = \frac{d}{dz}(z!)$, то $f(z)/z! + \gamma = H_z$.

6.72 Для разложения $\operatorname{tg} z$ можно воспользоваться тождеством $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2\operatorname{ctg} 2z$, которое равносильно тождеству из упр. 23). Кроме того, $z/\sin z = z\operatorname{ctg} z + z\operatorname{tg}\frac{1}{2}z$ разлагается в степенной ряд $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n-1}(4^n-2)B_{2n}z^{2n}/(2n)!$, а

$$\ln\frac{\operatorname{tg} z}{z} = \ln\frac{\sin z}{z} - \ln\cos z$$
$$= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{4^nB_{2n}z^{2n}}{(2n)(2n)!} - \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{4^n(4^n-1)B_{2n}z^{2n}}{(2n)(2n)!}$$
$$= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{4^n(4^n-2)B_{2n}z^{2n}}{(2n)(2n)!}\,,$$

поскольку $\frac{d}{dz}\ln\sin z = \operatorname{ctg} z$ и $\frac{d}{dz}\ln\cos z = -\operatorname{tg} z$.

6.73 Поскольку $\operatorname{ctg}(z+\pi) = \operatorname{ctg} z$ и $\operatorname{ctg}(z+\frac{1}{2}\pi) = -\operatorname{tg} z$, то данное тождество равносильно тождеству

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\operatorname{ctg}\frac{z+k\pi}{2^n}\,,$$

которое получается по индукции из случая $n = 1$. Указанный предел справедлив потому, что $z\operatorname{ctg} z \to 1$ при $z \to 0$. Можно показать, что допустим почленный переход к пределу, так что справедлива формула (6.88). (Между прочим, имеет место и общая формула

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}\frac{z+k\pi}{n}.$$

Она может быть установлена либо из формулы (6.88), либо из формулы

$$\frac{1}{e^{nz}-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{e^{z+2k\pi i/n}-1}\,,$$

эквивалентной разложению $1/(z^n-1)$ в элементарные дроби.)

6.74 Поскольку $\operatorname{tg} 2z + \sec 2z = (\sin z + \cos z)/(\cos z - \sin z)$, то подстановка $x = 1$ в (6.94) дает $T_n(1) = 2^n T_n$, если n — нечетное, и $T_n(1) = 2^n |E_n|$, если n — четное, где $1/\cos z = \sum_{n\geqslant 0} |E_{2n}| z^{2n}/(2n)!$. (Числа $|E_n|$ — *секансные числа*; с чередующимися знаками они называются *Эйлеровыми числами* — не путать с числами Эйлера $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. Имеем $\langle E_0, E_2, E_4, \ldots \rangle = \langle 1, -1, 5, -61, 1385, -50521, 2702765, \ldots \rangle$.)

6.75 Положим $G(w,z) = \sin z/\cos(w+z)$ и $H(w,z) = \cos z/\cos(w+z)$, и пусть $G(w,z) + H(w,z) = \sum_{m,n} A_{m,n} w^m z^n/m!\,n!$. Тогда из уравнений $G(w,0) = 0$ и $(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial w})G(w,z) = H(w,z)$ получаем $A_{m,0} = 0$ при нечетном m, $A_{m,n+1} = A_{m+1,n} + A_{m,n}$, если $m+n$ — четное; а из уравнений $H(0,z) = 1$ и $(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial z})H(w,z) = G(w,z)$ получаем $A_{0,n} = [n=0]$ при четном n, $A_{m+1,n} = A_{m,n+1} + A_{m,n}$, если $m+n$ — нечетное. Следовательно, n-й ряд треугольника содержит числа $A_{n,0}, A_{n-1,1}, \ldots, A_{0,n}$. Число $A_{n,0}$ слева есть секансное число $|E_n|$; справа имеем $A_{0,n} = T_n + [n=0]$.

6.76 Пусть A_n обозначает требуемую сумму. Заглянув вперед, в (7.49) мы видим, что $\sum_n A_n z^n/n! = \sum_{n,k} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} 2^{n-k} k!\, z^n/n! = \sum_k (-1)^k 2^{-k} (e^{2z} - 1)^k = 2/(e^{2z} + 1) = 1 - \operatorname{th} z$. Следовательно, воспользовавшись упр. 23 или 72, находим:

$$A_n = (2^{n+1} - 4^{n+1}) B_{n+1}/(n+1) = (-1)^{(n+1)/2} T_n + [n=0]\,.$$

6.77 Формула доказывается индукцией по m с использованием рекуррентности из упр. 18. Можно также доказать ее, отправляясь от (6.50) и использовав тот факт, что

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(e^z-1)^m} &= (D+1)^{\overline{m-1}} \frac{1}{e^z-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left[{m \atop m-k} \right] \frac{d^{m-k-1}}{dz^{m-k-1}} \frac{1}{e^z-1}, \quad \text{целое } m > 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение оказывается эквивалентным следующему:

$$\frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{e^z-1} = (-1)^m \sum_k \left\{ {m+1 \atop k} \right\} \frac{(k-1)!}{(e^z-1)^k}, \quad \text{целое } m \geqslant 0.$$

6.78 Если $p(x)$ — некоторый многочлен степени $\leqslant n$, то

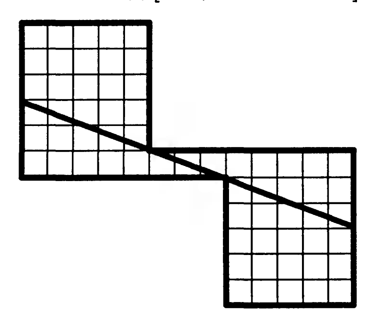
$$p(x) = \sum_k p(-k) \binom{-x}{k} \binom{x+n}{n-k},$$

поскольку это равенство справедливо при $x = 0, -1, \ldots, -n$. Указанное в упражнении тождество является частным случаем этого, когда $p(x) = x\sigma_n(x)$ и $x = 1$. Между прочим, более простое выражение для чисел Бернулли через числа Стирлинга получается

при подстановке $k = 1$ в (6.99):

$$\sum_{k\geqslant 0} \left\{ {m \atop k} \right\} (-1)^k \frac{k!}{k+1} = B_m .$$

6.79 Сэм Лойд [202, с. 288 и 378] привел конструкцию



и утверждал, что еще в 1858 г. он придумал (но не опубликовал) конструкцию „64=65". (Аналогичные парадоксы восходят, по крайней мере, еще к восемнадцатому веку, однако Лойд обнаружил более удачные способы их представления.)

См. также [121, задача 339] — Перев.*

6.80 Можно ожидать, что $A_m/A_{m-1} \approx \phi$, так что попробуем $A_{m-1} = 618034+r$ и $A_{m-2} = 381966-r$. Тогда $A_{m-3} = 236068+2r$ и т. д., и мы выясняем, что $A_{m-18} = 144-2584r$, $A_{m-19} = 154+4181r$. Следовательно, $r = 0$, $x = 154$, $y = 144$, $m = 20$.

„Говорят, что последний том „Начал" Евклида был целиком посвящен геометрическим заблуждениям такого рода... К несчастью, этот том утерян, но, без сомнений, это была величайшая из написанных автором книг."
— С. Лойд, [203, с. 38].*

6.81 Если $P(F_{n+1}, F_n) = 0$ при бесконечно многих *четных* значениях n, то $P(x, y)$ делится на $U(x, y)-1$, где $U(x, y) = x^2-xy-y^2$. Действительно, если t — совокупная степень многочлена P, то можно записать, что

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{t} q_k x^k y^{t-k} + \sum_{j+k<t} r_{j,k} x^j y^k = Q(x,y) + R(x,y) .$$

Тогда

$$\frac{P(F_{n+1}, F_n)}{F_n^t} = \sum_{k=0}^{t} q_k \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^k + O(1/F_n) ,$$

и, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\sum_{k=0}^{t} q_k \phi^k = 0$. Следовательно, $Q(x,y)$ кратно $U(x,y)$, скажем, $A(x,y)U(x,y)$. Но $U(F_{n+1}, F_n) = (-1)^n$ и n — четное, так что $P_0(x,y) = P(x,y) - \big(U(x,y) - 1\big)A(x,y)$ — другой многочлен со свойством $P_0(F_{n+1}, F_n) = 0$. Совокупная степень многочлена P_0 меньше t, поэтому индукцией по t получаем, что P_0 кратен $U - 1$.

Аналогично, многочлен $P(x, y)$ делится на $U(x, y) + 1$, если $P(F_{n+1}, F_n) = 0$ при бесконечно многих *нечетных* значениях n. Объединение двух этих фактов дает требуемое необходимое и достаточное условие: $P(x, y)$ делится на $U(x, y)^2 - 1$.

6.82 Сперва складываем цифры без переноса, получая цифры 0, 1 и 2. Затем используем два правила переноса

$$0\,(d{+}1)\,(e{+}1) \to 1\,d\,e\,,$$
$$0\,(d{+}2)\,0\,e \to 1\,d\,0\,(e+1)\,,$$

выполняя всегда крайний слева допустимый перенос. Этот процесс завершается, поскольку двоичная величина $(b_m \ldots b_2)_2$, получаемая при чтении $(b_m \ldots b_2)_F$, увеличивается при каждом переносе. Но перенос мог бы распространиться вправо от „фибоначчиевой точки“ — например, $(1)_F + (1)_F$ становится $(10.01)_F$. Подобное распространение вправо захватывает самое большее две позиции, и эти две цифровые позиции при необходимости вновь могут быть „обнулены“, используя алгоритм „прибавления 1“ из текста главы.

Между прочим, имеется соответствующая операция „умножения“ целых неотрицательных чисел. Если $m = F_{j_1} + \cdots + F_{j_q}$ и $n = F_{k_1} + \cdots + F_{k_r}$ в фибоначчиевой системе счисления, то положим $m \circ n = \sum_{b=1}^{q} \sum_{c=1}^{r} F_{j_b + k_c}$ по аналогии с умножением двоичных чисел. (Это определение означает, что $m \circ n \approx \sqrt{5}\,mn$ при больших m и n, хотя $1 \circ n \approx \phi^2 n$.) Сложение по Фибоначчи приводит к доказательству сочетательного закона $l \circ (m \circ n) = (l \circ m) \circ n$.)

Упражнение: $m \circ n = mn + \lfloor (m+1)/\phi \rfloor n + m \lfloor (n+1)/\phi \rfloor$. *(Ср. с работой Ю. В. Матиясевича в [116*, с. 132–144]. — Перев.)*

6.83 Возможно; к примеру, можно взять

$$A_0 = 331635635998274737472200656430763\,;$$
$$A_1 = 1510028911088401971189590305498785\,.$$

Получающаяся последовательность обладает тем свойством, что делится на p_k (не равняясь им) при $n \bmod m_k = r_k$, где числа (p_k, m_k, r_k) соответственно принимают 18 следующих значений:

(3, 4, 1)	(2, 3, 2)	(5, 5, 1)
(7, 8, 3)	(17, 9, 4)	(11, 10, 2)
(47, 16, 7)	(19, 18, 10)	(61, 15, 3)
(2207, 32, 15)	(53, 27, 16)	(31, 30, 24)
(1087, 64, 31)	(109, 27, 7)	(41, 20, 10)
(4481, 64, 63)	(5779, 54, 52)	(2521, 60, 60)

Каждому целому n соответствует одна из этих троек — к примеру, все нечетные n содержатся в одной из шести троек в первой колонке, а тройки в средней колонке включают все четные n, которые не делятся на 6. Оставшаяся часть доказательства основана на том факте, что $A_{m+n} = A_m F_{n-1} + A_{m+1} F_n$, а также сравнениях

$$A_0 \equiv F_{m_k - r_k} \bmod p_k\,,$$
$$A_1 \equiv F_{m_k - r_k + 1} \bmod p_k$$

для каждой из троек (p_k, m_k, r_k). (Возможен также „улучшенный“ вариант решения, в котором A_0 и A_1 являются числами, состоящими „всего лишь“ из 17 цифр каждое [150].)

6.84 Последовательности из упр. 62 удовлетворяют соотношениям $A_{-m} = A_m$, $B_{-m} = -B_m$ и

$$\begin{aligned} A_m A_n &= A_{m+n} + A_{m-n}\,, \\ A_m B_n &= B_{m+n} - B_{m-n}\,, \\ B_m B_n &= A_{m+n} - A_{m-n}\,. \end{aligned}$$

Пусть $f_k = B_{mk}/A_{mk+l}$ и $g_k = A_{mk}/B_{mk+l}$, где $l = \frac{1}{2}(n-m)$. Тогда $f_{k+1} - f_k = A_l B_m/(A_{2mk+n} + A_m)$ и $g_k - g_{k+1} = A_l B_m/(A_{2mk+n} - A_m)$; следовательно,

$$\begin{aligned} S^+_{m,n} &= \frac{\sqrt{5}}{A_l B_m} \lim_{k\to\infty}(f_k - f_0) &= \frac{\sqrt{5}}{\phi^l A_l L_m}\,, \\ S^-_{m,n} &= \frac{\sqrt{5}}{A_l B_m} \lim_{k\to\infty}(g_0 - g_k) &= \frac{\sqrt{5}}{A_l L_m}\left(\frac{2}{B_l} - \frac{1}{\phi^l}\right) \\ & &= \frac{2}{F_l L_l L_m} - S^+_{m,n}\,. \end{aligned}$$

6.85 Данное обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда N имеет одну из следующих семи форм: 5^k, $2\cdot 5^k$, $4\cdot 5^k$, $3^j\cdot 5^k$, $6\cdot 5^k$, $7\cdot 5^k$, $14\cdot 5^k$.

6.86 Для любого целого положительного m пусть $r(m)$ будет наименьшим индексом j, таким, что C_j делится на m; если такого j не существует, положим $r(m) = \infty$. Тогда имеет место следующая цепочка эквивалентностей: C_n делится на m тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(C_n, C_{r(m)})$ делится на m, тогда и только тогда, когда $C_{\text{НОД}(n, r(m))}$ делится на m, тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(n, r(m)) = r(m)$, тогда и только тогда, когда n делится на $r(m)$.

(Верно и обратное; сформулированное НОД-условие C_1, C_2, …, как легко видеть, вытекает из существования функции $r(m)$, возможно бесконечной, такой, что C_n делится на m тогда и только тогда, когда n делится на $r(m)$.)

Положим теперь $\Pi(n) = C_1 C_2 \ldots C_n$, так что

$$\binom{m+n}{m}_{\mathcal{C}} = \frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m)\,\Pi(n)}\,.$$

Если p — простое, то кратность, с которой p делит $\Pi(n)$, равна $f_p(n) = \sum_{k\geqslant 1}\lfloor n/r(p^k)\rfloor$, поскольку $\lfloor n/p^k\rfloor$ есть число элементов $\{C_1, \ldots, C_n\}$, делящихся на p^k. Поэтому $f_p(m+n) \geqslant f_p(m) + f_p(n)$ при любом p, и число $\binom{m+n}{m}_{\mathcal{C}}$ — целое.

6.87 Данное произведение матриц равно

$$\begin{pmatrix} K_{n-2}(x_2, \ldots, x_{n-1}) & K_{n-1}(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ K_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & K_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \end{pmatrix}.$$

Это же относится и к произведениям L и R, таким, как в (6.137), ибо

$$R^a\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}L^a.$$

Определитель же равен $K_n(x_1, \ldots, x_n)$, а более общий трехдиагональный определитель

$$\det\begin{pmatrix}x_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ y_2 & x_2 & 1 & & 0\\ 0 & y_3 & x_3 & 1 & \vdots\\ \vdots & & & & \\ & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & y_n & x_n\end{pmatrix}$$

удовлетворяет рекуррентности $D_n = x_n D_{n-1} - y_n D_{n-2}$.

6.88 Пусть $\alpha^{-1} = a_0 + 1/\bigl(a_1 + 1/(a_2 + \cdots)\bigr)$ — представление α^{-1} в виде непрерывной дроби. Тогда

$$\frac{a_0}{z} + \cfrac{1}{A_0(z) + \cfrac{1}{A_1(z) + \cfrac{1}{A_2(z) + \cfrac{1}{\ddots}}}} = \frac{1-z}{z}\sum_{n\geqslant 1} z^{\lfloor n\alpha\rfloor},$$

где

$$A_m(z) = \frac{z^{-q_{m+1}} - z^{-q_{m-1}}}{z^{-q_m} - 1}, \qquad q_m = K_m(a_1, \ldots, a_m).$$

В доказательстве, аналогичном доказательству (6.146) в тексте, используется обобщение теоремы Цеккендорфа (Френкель [323, §4]). Если $z = 1/b$, где целое $b \geqslant 2$, то это дает представление в виде непрерывной дроби трансцендентного числа $(b-1)\sum_{n\geqslant 1} b^{-\lfloor n\alpha\rfloor}$, как в упр. 49.

6.89 Пусть $p = K(0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, так что p/n — это m-я подходящая дробь к данной непрерывной дроби. Тогда $\alpha = p/n + (-1)^m/nq$, где $q = K(a_1, \ldots, a_m, \beta)$ и $\beta > 1$. Поэтому точки $\{k\alpha\}$ при $0 \leqslant k < n$ могут быть записаны в виде

$$\frac{0}{n},\ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^m\pi_1}{nq},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n} + \frac{(-1)^m\pi_{n-1}}{nq},$$

где $\pi_1 \ldots \pi_{n-1}$ — перестановка множества $\{1, \ldots, n-1\}$. Пусть $f(\nu)$ — число таких точек $< \nu$; тогда как $f(\nu)$, так и νn увеличиваются на 1 при увеличении ν от k/n до $(k+1)/n$, за исключением случая, когда $k = 0$ или $k = n-1$, так что они никогда не различаются более чем на 2.

6.90 Согласно (6.139) и (6.136), нам нужно максимизировать $K(a_1, \ldots, a_m)$ по всем последовательностям целых положительных чисел, сумма которых $\leqslant n+1$. Данный максимум достигается тогда, когда все a равны 1, ибо если $j \geqslant 1$ и $a \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned} &K_{j+k+1}(1, \ldots, 1, a+1, b_1, \ldots, b_k) \\ &\quad = K_{j+k+1}(1, \ldots, 1, a, b_1, \ldots, b_k) + K_j(1, \ldots, 1)\, K_k(b_1, \ldots, b_k) \\ &\quad \leqslant K_{j+k+1}(1, \ldots, 1, a, b_1, \ldots, b_k) + K_{j+k}(1, \ldots, 1, a, b_1, \ldots, b_k) \\ &\quad = K_{j+k+2}(1, \ldots, 1, a, b_1, \ldots, b_k)\,. \end{aligned}$$

(Моцкин и Штраус [226] решают более общие задачи максимизации, связанные с континуантами.)

6.91 Один из кандидатов для случая $n \bmod 1 = \frac{1}{2}$ представлен в [145, §6], хотя, может быть, лучше всего умножить обсуждаемые там целые числа на некоторую константу, включающую в себя $\sqrt{\pi}$. С другой стороны, Ренцо Спруньоли заметил, что можно определить $\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}/m!$ для целого $m \geqslant 0$ и произвольного $n \geqslant 0$; в этом случае (6.3) выполняется при любом $n \geqslant 1$.

6.92 (a) Дэвид Бойд показал, что существует только конечное число решений при любом $p < 500$ за исключением, возможно, $p = 83$, 127, 397. (b) Поведение b_n довольно-таки странно: с одной стороны, $b_n = \text{НОК}(1, \ldots, n)$ при $968 \leqslant n \leqslant 1066$; с другой стороны $b_{600} = \text{НОК}(1, \ldots, 600)/(3^3 \cdot 5^2 \cdot 43)$. Эндрю Одлыжко отмечает, что p делит $\text{НОК}(1, \ldots, n)/b_n$ тогда и только тогда, когда $kp^m \leqslant n < (k+1)p^m$ при некотором $m \geqslant 1$ и некотором $k < p$, таком, что p делит числитель числа H_k. Поэтому бесконечно много таких n существует в том случае, когда, к примеру, может быть показано, что почти все простые числа имеют только одно такое значение k (именно $k = p - 1$).

Еще один повод запомнить 1066? (1066 — это год завоевания Англии норманнами. А чем знаменит год 968? — Перев.)

6.93 (Брент [39] обнаружил у числа e^γ удивительно большое неполное частное 1568705, но, по-видимому, это просто случайное стечение обстоятельств. К примеру, Госпер обнаружил еще большие неполные частные у числа π: 453 294-е равно 12996958, а 11 504 931-е равно 878783625.)

6.94 Рассмотрите производящую функцию $\sum_{m,n\geqslant 0} \left| {m+n \atop m} \right| w^m z^n$, которая имеет вид $\sum_n \bigl(wF(a,b,c) + zF(a',b',c')\bigr)^n$, где $F(a,b,c)$ — дифференциальный оператор $a + b\vartheta_w + c\vartheta_z$.

6.95 Получить окончательный результат здесь может быть трудно или вовсе невозможно, поскольку числа Стирлинга не являются „голономными“ в смысле [119].

7.1 Подставим в производящую функцию z^4 вместо ▯ и z вместо ▭. Получим функцию $1/(1 - z^4 - z^2)$. Это похоже на производящую функцию для T, однако z заменено на z^2. Следовательно, ответом будет 0 для нечетных m и $F_{m/2+1}$ — для четных.

7.2 $G(z) = 1/(1-2z) + 1/(1-3z)$; $\widehat{G}(z) = e^{2z} + e^{3z}$.

7.3 Положим $z = 1/10$ в производящей функции и получим $\frac{10}{9}\ln\frac{10}{9}$.

7.4 Поделим $P(z)$ на $Q(z)$ и найдем частное $T(z)$ и остаток $P_0(z)$, степень которого меньше степени Q. Коэффициенты $T(z)$ следует добавить к коэффициентам $[z^n]\,P_0(z)/Q(z)$ с малыми значениями n. (Это как раз многочлен $T(z)$ из (7.28).)

7.5 Это свертка $(1+z^2)^r$ и $(1+z)^r$, так что

$$S(z) = (1+z+z^2+z^3)^r\,.$$

Для коэффициентов этой производящей функции не известно никакого простого выражения; следовательно, указанная сумма, вероятно, не может быть выражена в достаточно простой замкнутой форме. (Производящие функции пригодны и для получения отрицательных результатов.)

7.6 Запишем решение соотношений $g_0 = \alpha$, $g_1 = \beta$, $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n\gamma$ в виде $g_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$. Функция 2^n подходит в качестве решения при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$; функция $(-1)^n$ — при $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$; функция $(-1)^n n$ — при $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Следовательно, $A(n) + 2B(n) = 2^n$, $A(n) - B(n) = (-1)^n$ и $-B(n) + 3C(n) = (-1)^n n$.

7.7 $G(z) = \bigl(z/(1-z)^2\bigr)G(z) + 1$, следовательно,

$$G(z) = \frac{1-2z+z^2}{1-3z+z^2} = 1 + \frac{z}{1-3z+z^2}\,;$$

Бьюсь об заклад, что у сомнительного „фана порядка нуль“ все же есть одно остовное дерево.

поэтому имеем $g_n = F_{2n} + [n=0]$.

7.8 Дважды продифференцировав $(1-z)^{-x-1}$ по x, получим

$$\binom{x+n}{n}\bigl((H_{x+n} - H_x)^2 - (H^{(2)}_{x+n} - H^{(2)}_x)\bigr)\,.$$

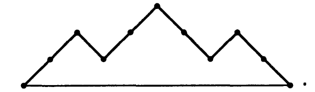
Теперь положим $x = m$.

7.9 $(n+1)(H_n^2 - H_n^{(2)}) - 2n(H_n - 1)$.

7.10 Из тождества $H_{k-1/2} - H_{-1/2} = \frac{2}{2k-1} + \cdots + \frac{2}{1} = 2H_{2k} - H_k$ вытекает, что $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}(2H_{2k} - H_k) = 4^n H_n$.

7.11 (a) $C(z) = A(z)B(z^2)/(1-z)$. (b) $zB'(z) = A(2z)e^z$, следовательно, $A(z) = \frac{z}{2}e^{-z/2}B'(\frac{z}{2})$. (c) $A(z) = B(z)/(1-z)^{r+1}$, следовательно, $B(z) = (1-z)^{r+1}A(z)$ и поэтому $f_k(r) = \binom{r+1}{k}(-1)^k$.

7.12 C_n. Числа в верхнем ряду соответствуют позициям плюс единиц в последовательности из '+1' и '−1', определяющей „горную гряду"; числа нижнего ряда отвечают позициям минус единиц. Например, приведенный в упражнении массив соответствует



7.13 Продолжим последовательность периодическим образом (положим $x_{m+k} = x_k$) и определим $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Имеем $s_m = l$, $s_{2m} = 2l$ и т. д. Должен существовать максимальный индекс k_j, такой, что $s_{k_j} = j$, $s_{k_j+m} = l + j$ и т. д. Эти индексы k_1, …, k_l (modulo m) определяют требуемый циклический сдвиг.

Например, для последовательности $\langle -2, 1, -1, 0, 1, 1, -1, 1, 1, 1 \rangle$ с $m = 10$ и $l = 2$ имеем $k_1 = 17$, $k_2 = 24$.

7.14 Уравнение $\widehat{G}(z) = -2z\widehat{G}(z) + \widehat{G}(z)^2 + z$ (будьте внимательны с последним слагаемым!) с помощью формулы для корней квадратного уравнения приводит к

$$\widehat{G}(z) = \frac{1 + 2z - \sqrt{1 + 4z^2}}{2}.$$

Следовательно, $g_{2n+1} = 0$ и $g_{2n} = (-1)^n (2n)!\, C_{n-1}$ для всех $n > 0$.

7.15 Существует $\binom{n}{k}\varpi_{n-k}$ разбиений, в которых подмножество, включающее $n + 1$, содержит еще k других предметов. Следовательно, $\widehat{P}'(z) = e^z \widehat{P}(z)$. Решением этого дифференциального уравнения будет $\widehat{P}(z) = e^{e^z + c}$, причем $c = -1$, поскольку $\widehat{P}(0) = 1$. (Этот результат можно также получить суммированием (7.49) по m, поскольку $\varpi_n = \sum_m {n \brace m}$.)

7.16 Один из способов состоит в том, чтобы прологарифмировать соотношение

$$B(z) = 1/\bigl((1-z)^{a_1}(1-z^2)^{a_2}(1-z^3)^{a_3}(1-z^4)^{a_4}\ldots\bigr),$$

затем использовать формулу для $\ln \frac{1}{1-z}$ и поменять порядок суммирования.

7.17 Утверждение следует из того, что $\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$. Имеется также и обратная формула:

$$\widehat{G}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} G(ze^{-i\theta})\, e^{e^{i\theta}}\, d\theta.$$

7.18 (a) $\zeta(z - \frac{1}{2})$; (b) $-\zeta'(z)$; (c) $\zeta(z)/\zeta(2z)$. Любое положительное целое однозначно представляется в виде $m^2 q$, где q свободно от квадратов.

7.19 При $n > 0$ коэффициент $[z^n]\exp\bigl(x\ln F(z)\bigr)$ является многочленом степени n от x, который кратен x. Первая формула свертки получается из приравнивания коэффициентов при z^n в равенстве $F(z)^x F(z)^y = F(z)^{x+y}$. Вторая формула выводится, если приравнять коэффициенты при z^{n-1} в равенстве $F'(z)F(z)^{x-1}F(z)^y = F'(z)F(z)^{x+y-1}$, поскольку

$$F'(z)F(z)^{x-1} = x^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\bigl(F(z)^x\bigr) = x^{-1}\sum_{n\geqslant 0} nf_n(x)z^{n-1}\,.$$

(Взяв производную $\partial/\partial x$, как в (7.43), можно получить последующие свертки.)

Как показано в [153], можно утверждать даже большее, а именно

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{xf_k(x+tk)}{x+tk}\,\frac{yf_{n-k}(y+t(n-k))}{y+t(n-k)} = \frac{(x+y)f_n(x+y+tn)}{x+y+tn}$$

для произвольных x, y и t. В действительности последовательность многочленов $xf_n(x+tn)/(x+tn)$ дает коэффициенты функции $\mathcal{F}_t(z)^x$, где

$$\mathcal{F}_t(z) = F\bigl(z\mathcal{F}_t(z)^t\bigr)\,.$$

(В (5.59) и (6.52) мы встречались с частными случаями этого тождества.)

7.20 Пусть $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$. Тогда

$$z^l G^{(k)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} n^{\underline{k}} g_n z^{n-k+l} = \sum_{n\geqslant 0}(n+k-l)^{\underline{k}} g_{n+k-l} z^n$$

для всех $k, l \geqslant 0$, если положить $g_n = 0$ для $n < 0$. Следовательно, если $P_0(z)$, …, $P_m(z)$ — многочлены с максимальной степенью d, не все равные нулю, то существуют многочлены $p_0(n)$, …, $p_{m+d}(n)$, такие, что

$$P_0(z)G(z) + \cdots + P_m(z)G^{(m)}(z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{j=0}^{m+d} p_j(n)\,g_{n+j-d}z^n\,.$$

Поэтому из условия дифференцируемой конечности функции $G(z)$ следует, что

$$\sum_{j=0}^{m+d} p_j(n+d)\,g_{n+j} = 0 \qquad \text{при любом } n \geqslant 0.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично. (Одно из следствий: производящая функция $G(z)$ дифференцируемо конечна тогда и только тогда, когда дифференцируемо конечна соответствующая экспоненциальная производящая функция $\widehat{G}(z)$.)

7.21 Это есть задача размена с номиналами монет 10 и 20, поэтому $G(z) = 1/(1-z^{10})(1-z^{20}) = \check{G}(z^{10})$, где $\check{G}(z) = 1/(1-z)(1-z^2)$. (a) Разложением $\check{G}(z)$ на элементарные дроби будет $\frac{1}{2}(1-z)^{-2} + \frac{1}{4}(1-z)^{-1} + \frac{1}{4}(1+z)^{-1}$, так что $[z^n]\,\check{G}(z) = \frac{1}{4}\bigl(2n+3+(-1)^n\bigr)$. Подстановка $n = 50$ дает 26 способов произвести выплату. (b) $\check{G}(z) = (1+z)/(1-z^2)^2 = (1+z)(1+2z^2+3z^4+\cdots)$, поэтому $[z^n]\,\check{G}(z) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. (Сравните со значением $N_n = \lfloor n/5 \rfloor + 1$ в задаче о размене монет в тексте. Задача грабителя эквивалентна задаче размена при помощи пенни и „двушек“.)

Этот медленный путь к ответу как раз позволит кассиру протянуть время до прихода полиции.

В США существует монета в два цента, но она не чеканится с 1873 г.

7.22 У каждого многоугольника есть „основание“ (отрезок внизу). Для триангулированных многоугольников A и B положим, что $A \triangle B$ получается, если приклеить основание A к левой верхней стороне $\triangle$, а основание B — к правой верхней. Так, например,

◩ △ __ = ⬠ .

(Исходные многоугольники, возможно, придется слегка искривить, чтобы придать результату нужную форму.) Таким способом можно получить любую триангуляцию, поскольку основание входит ровно в один треугольник, при этом слева и справа от него лежат некоторые триангулированные многоугольники A и B.

Заменив каждый треугольник на z, получим степенной ряд, в котором коэффициентом при z^n служит число триангуляций с n треугольниками, а это есть число разбиений на треугольники $(n+2)$-угольника. Функция P удовлетворяет уравнению $P = 1+zP^2$, следовательно, это производящая функция чисел Каталана $C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots$; число триангуляций n-угольника равно $C_{n-2} = \binom{2n-4}{n-2}/(n-1)$.

7.23 Обозначим искомое число a_n, а через b_n обозначим число разбиений колонны с выемкой размера $2 \times 1 \times 1$ вверху. Рассматривая различные варианты расположения видимых сверху кирпичей, получим

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 4b_{n-1} + a_{n-2} + [n=0]\,; \\ b_n &= a_{n-1} + b_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Следовательно, производящие функции удовлетворяют уравнениям $A = 2zA + 4zB + z^2A + 1$, $B = zA + zB$, откуда находим

$$A(z) = \frac{1-z}{(1+z)(1-4z+z^2)}\,.$$

Последняя формула имеет отношение к задаче о покрытии костяшками домино $3 \times n$-прямоугольника; имеем $a_n = \frac{1}{3}\bigl(U_{2n} + V_{2n+1} + (-1)^n\bigr) = \frac{1}{6}(2+\sqrt{3}\,)^{n+1} + \frac{1}{6}(2-\sqrt{3}\,)^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^n$, что есть просто $(2+\sqrt{3}\,)^{n+1}/6$, округленное до ближайшего целого.

7.24 $n\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} k_1 \cdot \ldots \cdot k_m/m = F_{2n+1} + F_{2n-1} - 2$. (Рассмотрите коэффициент $[z^{n-1}]\,\frac{d}{dz}\ln\bigl(1/(1-G(z))\bigr)$, где $G(z) = z/(1-z)^2$.)

7.25 Производящей функцией будет $P(z)/(1-z^m)$, где $P(z) = z + 2z^2 + \cdots + (m-1)z^{m-1} = \big((m-1)z^{m+1} - mz^m + z\big)/(1-z)^2$. В знаменателе стоит многочлен $Q(z) = 1 - z^m = (1-\omega^0 z) \times (1-\omega^1 z)\ldots(1-\omega^{m-1}z)$. По теореме о разложении рациональных функций для случая различных корней получаем

$$n \bmod m = \frac{m-1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\omega^{-kn}}{\omega^k - 1}.$$

7.26 $(1-z-z^2)\mathfrak{F}(z) = F(z)$ влечет $\mathfrak{F}_n = \big(2(n+1)F_n + nF_{n+1}\big)/5$, как в уравнении (7.61).

7.27 Любая ориентированная циклическая схема начинается с ▯ или ⚌ или $2 \times k$-цикла (для некоторого $k \geqslant 2$), ориентированного одним из двух способов. Следовательно,

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} + 2Q_{n-2} + 2Q_{n-3} + \cdots + 2Q_0$$

для $n \geqslant 2$; $Q_0 = Q_1 = 1$. Производящей функцией будет, следовательно,

$$\begin{aligned} Q(z) &= zQ(z) + z^2Q(z) + 2z^2Q(z)/(1-z) + 1 \\ &= 1/\big(1 - z - z^2 - 2z^2/(1-z)\big) \\ &= \frac{(1-z)}{(1-2z-2z^2+z^3)} \\ &= \frac{\phi^2/5}{1-\phi^2 z} + \frac{\phi^{-2}/5}{1-\phi^{-2}z} + \frac{2/5}{1+z} \end{aligned}$$

и $Q_n = \big(\phi^{2n+2} + \phi^{-2n-2} + 2(-1)^n\big)/5 = \big((\phi^{n+1} - \widehat{\phi}^{n+1})/\sqrt{5}\big)^2 = F_{n+1}^2$.

7.28 В общем случае, если $A(z) = (1 + z + \cdots + z^{m-1})B(z)$, будем иметь $A_r + A_{r+m} + A_{r+2m} + \cdots = B(1)$ для $0 \leqslant r < m$. В нашем случае $m = 10$ и $B(z) = (1+z+\cdots+z^9)(1+z^2+z^4+z^6+z^8)(1+z^5)$.

7.29 $F(z) + F(z)^2 + F(z)^3 + \cdots = z/(1-z-z^2-z) = 1/(1-(1+\sqrt{2})z) - \big(1/(1-(1-\sqrt{2})z)\big)/\sqrt{8}$, ответом поэтому будет $\big((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\big)/\sqrt{8}$.

7.30 Из упр. 5.39 получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1-k}{n-1} \big(a^n b^{n-k}/(1-\alpha z)^k + a^{n-k} b^n/(1-\beta z)^k\big).$$

7.31 Производящая функция Дирихле будет равна $\zeta(z)^2/\zeta(z-1)$; следовательно, мы находим, что $g(n)$ является произведением $(k+1-kp)$ по всем степеням простых чисел p^k, делящим нацело n.

7.32 Можно считать, что все $b_k \geqslant 0$. Множество арифметических прогрессий будет точным покрытием тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{1-z} = \frac{z^{b_1}}{1-z^{a_1}} + \cdots + \frac{z^{b_m}}{1-z^{a_m}}.$$

Вычтем $z^{b_m}/(1-z^{a_m})$ из обеих частей и положим $z = e^{2\pi i/a_m}$. Левая часть обратится в бесконечность, а правая останется конечной, если только a_{m-1} не будет равно a_m.

7.33 $(-1)^{n-m+1}[n>m]/(n-m)$.

7.34 Можно также записать

$$G_n(z) = \sum_{k_1+(m+1)k_{m+1}=n} \binom{k_1+k_{m+1}}{k_{m+1}} (z^m)^{k_{m+1}}.$$

В общем случае, если

$$G_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=n} \binom{k_1+k_2+\cdots+k_r}{k_1,k_2,\ldots,k_r} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_r^{k_r},$$

то $G_n = z_1G_{n-1} + z_2G_{n-2} + \cdots + z_rG_{n-r} + [n=0]$, и производящей функцией будет $1/(1-z_1w-z_2w^2-\cdots-z_rw^r)$. В рассматриваемом частном случае ответом является $1/(1-w-z^mw^{m+1})$. (Частный случай $m=1$ см. в (5.74).)

7.35 (a) $\frac{1}{n}\sum_{0<k<n}\bigl(1/k+1/(n-k)\bigr) = \frac{2}{n}H_{n-1}$. (b) $[z^n]\,\bigl(\ln\frac{1}{1-z}\bigr)^2 = \frac{2!}{n!}\left[{n \atop 2}\right] = \frac{2}{n}H_{n-1}$ из (7.50) и (6.58). Второй способ действий в части (b) состоит в том, чтобы использовать правило $[z^n]\,F(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\,F'(z)$ с $F(z) = \bigl(\ln\frac{1}{1-z}\bigr)^2$.

7.36 $\frac{1-z^m}{1-z}A(z^m)$.

7.37 (a) В таблице выполняется замечательное соотношение $a_{2n} = a_{2n+1} = b_n$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	2	2	4	4	6	6	10	10	14
b_n	1	2	4	6	10	14	20	26	36	46	60

(b) $A(z) = 1/\bigl((1-z)(1-z^2)(1-z^4)(1-z^8)\ldots\bigr)$. (c) $B(z) = A(z)/(1-z)$, а мы хотим доказать, что $A(z) = (1+z)B(z^2)$. Это следует из того, что $A(z) = A(z^2)/(1-z)$.

7.38 $(1-wz)M(w,z) = \sum\limits_{m,n\geqslant 1}\bigl(\min(m,n)-\min(m-1,n-1)\bigr)w^mz^n = \sum\limits_{m,n\geqslant 1} w^mz^n = wz/(1-w)(1-z)$. В общем случае,

$$M(z_1,\ldots,z_m) = \frac{z_1\ldots z_m}{(1-z_1)\ldots(1-z_m)(1-z_1\ldots z_m)}.$$

7.39 Ответами на вопросы из указания будут, соответственно, $\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n} a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_m}$ и $\sum_{1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n} a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_m}$. Следовательно: (a) Нам нужен коэффициент при z^m в произведении $(1+z)(1+2z)\ldots(1+nz)$. Этот многочлен является зеркальным к $(z+1)^{\overline{n}}$, поэтому он равен $\left[{n+1 \atop n+1}\right] + \left[{n+1 \atop n}\right]z + \cdots + \left[{n+1 \atop 1}\right]z^n$

и ответом будет $\left[{n+1 \atop n+1-m}\right]$. (b) В силу (7.47) коэффициент при z^m в $1/\bigl((1-z)(1-2z)\dots(1-nz)\bigr)$ равен $\left\{{m+n \atop n}\right\}$.

7.40 ЭПФ для $\langle nF_{n-1} - F_n\rangle$ будет $(z-1)\widehat{F}(z)$, где $\widehat{F}(z) = \sum_{n\geqslant 0} F_n z^n/n! = (e^{\phi z} - e^{\hat\phi z})/\sqrt{5}$. Для $\langle n_{\text{¡}}\rangle$ ЭПФ равна $e^{-z}/(1-z)$. Их произведение равно

$$5^{-1/2}\bigl(e^{(\hat\phi-1)z} - e^{(\phi-1)z}\bigr) = 5^{-1/2}(e^{-\phi z} - e^{-\hat\phi z}).$$

Имеем $\widehat{F}(z)e^{-z} = -\widehat{F}(-z)$. Ответом, следовательно, будет $(-1)^n F_n$.

7.41 Число возрастающе-убывающих перестановок с максимальным элементом n в позиции $2k$ равняется $\binom{n-1}{2k-1}A_{2k-1}A_{n-2k}$. Аналогично, число возрастающе-убывающих перестановок с наименьшим элементом 1 в позиции $2k+1$ есть $\binom{n-1}{2k}A_{2k}A_{n-2k-1}$, поскольку убывающе-возрастающих перестановок столько же, сколько возрастающе-убывающих. Суммирование по всем возможностям дает

$$2A_n = \sum_k \binom{n-1}{k} A_k A_{n-1-k} + 2[n=0] + [n=1].$$

Следовательно, ЭПФ $\widehat{A}$ удовлетворяет уравнению $2\widehat{A}'(z) = \widehat{A}(z)^2 + 1$ и $\widehat{A}(0) = 1$; указанная функция является решением этого дифференциального уравнения. (Следовательно, $A_n = |E_n| + T_n$ совпадает с коэффициентом в разложении секанса при четном n и тангенса — при нечетном.)

7.42 Пусть a_n — число цепочек марсианских ДНК, которые не заканчиваются на c или e, а b_n — число цепочек, заканчивающихся этими символами. Тогда

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} + [n=0], & b_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1},\\ A(z) &= 3zA(z) + 2zB(z) + 1, & B(z) &= 2zA(z) + zB(z),\\ A(z) &= \frac{1-z}{1-4z-z^2}, & B(z) &= \frac{2z}{1-4z-z^2}, \end{aligned}$$

и общее число цепочек равно $[z^n](1+z)/(1-4z-z^2) = F_{3n+2}$.

7.43 Из (5.45) имеем $g_n = \Delta^n \dot{G}(0)$. Мы можем записать n-ю разность произведения в виде

$$\Delta^n A(z)B(z) = \sum_k \binom{n}{k} \bigl(\Delta^k E^{n-k} A(z)\bigr)\bigl(\Delta^{n-k} B(z)\bigr),$$

где $E^{n-k} = (1+\Delta)^{n-k} = \sum_j \binom{n-k}{j}\Delta^j$. Следовательно, находим

$$h_n = \sum_{j,k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j} f_{j+k}\, g_{n-k}.$$

Это — сумма по всем триномиальным коэффициентам; ее можно привести к более симметричному виду

$$h_n = \sum_{j+k+l=n} \binom{n}{j,k,l} f_{j+k}\, g_{k+l}\,.$$

7.44 Каждое разбиение на k непустых подмножеств может быть упорядочено $k!$ способами, поэтому $b_k = k!$. Следовательно, $\widehat{Q}(z) = \sum_{n,k\geqslant 0} {n \brace k} k!\, z^n/n! = \sum_{k\geqslant 0}(e^z-1)^k = 1/(2-e^z)$. Это есть также сумма геометрической прогрессии $\sum_{k\geqslant 0} e^{kz}/2^{k+1}$, следовательно, $a_k = 1/2^{k+1}$. И наконец, $c_k = 2^k$; рассмотрите все перестановки для случая различных x, замените каждое отношение '>' между индексами на '<', а если индексы связаны отношением '<', то для значений допускается любое из двух отношений: '<' или '='. (Например, перестановка $x_1x_3x_2$ породит два варианта сравнения: $x_1 < x_3 < x_2$ и $x_1 = x_3 < x_2$, поскольку $1 < 3 > 2$.)

В пустом множестве нет ничего.

7.45 Эта сумма равна $\sum_{n\geqslant 1} r(n)/n^2$, где $r(n)$ есть число способов записать n в виде произведения двух взаимно простых сомножителей. Если n делится на t различных простых, то $r(n) = 2^t$. Следовательно, $r(n)/n^2$ — мультипликативная функция и интересующая нас сумма равна

$$\prod_p \left(1 + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^4}\cdots\right) = \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^2-1}\right)$$
$$= \prod_p \left(\frac{p^2+1}{p^2-1}\right) = \zeta(2)^2/\zeta(4) = \frac{5}{2}\,.$$

7.46 Пусть $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n-2k}{k}\alpha^k$. Тогда $S_n = S_{n-1} + \alpha S_{n-3} + [n=0]$ и производящая функция равна $1/(1-z-\alpha z^3)$. Для $\alpha = -\frac{4}{27}$, как подсказывает указание, эта функция имеет хорошее разложение на множители $1/(1+\frac{1}{3}z)(1-\frac{2}{3}z)^2$. Общая теорема о разложении дает теперь $S_n = (\frac{2}{3}n+c)(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{9}(-\frac{1}{3})^n$, и константа c оказывается равной $\frac{8}{9}$.

7.47 Представление Штерна—Броко для $\sqrt{3}$ есть $R(LR^2)^\infty$, поскольку

$$\sqrt{3}+1 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}\,.$$

Сами дроби равны $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \ldots$; начиная с некоторого момента они задаются поочередно следующими выражениями:

$$\frac{V_{2n-1}+V_{2n+1}}{U_{2n}}, \quad \frac{U_{2n}+V_{2n+1}}{V_{2n+1}},$$
$$\frac{U_{2n+2}+V_{2n-1}}{U_{2n}+V_{2n+1}}, \quad \frac{V_{2n+1}+V_{2n+3}}{U_{2n+2}}, \quad \ldots\,.$$

7.48 Имеем $g_0 = 0$, и, если $g_1 = m$, производящая функция удовлетворяет уравнению

$$aG(z) + bz^{-1}G(z) + cz^{-2}\big(G(z) - mz\big) + \frac{d}{1-z} = 0\,.$$

Следовательно, $G(z) = P(z)/(az^2 + bz + c)(1 - z)$ для некоторого многочлена $P(z)$. Пусть ρ_1 и ρ_2 — корни $cz^2 + bz + a$, причем $|\rho_1| \geqslant |\rho_2|$. Если $b^2 - 4ac \leqslant 0$, то $|\rho_1|^2 = \rho_1\rho_2 = a/c$ — рациональное число, что противоречит тому факту, что $\sqrt[n]{g_n}$ стремится к $1+\sqrt{2}$. Следовательно, $\rho_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ca})/2c = 1 + \sqrt{2}$; а отсюда следует, что $a = -c$, $b = -2c$, $\rho_2 = 1-\sqrt{2}$. Производящая функция теперь принимает вид

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z\big(m - (r+m)z\big)}{(1 - 2z - z^2)(1 - z)} \\ &= \frac{-r + (m+2r)z}{2(1 - 2z - z^2)} + \frac{r}{2(1-z)} = mz + (2m - r)z^2 + \cdots, \end{aligned}$$

где $r = d/c$. Поскольку g_2 — целое, r также целое. Имеем также

$$g_n = \alpha(1 + \sqrt{2}\,)^n + \widehat{\alpha}(1 - \sqrt{2}\,)^n + \tfrac{1}{2}r = \big\lfloor \alpha(1 + \sqrt{2}\,)^n \big\rfloor\,,$$

а это может иметь место, только если $r = -1$, поскольку $(1-\sqrt{2}\,)^n$ стремится к нулю, чередуясь в знаке. Следовательно, $(a, b, c, d) = \pm(1, 2, -1, 1)$. Теперь находим $\alpha = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2}\,m)$, что лежит между 0 и 1 только при $0 \leqslant m \leqslant 2$. Каждое из этих значений в действительности дает некоторое решение; соответствующие последовательности $\langle g_n \rangle$ суть $\langle 0, 0, 1, 3, 8, \ldots \rangle$, $\langle 0, 1, 3, 8, 20, \ldots \rangle$ и $\langle 0, 2, 5, 13, 32, \ldots \rangle$.

7.49 (a) Общим знаменателем выражения $\big(1/\big(1 - (1 + \sqrt{2})z\big) + 1/\big(1-(1-\sqrt{2})z\big)\big)$ является $1-2z-z^2$; следовательно, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ для $n \geqslant 2$. (b) Это верно ввиду того, что a_n четно и $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$. (c) Положим

$$b_n = \left(\frac{p + \sqrt{q}}{2}\right)^n + \left(\frac{p - \sqrt{q}}{2}\right)^n.$$

Нас устроило, если бы b_n было нечетным для всех $n > 0$ и $-1 < (p - \sqrt{q})/2 < 0$. Действуя как в п. (a), мы находим $b_0 = 2$, $b_1 = p$ и $b_n = pb_{n-1} + \frac{1}{4}(q - p^2)b_{n-2}$ для $n \geqslant 2$. Одно из возможных решений получается для $p = 3$ и $q = 17$.

7.50 Расширяя идею умножения многоугольников из упр. 22, будем иметь

$$Q = \underline{\quad} + Q\triangle Q + Q\,\overset{Q}{\square}\,Q + \underset{Q\qquad Q}{\overset{Q\quad Q}{\pentagon}} + \cdots.$$

Заменим каждый n-угольник на z^{n-2}. Такая замена правильно сочетается с умножением, поскольку операция склейки преобразует m- и n-угольник в $(m+n-2)$-угольник. Таким образом, производящая функция равна

$$Q = 1 + zQ^2 + z^2Q^3 + z^3Q^4 + \cdots = 1 + \frac{zQ^2}{1 - zQ},$$

и формула для вычисления корней квадратного уравнения дает $Q = \bigl(1 + z - \sqrt{1 - 6z + z^2}\,\bigr)/4z$. Коэффициент при z^{n-2} в этом степенном ряду равняется числу способов провести непересекающиеся диагонали в выпуклом n-угольнике. Эти коэффициенты, по-видимому, не имеют простого замкнутого выражения через другие величины, которые мы обсуждали в этой книге. Однако их асимптотическое поведение изучено [139, упр. 2.2.1–12].

Дайте мне многочлены Лежандра и я найду вам замкнутое выражение.

Кстати, если заменить каждый n-угольник в Q на wz^{n-2}, то мы будем иметь

$$Q = \frac{1 + z - \sqrt{1 - (4w + 2)z + z^2}}{2(1 + w)z},$$

формулу, в которой коэффициент при $w^m z^{n-2}$ дает число способов разбить n-угольник пересекающимися диагоналями на m многоугольников.

7.51 Ключевой первый шаг состоит в наблюдении, что квадрат интересующего нас числа способов есть число циклических схем определенного вида, обобщающих упр. 27. Эти схемы могут быть подсчитаны посредством вычисления определителя некоторой матрицы, для которой несложно найти собственные значения. В случае $m = 3$ и $n = 4$ оказывается полезным тот факт, что $\cos 36° = \phi/2$ (упр. 6.46).

7.52 Несколько начальных случаев таковы: $p_0(y) = 1$, $p_1(y) = y$, $p_2(y) = y^2 + y$, $p_3(y) = y^3 + 3y^2 + 3y$. Пусть $p_n(y) = q_{2n}(x)$, где $y = x(1-x)$; мы ищем производящую функцию, которая подходящим образом определит $q_{2n+1}(x)$. Одна такая функция — это $\sum_n q_n(x)z^n/n! = 2e^{ixz}/(e^{iz}+1)$, откуда следует, что $q_n(x) = i^n E_n(x)$, где $E_n(x)$ называется многочленом Эйлера. Имеем $\sum(-1)^x x^n\,\delta x = \frac{1}{2}(-1)^{x+1}E_n(x)$, поэтому многочлены Эйлера аналогичны многочленам Бернулли, и они раскладываются на множители, аналогичные (6.98). Из упр. 6.23 получаем $nE_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}(2 - 2^{k+1})$; этот многочлен по упр. 6.54 имеет целые коэффициенты. Следовательно, коэффициенты многочлена $q_{2n}(x)$, со знаменателями в виде степеней двойки, также должны быть целыми. Следовательно, $p_n(y)$ имеет целые коэффициенты. Наконец, соотношение $(4y-1)p_n''(y) + 2p_n'(y) = 2n(2n-1)p_{n-1}(y)$ показывает, что

$$2m(2m-1)\left|{n \atop m}\right| = m(m+1)\left|{n \atop m+1}\right| + 2n(2n-1)\left|{n-1 \atop m-1}\right|,$$

а отсюда вытекает, что числа $\left|{n \atop m}\right|$ положительны. (Подобное доказательство позволяет установить, что аналогичная величина $(-1)^n(2n+2)E_{2n+1}(x)/(2x-1)$, если ее выразить в виде многочлена n-й степени от y, имеет положительные целые коэффициенты.) Как можно показать, $\left|{n \atop 1}\right|$ — число Дженокки $(-1)^{n-1}(2^{2n+1}-2)B_{2n}$ (см. упр. 6.24) и $\left|{n \atop n-1}\right| = \binom{n}{2}$, $\left|{n \atop n-2}\right| = 2\binom{n+1}{4} + 3\binom{n}{4}$ и т. д.

7.53 Это число есть $P_{(1+V_{4n+1}+V_{4n+3})/6}$. Так, например, $T_{20} = P_{12} = 210$; $T_{285} = P_{165} = 40755$.

7.54 Пусть E_k означает операцию над степенными рядами, состоящую в обнулении всех коэффициентов при z^n, за исключением случаев $n \bmod m = k$. Тогда описанная конструкция эквивалентна операции

$$E_0\, S\, E_0\, S\, (E_0 + E_1)\, S \,\ldots\, S\, (E_0 + E_1 + \cdots + E_{m-1})\,,$$

примененной к $1/(1-z)$, где S означает „умножить на $1/(1-z)$". Это выражение содержит $m!$ членов

$$E_0\, S\, E_{k_1}\, S\, E_{k_2}\, S \,\ldots\, S\, E_{k_m}\,.$$

Здесь $0 \leqslant k_j < j$, и каждый такой член дает $z^{rm}/(1-z^m)^{m+1}$, где r — число таких j, что $k_j < k_{j+1}$. Имеется ровно $\left\langle {m \atop r} \right\rangle$ слагаемых с данным значением r, поэтому коэффициентом при z^{mn} будет $\sum_{r=0}^{m-1} \left\langle {m \atop r} \right\rangle \binom{n+m-r}{m} = (n+1)^m$ по (6.37). (Тот факт, что операция E_k выражается через комплексные корни из единицы, по всей видимости, нисколько не помогает в решении этой задачи.)

7.55 Пусть $P_0(z)F(z) + \cdots + P_m(z)F^{(m)}(z) = Q_0(z)G(z) + \cdots + Q_n(z)G^{(n)}(z) = 0$, где $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — ненулевые. (a) Пусть $H(z) = F(z)+G(z)$. Тогда найдутся рациональные функции $R_{k,l}(z)$ для $0 \leqslant l < m+n$, такие, что $H^{(k)}(z) = R_{k,0}(z)F^{(0)}(z) + \cdots + R_{k,m-1}(z)F^{(m-1)}(z) + R_{k,m}(z)G^{(0)}(z) + \cdots + R_{k,m+n-1}(z)G^{(n-1)}(z)$. Векторы $\big(R_{k,0}(z), \ldots, R_{k,m+n-1}(z)\big)$ в количестве $m+n+1$ линейно зависимы в $(m+n)$-мерном векторном пространстве рациональных функций; следовательно, существуют рациональные функции $S_l(z)$, не все равные нулю, такие, что $S_0(z)H^{(0)}(z) + \cdots + S_{m+n}(z)H^{(m+n)}(z) = 0$. (b) Аналогично, положим $H(z) = F(z)G(z)$. Имеются рациональные функции $R_{k,l}(z)$ для $0 \leqslant l < mn$, такие, что $H^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} R_{k,ni+j}(z)F^{(i)}(z)G^{(j)}(z)$, следовательно, $S_0(z)H^{(0)}(z) + \cdots + S_{mn}(z)H^{(mn)}(z) = 0$ для некоторых рациональных $S_l(z)$, не все из которых нулевые. (Аналогичным образом можно доказать, что если $\langle f_n \rangle$ и $\langle g_n \rangle$ полиномиально рекурсивны, то таковы и последовательности $\langle f_n + g_n \rangle$ и $\langle f_n g_n \rangle$. Для частных нет аналогичного результата; например, $\cos z$ является дифференцируемо конечной функцией, тогда как $1/\cos z$ — нет.)

7.56 Эйлер [377] показал, что это число есть также $[z^n]\,1/\sqrt{1-2z-3z^2}$, и дал формулу $t_n = \sum_{k \geqslant 0} n^{\underline{2k}}/k!^2 = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$.

Исследуя эти числа, он обнаружил „достопамятное фиаско индукции“: хотя $3t_n - t_{n+1}$ равняется $F_{n-1}(F_{n-1}+1)$ для $0 \leqslant n \leqslant 8$, этот эмпирический закон таинственным образом нарушается, когда n равно 9 или больше! Георг Эндрюс [387] снял покров тайны; он показал, что сумма $\sum_k [z^{n+10k}]\,(1+z+z^2)^n$ может быть выражена в замкнутом виде через числа Фибоначчи.

Г. С. Вильф заметил, что $[z^n]\,(a+bz+cz^2)^n = [z^n]\,1/f(z)$, где $f(z) = \sqrt{1-2bz+(b^2-4ac)z^2}$ (см. [53, с. 159]); отсюда следует, что коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$(n+1)A_{n+1} - (2n+1)bA_n + n(b^2-4ac)A_{n-1} = 0\,.$$

Применяя алгоритм Петковшека [236], можно доказать, что это рекуррентное соотношение имеет решение в замкнутом виде в том и только в том случае, когда $abc(b^2-4ac) = 0$. В частности, поэтому средний триномиальный коэффициент не имеет такого выражения в замкнутом виде. Следующий шаг должен, вероятно, заключаться в расширении этого результата на более широкий класс замкнутых выражений (включая, например, гармонические числа и/или числа Стирлинга).

Дайте мне многочлены Лежандра и я найду вам замкнутое выражение.

7.57 (На данный момент Поль Эрдёш предлагает 500 долларов за решение.)

8.1 $\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{48}+\frac{1}{48}+\frac{1}{48}+\frac{1}{24}=\frac{1}{6}$. (Мы, на самом деле, *всегда* получим дублет с вероятностью $\frac{1}{6}$, если хотя бы один из кубиков правильный.) Любые две грани с суммой 7 имеют одинаковую вероятность в распределении $\Pr_1$, поэтому событие $S = 7$ имеет ту же вероятность, что и выпадение дублета.

8.2 Имеется 12 способов задать верхнюю и нижнюю карты и 50! способов для остальных; поэтому вероятность равна $12\cdot 50!/52! = 12/(51\cdot 52) = \frac{1}{17\cdot 13} = \frac{1}{221}$.

8.3 $\frac{1}{10}(3+2+\cdots+9+2) = 4.8$; $\frac{1}{9}(3^2+2^2+\cdots+9^2+2^2-10(4.8)^2) = \frac{388}{45}$, что приблизительно равно 8.6. Истинные математическое ожидание и дисперсия для правильной монеты составляют 6 и 22, так что группе в Станфорде необычайно везет на решки. Соответствующие цифры для Принстона равны 6.4 и $\frac{562}{45} \approx 12.5$. (Это распределение имеет $\kappa_4 = 2974$, что весьма много. Следовательно, стандартное отклонение этой оценки дисперсии также довольно велико для $n = 10$, $\sqrt{2974/10+2(22)^2/9} \approx 20.1$ в соответствии с упр. 54. Студентов нельзя обвинить в жульничестве.)

8.4 Это следует из (8.38) и (8.39), поскольку $F(z) = G(z)H(z)$. (Аналогичные формулы имеют место для всех кумулянтов даже несмотря на то, что $F(z)$ и $G(z)$ могут иметь отрицательные коэффициенты.)

8.5 Замените P на p и O на $q = 1-p$. Если $S_A = S_B = \frac{1}{2}$ то должно быть $p^2qN = \frac{1}{2}$ и $pq^2N = \frac{1}{2}q+\frac{1}{2}$; решением будет $p = 1/\phi^2$, $q = 1/\phi$.

8.6 В этом случае $X|y$ имеет для всех y то же распределение, что и X, поэтому $E(X|Y) = EX$ есть константа и $V\bigl(E(X|Y)\bigr) = 0$. Также и $V(X|Y)$ — константа и совпадает со своим ожидаемым значением.

8.7 Имеем $1 = (p_1 + p_2 + \cdots + p_6)^2 \leqslant 6(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_6^2)$ по неравенству Чебышёва для сумм из гл. 2.

8.8 Пусть $p = \Pr(\omega \in A \cap B)$, $q = \Pr(\omega \notin A)$ и $r = \Pr(\omega \notin B)$. Тогда $p + q + r = 1$ и требуется доказать тождество $p = (p + r) \times (p + q) - qr$.

8.9 Это верно (при очевидном условии, что F и G определены на областях изменения случайных величин X и Y), поскольку

$$\begin{aligned}\Pr\bigl(F(X)=f \text{ и } G(Y)=g\bigr) &= \sum_{\substack{x\in F^{-1}(f)\\ y\in G^{-1}(g)}} \Pr(X=x \text{ и } Y=y)\\ &= \sum_{\substack{x\in F^{-1}(f)\\ y\in G^{-1}(g)}} \Pr(X=x)\cdot\Pr(Y=y)\\ &= \Pr\bigl(F(X)=f\bigr)\cdot\Pr\bigl(G(y)=g\bigr).\end{aligned}$$

8.10 Два. Пусть $x_1 < x_2$ — медианы; тогда $1 \leqslant \Pr(X \leqslant x_1) + \Pr(X \geqslant x_2) \leqslant 1$, следовательно, имеют место равенства. (Некоторые дискретные распределения вовсе не имеют медианы. Пусть, например, Ω будет множеством всех дробей вида $\pm 1/n$, с вероятностями $\Pr(+1/n) = \Pr(-1/n) = \frac{\pi^2}{12}n^{-2}$.)

8.11 С вероятностью $4/(k+1)(k+2)(k+3)$ положим, например, $K = k$ для всех целых $k \geqslant 0$. Тогда $EK = 1$, однако $E(K^2) = \infty$. (Аналогично можно построить случайную величину со всеми конечными кумулянтами вплоть до κ_m, но с $\kappa_{m+1} = \infty$.)

8.12 (a) Пусть $p_k = \Pr(X = k)$. Если $0 < x \leqslant 1$, то имеем $\Pr(X \leqslant r) = \sum_{k\leqslant r} p_k \leqslant \sum_{k\leqslant r} x^{k-r} p_k \leqslant \sum_k x^{k-r} p_k = x^{-r} P(x)$. Другое неравенство доказывается аналогично. (b) Положим $x = \alpha/(1-\alpha)$ с целью минимизации правой части. (Более точная оценка указанной суммы дается в упр. 9.42.)

8.13 (Решение Бориса Питтела.) Положим $Y = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ и $Z = (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})/n$. Тогда

$$\begin{aligned}&\Pr\left(\left|\frac{Y+Z}{2} - \alpha\right| \leqslant |Y - \alpha|\right)\\ &\qquad\geqslant \Pr\left(\left|\frac{Y-\alpha}{2}\right| + \left|\frac{Z-\alpha}{2}\right| \leqslant |Y-\alpha|\right)\\ &\qquad= \Pr\bigl(|Z-\alpha| \leqslant |Y-\alpha|\bigr) \geqslant \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство фактически можно заменить на '$>$' для любого дискретного распределения вероятностей, поскольку $\Pr(Y=Z)>0$.

8.14 $\mathrm{Mean}(H) = p\,\mathrm{Mean}(F) + q\,\mathrm{Mean}(G)$; $\mathrm{Var}(H) = p\,\mathrm{Var}(F) + q\,\mathrm{Var}(G) + pq\bigl(\mathrm{Mean}(F) - \mathrm{Mean}(G)\bigr)^2$. (Смесь есть на самом деле частный случай условного распределения: пусть Y отвечает бросанию монеты, $X|P$ порождается функцией $F(z)$, а $X|O$ — функцией $G(z)$. Тогда $VX = EV(X|Y) + VE(X|Y)$, где $EV(X|Y) = pV(X|P) + qV(X|O)$, а $VE(X|Y)$ есть дисперсия функции $pz^{\mathrm{Mean}(F)} + qz^{\mathrm{Mean}(G)}$.)

8.15 По правилу дифференцирования сложной функции, $H'(z) = G'(z)F'\bigl(G(z)\bigr)$; $H''(z) = G''(z)F'\bigl(G(z)\bigr) + G'(z)^2F''\bigl(G(z)\bigr)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mean}(H) &= \mathrm{Mean}(F)\,\mathrm{Mean}(G)\,;\\ \mathrm{Var}(H) &= \mathrm{Var}(F)\,\mathrm{Mean}(G)^2 + \mathrm{Mean}(F)\,\mathrm{Var}(G)\,.\end{aligned}$$

(Случайную величину, отвечающую распределению H, можно описать следующим образом: определим неотрицательное целое n в соответствии с распределением F; затем сложим n независимых случайных величин, имеющих распределение G. Тождество для дисперсии из этого упражнения является частным случаем (8.106), в котором X имеет распределение H, а Y — распределение F.)

8.16 $e^{w(z-1)}/(1-w)$.

8.17 $\Pr(Y_{n,p} \leqslant m) = \Pr(Y_{n,p} + n \leqslant m + n)$ = вероятность того, что для выпадания n решек потребуется $\leqslant m + n$ бросаний = вероятность того, что $m + n$ бросаний дадут $\geqslant n$ решек = $\Pr(X_{m+n,p} \geqslant n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant m}\binom{n+k-1}{k}p^nq^k &= \sum_{k\geqslant n}\binom{m+n}{k}p^kq^{m+n-k}\\ &= \sum_{k\leqslant m}\binom{m+n}{k}p^{m+n-k}q^k\,,\end{aligned}$$

а это есть тождество (5.19) с $n = r$, $x = q$, $y = p$.

8.18 (a) $G_X(z) = e^{\mu(z-1)}$. (b) Для всех $m \geqslant 1$ m-й кумулянт равен μ. (В (8.55) случай $\mu = 1$ назван F_∞.)

8.19 (a) $G_{X_1+X_2}(z) = G_{X_1}(z)G_{X_2}(z) = e^{(\mu_1+\mu_2)(z-1)}$. Следовательно, вероятность равна $e^{-\mu_1-\mu_2}(\mu_1+\mu_2)^n/n!$; сумма независимых пуассоновских случайных величин снова пуассоновская. (b) В общем случае, если K_mX обозначает m-й кумулянт случайной величины X, то для $a, b \geqslant 0$ имеем $K_m(aX_1 + bX_2) = a^m(K_mX_1) + b^m(K_mX_2)$. Ответом, следовательно, будет $2^m\mu_1 + 3^m\mu_2$.

8.20 В общем случае ПФСВ равна $G(z) = z^m/F(z)$, где

$$F(z) = z^m + (1-z)\sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_{(k)}[A^{(k)} = A_{(k)}]z^{m-k}\,,$$

$$F'(1) = m - \sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_{(k)}[A^{(k)} = A_{(k)}]\,,$$

$$F''(1) = m(m-1) - 2\sum_{k=1}^{m}(m-k)\widetilde{A}_{(k)}[A^{(k)} = A_{(k)}]\,.$$

8.21 Это значение есть $\sum_{n\geqslant 0} q_n$, где q_n — вероятность того, что игра Алисы и Билла еще не закончилась после n бросаний. Пусть p_n означает вероятность окончания игры на n-м бросании; тогда $p_n + q_n = q_{n-1}$. Следовательно, среднее время игры равняется $\sum_{n\geqslant 1} np_n = (q_0 - q_1) + 2(q_1 - q_2) + 3(q_2 - q_3) + \cdots = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots = N$, поскольку $\lim_{n\to\infty} nq_n = 0$.

Другой способ получить тот же ответ состоит в том, чтобы заменить P и O на $\frac{1}{2}z$. Тогда, продифференцировав первое уравнение в (8.78), получим $N(1) + N'(1) = N'(1) + S'_A(1) + S'_B(1)$.

Между прочим, $N = \frac{16}{3}$.

8.22 Имеем, по определению, $V(X|Y) = E(X^2|Y) - \big(E(X|Y)\big)^2$ и $V\big(E(x|Y)\big) = E\big((E(X|Y))^2\big) - \big(E\big(E(X|Y)\big)\big)^2$; следовательно, $E\big(V(X|Y)\big) + V\big(E(X|Y)\big) = E\big(E(X^2|Y)\big) - \big(E\big(E(X|Y)\big)\big)^2$. Однако $E\big(E(X|Y)\big) = \sum_y \Pr(Y{=}y)E(X|y) = \sum_{x,y}\Pr(Y{=}y)\Pr\big((X|y){=}x\big)x = EX$ и $E\big(E(X^2|Y)\big) = E(X^2)$, поэтому в результате получается просто VX.

8.23 Пусть $\Omega_0 = \{$⚀, ⚅$\}^2$, $\Omega_1 = \{$⚁, ⚂, ⚃, ⚄$\}^2$, а Ω_2 — множество из остальных 16 элементов Ω. Тогда $\Pr_{11}(\omega) - \Pr_{00}(\omega) = \frac{+20}{576}, \frac{-7}{576}, \frac{+2}{576}$, если $\omega \in \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$. Следовательно, при выборе событий A следует взять k_j элементов из Ω_j, где (k_0, k_1, k_2) — один из следующих наборов: $(0,0,0)$, $(0,2,7)$, $(0,4,14)$, $(1,4,4)$, $(1,6,11)$, $(2,6,1)$, $(2,8,8)$, $(3,8,15)$, $(3,10,5)$, $(3,12,12)$, $(4,12,2)$, $(4,14,9)$, $(4,16,16)$. Имеется, например, $\binom{4}{2}\binom{16}{6}\binom{16}{1}$ событий типа $(2,6,1)$. Всего нужных нам событий будет $[z^0](1+z^{20})^4(1+z^{-7})^{16}(1+z^2)^{16}$, это число составляет 1304872090. Если ограничиться событиями, зависящими только от S, то мы получим 40 решений $S \in A$, где $A = \emptyset$, $\{{}^{\,2}_{12}, {}^{\,4}_{10}, {}^{6}_{8}\}$, $\{{}^{\,2}_{12}, 5, 9\}$, $\{2, 12, {}^{\,4}_{10}, {}^{6}_{8}, 5, 9\}$, $\{2,4,6,8,10,12\}$, $\{{}^{\,3}_{11}, 7, {}^{5}_{9}, 4, 10\}$ или A есть дополнение до одного из этих множеств. (Здесь '${}^{\,2}_{12}$' означает 2 или 12, но не оба вместе.)

8.24 (a) Любой кубик окажется в конце концов во владении игрока J с вероятностью $p = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 p$; следовательно, $p = \frac{6}{11}$. Пусть $q = \frac{5}{11}$. Тогда ПФСВ для общего числа кубиков у J будет $(q+pz)^{2n+1}$ с математическим ожиданием $(2n+1)p$ и дисперсией

$(2n+1)pq$, как следует из (8.61). (b) $\binom{5}{3}p^3q^2 + \binom{5}{4}p^4q + \binom{5}{5}p^5 = \frac{94176}{161051} \approx .585$.

8.25 Производящая функция для суммы ставки после n бросаний будет равна $G_n(z)$, где

$$G_0(z) = z^A;$$
$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{6} G_{n-1}(z^{2(k-1)/5})/6 \qquad \text{при } n > 0.$$

(Нецелые показатели степеней не вызывают трудностей.) Отсюда следует, что $\mathrm{Mean}(G_n) = \mathrm{Mean}(G_{n-1})$ и $\mathrm{Var}(G_n) + \mathrm{Mean}(G_n)^2 = \frac{22}{15}(\mathrm{Var}(G_{n-1}) + \mathrm{Mean}(G_{n-1})^2)$. Таким образом, математическое ожидание все время равно A, в то время как дисперсия возрастает до значения $\bigl((\frac{22}{15})^n - 1\bigr)A^2$.

Вероятно, эту задачу проще решать без применения производящих функций, чем с ними.

8.26 Производящая функция случайной величины $F_{l,n}(z)$ удовлетворяет уравнению $F'_{l,n}(z) = F_{l,n-l}(z)/l$; следовательно, $\mathrm{Mean}(F_{l,n}) = F'_{l,n}(1) = [n \geqslant l]/l$ и $F''_{l,n}(1) = [n \geqslant 2l]/l^2$; дисперсия легко вычисляется. (Фактически мы имеем

$$F_{l,n}(z) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/l} \frac{1}{k!}\Bigl(\frac{z-1}{l}\Bigr)^k,$$

что стремится при $n \to \infty$ к распределению Пуассона с параметром $1/l$.)

8.27 Величина $(n^2\Sigma_3 - 3n\Sigma_2\Sigma_1 + 2\Sigma_1^3)/n(n-1)(n-2)$, где $\Sigma_k = X_1^k + \cdots + X_n^k$ имеет желаемое ожидаемое значение; это вытекает из тождеств

$$\begin{aligned} E\Sigma_3 &= n\mu_3;\\ E(\Sigma_2\Sigma_1) &= n\mu_3 + n(n-1)\mu_2\mu_1;\\ E(\Sigma_1^3) &= n\mu_3 + 3n(n-1)\mu_2\mu_1 + n(n-1)(n-2)\mu_1^3. \end{aligned}$$

Оказывается, что третий кумулянт равен $\kappa_3 = E\bigl((X-EX)^3\bigr)$, но уже для четвертого кумулянта столь простое соотношение не выполняется; имеем $\kappa_4 = E\bigl((X-EX)^4\bigr) - 3(VX)^2$.

8.28 (В упражнении подразумевается случай $p = q = \frac{1}{2}$, однако ниже для полноты дан ответ в общем случае.) Замена P на pz и 0 на qz дает $S_A(z) = p^2qz^3/(1-pz)(1-qz)(1-pqz^2)$ и $S_B(z) = pq^2z^3/(1-qz)(1-pqz^2)$. Для условной вероятности выигрыша Алисы после n-го бросания, при условии, что она выигрывает, получаем следующую ПФСВ:

$$\frac{S_A(z)}{S_A(1)} = z^3 \cdot \frac{q}{1-pz} \cdot \frac{p}{1-qz} \cdot \frac{1-pq}{1-pqz^2}.$$

Это произведение псевдо-ПФСВ и математическое ожидание для этой функции равно $3 + p/q + q/p + 2pq/(1-pq)$. Формулы для Билла отличаются только отсутствием множителя $q/(1-pz)$,

поэтому математическое ожидание для Билла равно $3 + q/p + 2pq/(1 - pq)$. Если $p = q = \frac{1}{2}$, то ответом в случае (a) будет $\frac{17}{3}$; в случае (b) — $\frac{14}{3}$. Билл выигрывает в два раза реже, но если ему случается выиграть, то это происходит быстрее. Общее среднее число бросаний составит $\frac{2}{3} \cdot \frac{17}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{16}{3}$, что согласуется с упр. 21. При игре в одиночку для любой последовательности время ожидания равняется 8.

8.29 Подстановка $P = O = \frac{1}{2}$ в

$$\begin{aligned} 1+N(P+O) &= N+S_A+S_B+S_C \\ N\,PPOP &= S_A(POP+1)+S_B(POP+OP)+S_C(POP+OP) \\ N\,POPP &= S_A(OPP+P)+S_B(OPP+1)+S_C(OPP) \\ N\,OPPP &= S_A(PP)+S_B(P)+S_C \end{aligned}$$

дает вероятности выигрыша. В общем случае будет иметь место $S_A + S_B + S_C = 1$ и

$$\begin{aligned} S_A(A{:}A)+S_B(B{:}A)+S_C(C{:}A) &= S_A(A{:}B)+S_B(B{:}B)+S_C(C{:}B) \\ &= S_A(A{:}B)+S_B(B{:}C)+S_C(C{:}C). \end{aligned}$$

В нашем частном случае уравнения $9S_A + 3S_B + 3S_C = 5S_A + 9S_B + S_C = 2S_A + 4S_B + 9S_C$ дают $S_A = \frac{16}{52}$, $S_B = \frac{17}{52}$, $S_C = \frac{19}{52}$.

8.30 Дисперсия $P(h_1, \ldots, h_n; k)|k$ есть дисперсия сдвинутого биномиального распределения $((m-1+z)/m)^{k-1}z$, равная $(k-1) \times (\frac{1}{m})(1-\frac{1}{m})$ в силу (8.61). Следовательно, среднее дисперсий будет равно $\mathrm{Mean}(S)(m-1)/m^2$. Дисперсия средних — это дисперсия величины $(k-1)/m$, а именно $\mathrm{Var}(S)/m^2$. В соответствии с (8.106), сумма этих двух чисел должна равняться VP, и это действительно так. Фактически мы в слегка замаскированном виде повторили вывод (8.96). (См. упр. 15.)

8.31 (a) Действуя напролом, мы получаем систему из пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{aligned} &A = \tfrac{1}{2}zB + \tfrac{1}{2}zE\,; \quad B = \tfrac{1}{2}zC\,; \quad C = 1 + \tfrac{1}{2}zB + \tfrac{1}{2}zD\,; \\ &D = \tfrac{1}{2}zC + \tfrac{1}{2}zE\,; \quad E = \tfrac{1}{2}zD\,. \end{aligned}$$

Однако позиции C и D равноудалены от цели, и то же самое справедливо в отношении B и E, поэтому их можно объединить друг с другом. Пусть $X = B + E$ и $Y = C + D$; остается три уравнения:

$$A = \tfrac{1}{2}zX\,; \quad X = \tfrac{1}{2}zY\,; \quad Y = 1 + \tfrac{1}{2}zX + \tfrac{1}{2}zY\,.$$

Следовательно, $A = z^2/(4-2z-z^2)$; отсюда находим $\mathrm{Mean}(A) = 6$ и $\mathrm{Var}(A) = 22$. (Слышите звон? Эта задача фактически эквивалентна подбрасыванию правильной монеты до появления двух решек подряд: решка означает „сделать шаг к яблоку“, а орел означает „шаг назад“.) (b) Неравенство Чебышёва показывает, что $\Pr(S \geqslant 100) = \Pr((S-6)^2 \geqslant 94^2) \leqslant 22/94^2 \approx .0025$. (c) Вторая

оценка хвоста показывает, что $\Pr(S \geqslant 100) \leqslant 1/x^{98}(4-2x-x^2)$ для всех $x \geqslant 1$; подставив $x = (\sqrt{49001} - 99)/100$, получаем верхнюю оценку 0.00000005. (В действительности эта вероятность равна приблизительно 0.0000000009 в соответствии с упр. 37.)

8.32 Из соображений симметрии ситуацию в каждом месяце можно свести к одной из следующих четырех возможностей:

„У меня такое чувство, Тото, что мы уже не в Канзасе!"
— Дороти

Д, два штата расположены по диагонали;
С, штаты соседние и среди них нет Канзаса;
К, два штата — это Канзас и какой-то другой;
О, два штата одинаковы.

Рассматривая переходы в полученной цепи Маркова, получим четыре уравнения

$$\begin{aligned}
Д &= 1 + z(\tfrac{2}{9}Д + \tfrac{2}{12}K),\\
C &= z(\tfrac{4}{9}C + \tfrac{4}{12}K),\\
K &= z(\tfrac{4}{9}Д + \tfrac{4}{9}C + \tfrac{4}{12}K),\\
O &= z(\tfrac{3}{9}Д + \tfrac{1}{9}C + \tfrac{2}{12}K),
\end{aligned}$$

сумма которых дает $Д + K + C + O = 1 + z(Д + C + K)$. Решением будет

$$O = \frac{81z - 45z^2 - 4z^3}{243 - 243z + 24z^2 + 8z^3},$$

но простейший, по-видимому, способ найти среднее и дисперсию — это подставить $z = 1 + w$ и разложить по степеням w, игнорируя кратные w^2:

$$\begin{aligned}
Д &= \tfrac{27}{16} + \tfrac{1593}{512}w + \cdots;\\
C &= \tfrac{9}{8} + \tfrac{2115}{256}w + \cdots;\\
K &= \tfrac{15}{8} + \tfrac{2661}{256}w + \cdots.
\end{aligned}$$

Теперь находим $O'(1) = \frac{27}{16} + \frac{9}{8} + \frac{15}{8} = \frac{75}{16}$ и $\frac{1}{2}O''(1) = \frac{1593}{512} + \frac{2115}{256} + \frac{2661}{256} = \frac{11145}{512}$. Математическое ожидание равно $\frac{75}{16}$, а дисперсия — $\frac{105}{4}$. (Есть ли путь проще?)

8.33 Первый ответ: очевидно, да, поскольку хеш-коды $h_1, \ldots, h_n$ независимы. Второй ответ: конечно, нет, даже несмотря на то, что хеш-коды $h_1, \ldots, h_n$ независимы. Имеем $\Pr(X_j = 0) = \sum_{k=1}^{n} s_k([j \neq k](m-1)/m) = (1-s_j)(m-1)/m$, но $\Pr(X_1 = X_2 = 0) = \sum_{k=1}^{n} s_k[k > 2](m-1)^2/m^2 = (1 - s_1 - s_2)(m-1)^2/m^2 \neq \Pr(X_1 = 0)\Pr(X_2 = 0)$.

8.34 Пусть $[z^n]\,S_m(z)$ есть вероятность того, что Джина продвинется менее, чем на m шагов за n кругов. Тогда $S_m(1)$ — ее средний результат в m-ударной игре; $[z^m]\,S_m(z)$ — вероятность ее

проигрыша в игре со стабильным партнером; а $1 - [z^{m-1}]\,S_m(z)$ — вероятность выигрыша. Имеем рекуррентное соотношение

$$S_0(z) = 0;$$
$$S_m(z) = \bigl(1 + pzS_{m-2}(z) + qzS_{m-1}(z)\bigr)/(1 - rz) \quad \text{при } m > 0.$$

Для решения п. (a) достаточно вычислить коэффициенты для $m, n \leqslant 4$; удобно заменить z на $100w$ с тем, чтобы в вычислениях участвовали только целые числа. Получаем следующую таблицу коэффициентов:

S_0	0	0	0	0	0
S_1	1	4	16	64	256
S_2	1	95	744	4432	23552
S_3	1	100	9065	104044	819808
S_4	1	100	9975	868535	12964304

Следовательно, Джина выигрывает с вероятностью $1 - .868535 = .131465$; она проигрывает с вероятностью $.12964304$. (b) Для нахождения среднего числа ударов вычисляем

$$S_1(1) = \tfrac{25}{24}; \quad S_2(1) = \frac{4675}{2304}; \quad S_3(1) = \frac{667825}{221184};$$
$$S_4(1) = \frac{85134475}{21233664}.$$

(Оказывается, что $S_5(1) \approx 4.9995$; она выигрывает по обоим критериям — лункам и ударам в игре с пятиударной лункой, но проигрывает обоими способами в игре, рассчитанной на три удара.)

8.35 Требуемое условие будет выполняться для всех n тогда и только тогда, когда оно выполняется для $n = 1$; это следует из китайской теоремы об остатках. Одно необходимое и достаточное условие — тождество многочленов

$$\bigl(p_2+p_4+p_6+(p_1+p_3+p_5)w\bigr)\bigl(p_3+p_6+(p_1+p_4)z+(p_2+p_5)z^2\bigr)$$
$$=(p_1wz+p_2z^2+p_3w+p_4z+p_5wz^2+p_6),$$

но это есть лишь незначительная переформулировка исходной задачи. Более простым критерием является

$$(p_2+p_4+p_6)(p_3+p_6) = p_6, \quad (p_1+p_3+p_5)(p_2+p_5) = p_5,$$

что требует проверки всего двух коэффициентов в предыдущем произведении. Общее решение имеет три степени свободы: пусть $a_0+a_1 = b_0+b_1+b_2 = 1$, тогда можно взять $p_1 = a_1b_1$, $p_2 = a_0b_2$, $p_3 = a_1b_0$, $p_4 = a_0b_1$, $p_5 = a_1b_2$, $p_6 = a_0b_0$.

8.36 (a) ⚀ ⚁ ⚁ ⚂ ⚂ ⚃. (b) Если на гранях k-го кубика нанесено s_1, …, s_6 очков, то положим $p_k(z) = z^{s_1} + \cdots + z^{s_6}$. Мы хотим найти такие многочлены p_k, для которых

$p_1(z)\ldots p_n(z) = (z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)^n$. Разложением этого многочлена в произведение неприводимых множителей с рациональными коэффициентами будет $z^n(z+1)^n(z^2+z+1)^n(z^2-z+1)^n$; следовательно, $p_k(z)$ должен иметь вид $z^{a_k}(z+1)^{b_k}(z^2+z+1)^{c_k} \times (z^2-z+1)^{d_k}$. При этом должно быть $a_k \geqslant 1$, поскольку $p_k(0) = 0$; и, более того, $a_k = 1$, поскольку $a_1 + \cdots + a_n = n$. Далее, условие $p_k(1) = 6$ означает, что $b_k = c_k = 1$. Теперь легко понять, что $0 \leqslant d_k \leqslant 2$, поскольку $d_k > 2$ дает отрицательные коэффициенты. Для $d = 0$ и $d = 2$ мы получаем два кубика из п. (a); следовательно, все решения исчерпываются k парами кубиков из п. (a) плюс $n - 2k$ обычных кубиков для некоторого $k \leqslant \frac{1}{2}n$.

8.37 Число последовательностей длины n, описывающих возможные результаты бросания монеты, равняется F_{n-1} для всех $n > 0$, ввиду связи между укладками домино и бросаниями монеты. Следовательно, вероятность того, что потребуется ровно n бросаний, составляет $F_{n-1}/2^n$, если монета правильная. Кроме того, $q_n = F_{n+1}/2^{n-1}$, поскольку $\sum_{k\geqslant n} F_n z^n = (F_n z^n + F_{n-1}z^{n+1})/(1-z-z^2)$. (Разумеется, возможно и систематическое решение с использованием производящих функций.)

8.38 После появления k граней задача выбрасывания еще одной эквивалентна бросанию монеты с вероятностью успеха $p_k = (m-k)/m$. Следовательно, ПФСВ равна $\prod_{k=0}^{l-1} p_k z/(1-q_k z) = \prod_{k=0}^{l-1}(m-k)z/(m-kz)$. Среднее значение равно $\sum_{k=0}^{l-1} p_k^{-1} = m(H_m - H_{m-l})$; дисперсия равна $m^2\bigl(H_m^{(2)} - H_{m-l}^{(2)}\bigr) - m(H_m - H_{m-l})$; и уравнение (7.47) дает замкнутое выражение для требуемой вероятности, а именно $m^{-n}m!{n-1 \brace l-1}/(m-l)!$. (Обсуждаемая в этом упражнении задача традиционно называется „задачей сбора купонов“.)

8.39 $E(X) = P(-1)$; $V(X) = P(-2) - P(-1)^2$; $E(\ln X) = -P'(0)$.

8.40 (a) Из (7.49) имеем $\kappa_m = n\bigl(0!{m \brace 1}p - 1!{m \brace 2}p^2 + 2!{m \brace 3}p^3 - \cdots\bigr)$. Как оказывается, третий кумулянт равен $npq(q-p)$, а четвертый — $npq(1-6pq)$. Тождество $q + pe^t = (p + qe^{-t})e^t$ показывает, что $f_m(p) = (-1)^m f_m(q) + [m=1]$; следовательно, можно записать $f_m(p) = g_m(pq)(q-p)^{[m \text{ нечетно}]}$, где g_m — многочлен степени $\lfloor m/2 \rfloor$, если только $m > 1$. (b) Положим $p = \frac{1}{2}$ и $F(t) = \ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t)$. Тогда $\sum_{m\geqslant 1} \kappa_m t^{m-1}/(m-1)! = F'(t) = 1 - 1/(e^t+1)$, и мы можем воспользоваться упр. 6.23.

8.41 Если $G(z)$ — производящая функция случайной величины X, принимающей только целые положительные значения, то $\int_0^1 G(z)\,dz/z = \sum_{k\geqslant 1} \Pr(X=k)/k = E(X^{-1})$. Если X — распределение числа бросаний до получения $n+1$ решек, то из (8.59) имеем $G(z) = \bigl(pz/(1-qz)\bigr)^{n+1}$ и выписанный интеграл можно преобра-

зовать:

$$\int_0^1 \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^{n+1} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{w^n\,dw}{1+(q/p)w},$$

если выполнить замену $w = pz/(1-qz)$. Для $p = q$ подынтегральное выражение можно записать как $(-1)^n\bigl((1+w)^{-1}-1+w-w^2+\cdots+(-1)^n w^{n-1}\bigr)$, поэтому интеграл равен $(-1)^n\bigl(\ln 2-1+\frac12-\frac13+\cdots+(-1)^n/n\bigr)$. Имеем из (9.28) $H_{2n}-H_n = \ln 2-\frac14 n^{-1}+\frac1{16}n^{-2}+O(n^{-4})$; отсюда следует, что $E(X_{n+1}^{-1}) = \frac12 n^{-1}-\frac14 n^{-2}+O(n^{-4})$.

8.42 Пусть $F_n(z)$ и $G_n(z)$ будут ПФСВ для числа рабочих вечеров, если человек первоначально был, соответственно, безработным или имел работу. Пусть $q_h = 1-p_h$ и $q_f = 1-p_f$. Тогда $F_0(z) = G_0(z) = 1$ и

$$\begin{aligned} F_n(z) &= p_h z G_{n-1}(z) + q_h F_{n-1}(z);\\ G_n(z) &= p_f F_{n-1}(z) + q_f z G_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Решение дается суперпроизводящей функцией

$$G(w,z) = \sum_{n\geqslant 0} G_n(z)w^n = A(w)/\bigl(1-zB(w)\bigr),$$

где $B(w)=w\bigl(q_f-(q_f-p_h)w\bigr)/(1-q_h w)$ и $A(w)=\bigl(1-B(w)\bigr)/(1-w)^{-1}$. Теперь получаем $\sum_{n\geqslant 0} G_n'(1)w^n = \alpha w/(1-w)^2+\beta/(1-w)-\beta/\bigl(1-(q_f-p_h)w\bigr)$, где

$$\alpha = \frac{p_h}{p_h+p_f}, \qquad \beta = \frac{p_f(q_f-p_h)}{(p_h+p_f)^2};$$

следовательно, $G_n'(1) = \alpha n + \beta\bigl(1-(q_f-p_h)^n\bigr)$. (Аналогично, $G_n''(1) = \alpha^2 n^2 + O(n)$, так что дисперсия равна $O(n)$.)

8.43 В силу (6.11) $G_n(z) = \sum_{k\geqslant 0} \left[{n \atop k}\right] z^k/n! = z^{\overline{n}}/n!$. Это — произведение биномиальных ПФСВ, $\prod_{k=1}^n \bigl((k-1+z)/k\bigr)$, где k-я функция имеет математическое ожидание $1/k$ и дисперсию $(k-1)/k^2$; следовательно, $\mathrm{Mean}(G_n) = H_n$ и $\mathrm{Var}(G_n) = H_n - H_n^{(2)}$.

8.44 (a) Чемпион должен пройти без поражений n кругов, поэтому в ответе получаем p^n. (b,c) Игроки $x_1, \ldots, x_{2^k}$ должны быть случайно „рассеяны“ в различные подтурниры, и они должны выиграть все $2^k(n-k)$ своих встреч. Игроков можно расположить по 2^n листьям дерева турнира $2^n!$ способами; чтобы обеспечить нужное рассеивание имеется $2^k!(2^{n-k})^{2^k}$ способов размещения 2^k лучших игроков и $(2^n-2^k)!$ способов размещения остальных. Следовательно, искомая вероятность равна $(2p)^{2^k(n-k)}/\binom{2^n}{2^k}$. Для $k=1$ это выражение упрощается до $(2p^2)^{n-1}/(2^n-1)$. (d) Каждый результат турнира соответствует некоторой перестановке игроков:

обозначим через y_1 чемпиона; через y_2 — второго финалиста; через y_3 и y_4 — двух игроков, проигравших y_1 и y_2 в полуфинале; через $(y_5, \ldots, y_8)$ обозначим игроков, проигравших в четвертьфинале игрокам $(y_1, \ldots, y_4)$, и т. д. (Действуя по-другому, можно показать, что на первом круге может быть $2^n!/2^{n-1}!$ существенно различных результатов; на втором — $2^{n-1}!/2^{n-2}!$ и т. д.) (e) Пусть S_k есть множество всех 2^{k-1} потенциальных противников x_2 в k-м круге. Условная вероятность того, что x_2 выиграет турнир при условии, что x_1 принадлежит S_k, равняется

$$\begin{aligned}\Pr(x_1 \text{ играет с } x_2)\cdot p^{n-1}(1-p) \,&+\, \Pr(x_1 \text{ не играет с } x_2)\cdot p^n \\ &= p^{k-1}p^{n-1}(1-p) + (1-p^{k-1})p^n .\end{aligned}$$

Вероятность того, что $x_1 \in S_k$, равна $2^{k-1}/(2^n-1)$; суммирование по k дает ответ:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{2^n-1}&\bigl(p^{k-1}p^{n-1}(1-p) + (1-p^{k-1})p^n\bigr) \\ &= p^n - \frac{(2p)^n-1}{2^n-1}\,p^{n-1} .\end{aligned}$$

(f) Любой из $2^n!$ результатов турнира имеет определенную вероятность; вероятность выигрыша x_j есть сумма этих вероятностей по всем $(2^n-1)!$ результатам, в которых x_j — чемпион. Переставим во всех этих турнирах x_j и x_{j+1}; эта перестановка не повлияет на вероятность, если x_j и x_{j+1} не встречаются между собой, однако в случае их встречи вероятность победы x_j умножится на $(1-p)/p < 1$.

8.45 (a) $A(z) = 1/(3-2z)$; $B(z) = zA(z)^2$; $C(z) = z^2A(z)^3$. Производящая функция для разливаемого в бутылки шерри равна $z^3A(z)^3$, что есть произведение z^3 на отрицательное биномиальное распределение с параметрами $n=3$, $p=\frac{1}{3}$. (b) $\mathrm{Mean}(A) = 2$, $\mathrm{Var}(A) = 6$; $\mathrm{Mean}(B) = 5$, $\mathrm{Var}(B) = 2\,\mathrm{Var}(A) = 12$; $\mathrm{Mean}(C) = 8$, $\mathrm{Var}(C) = 18$. В среднем, шерри имеет возраст 9 лет. Доля двадцатипятилетнего вина составляет $\binom{-3}{22}(-2)^{22}3^{-25} = \binom{24}{22}2^{22}3^{-25} = 23\cdot(\frac{2}{3})^{24} \approx .00137$. (c) Пусть коэффициентом при w^n будет ПФСВ на начало года n. Тогда

$$\begin{aligned} A &= \bigl(1 + \tfrac{1}{3}w/(1-w)\bigr)/(1-\tfrac{2}{3}zw) ; \\ B &= \bigl(1 + \tfrac{1}{3}zwA\bigr)/(1-\tfrac{2}{3}zw) ; \\ C &= \bigl(1 + \tfrac{1}{3}zwB\bigr)/(1-\tfrac{2}{3}zw) . \end{aligned}$$

Продифференцируем по z и подставим $z=1$; это дает

$$C' = \frac{8}{1-w} - \frac{1/2}{(1-\frac{2}{3}w)^3} - \frac{3/2}{(1-\frac{2}{3}w)^2} - \frac{6}{1-\frac{2}{3}w} .$$

Средний возраст разливаемого в бутылки шерри через n лет после начала процесса на 1 больше коэффициента при w^{n-1}, именно, он равен $9-(\frac{2}{3})^n(3n^2+21n+72)/8$. (Он превышает 8 лет уже при $n=11$.)

8.46 (a) $P(w,z)=1+\frac{1}{2}\bigl(wP(w,z)+zP(w,z)\bigr)=\bigl(1-\frac{1}{2}(w+z)\bigr)^{-1}$, следовательно, $p_{mn}=2^{-m-n}\binom{m+n}{n}$. (b) $P_k(w,z)=\frac{1}{2}(w^k+z^k)P(w,z)$; следовательно,

$$p_{k,m,n}=2^{k-1-m-n}\left(\binom{m+n-k}{m}+\binom{m+n-k}{n}\right).$$

(c) $\sum_k kp_{k,n,n}=\sum_{k=0}^{n}k2^{k-2n}\binom{2n-k}{n}=\sum_{k=0}^{n}(n-k)2^{-n-k}\binom{n+k}{n}$; эту сумму можно вычислить с помощью (5.20):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2^{-n-k}&\left((2n+1)\binom{n+k}{n}-(n+1)\binom{n+1+k}{n+1}\right)\\&=(2n+1)-(n+1)2^{-n}\left(2^{n+1}-2^{-n-1}\binom{2n+2}{n+1}\right)\\&=\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}-1\,.\end{aligned}$$

(Методы гл. 9 показывают, что эта величина есть $2\sqrt{n/\pi}-1+O(n^{-1/2})$.)

8.47 После поглощения n частиц имеется $n+2$ равноправных рецепторов. Пусть случайная величина X_n обозначает число имеющихся дифагов; тогда $X_{n+1}=X_n+Y_n$, где $Y_n=-1$, если $(n+1)$-я частица попадает в рецептор дифага (условная вероятность — $2X_n/(n+2)$); в противном случае $Y_n=+2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}EX_{n+1}&=EX_n+EY_n\\&=EX_n-2EX_n/(n+2)+2\bigl(1-2EX_n/(n+2)\bigr)\,.\end{aligned}$$

Рекуррентное соотношение $(n+2)EX_{n+1}=(n-4)EX_n+2n+4$ можно решить, если умножить обе его части на суммирующий множитель $(n+1)^{\underline{5}}$; или же можно угадать ответ и доказать его по индукции: $EX_n=(2n+4)/7$ для всех $n>4$. (Оказывается, после пятого шага всегда образуется два дифага и один трифаг, независимо от состояния после четвертого шага.)

8.48 (a) Расстояние между дисками (измеряемое так, чтобы всегда получалось четное число) составляет 0, 2 или 4 единицы, первоначально 4. Соответствующие производящие функции A, B, C (где, скажем, $[z^n]\,C$ равняется вероятности расстояния 4 после n бросков) удовлетворяют соотношениям

$$A=\tfrac{1}{4}zB\,,\quad B=\tfrac{1}{2}zB+\tfrac{1}{4}zC\,,\quad C=1+\tfrac{1}{4}zB+\tfrac{3}{4}zC\,.$$

Отсюда следует, что $A = z^2/(16 - 20z + 5z^2) = z^2/F(z)$, и мы получаем $\mathrm{Mean}(A) = 2 - \mathrm{Mean}(F) = 12$, $\mathrm{Var}(A) = -\mathrm{Var}(F) = 100$. (Более сложное, но и более занимательное решение основано на следующем разложении A:

$$A = \frac{p_1 z}{1-q_1 z} \cdot \frac{p_2 z}{1-q_2 z} = \frac{p_2}{p_2-p_1}\frac{p_1 z}{1-q_1 z} + \frac{p_1}{p_1-p_2}\frac{p_2 z}{1-q_2 z},$$

где $p_1 = \phi^2/4 = (3+\sqrt{5})/8$, $p_2 = \hat{\phi}^2/4 = (3-\sqrt{5})/8$ и $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1$. Таким образом, игра эквивалентна бросанию двух монет с вероятностями выпадания решки p_1 и p_2; монеты бросаются по одной, пока обе они не выпадут решками вверх. Суммарное число требуемых бросаний будет иметь то же распределение, что и число бросков дисков Фрисби. Математическое ожидание и дисперсия времени ожидания для этих двух монет будут, соответственно, $6 \mp 2\sqrt{5}$ и $50 \mp 22\sqrt{5}$, следовательно, для общего математического ожидания и дисперсии получаем 12 и 100, как и ранее.)

(b) Разложение производящей функции в правильные дроби дает возможность просуммировать вероятности. (Заметьте, что $\sqrt{5}/(4\phi) + \phi^2/4 = 1$, поэтому ответ можно выразить через степени ϕ.) Игра будет длиться n шагов с вероятностью $5^{(n-1)/2}4^{-n}(\phi^{n+2} - \phi^{-n-2})$; для четного n это равно $5^{n/2}4^{-n}F_{n+2}$. Ответ, таким образом, равен $5^{50}4^{-100}F_{102} \approx .00006$.

8.49 (a) Если $n > 0$, то $P_N(0,n) = \frac{1}{2}[N=0] + \frac{1}{4}P_{N-1}(0,n) + \frac{1}{4}P_{N-1}(1,n-1)$; для $P_N(m,0)$ имеет место аналогичная формула; $P_N(0,0) = [N=0]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} g_{m,n} &= \tfrac{1}{4}zg_{m-1,n+1} + \tfrac{1}{2}zg_{m,n} + \tfrac{1}{4}zg_{m+1,n-1}\,, \\ g_{0,n} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}zg_{0,n} + \tfrac{1}{4}g_{1,n-1} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

(b) $g'_{m,n} = 1 + \frac{1}{4}g'_{m-1,n+1} + \frac{1}{2}g'_{m,n} + \frac{1}{4}g'_{m+1,n-1}$; $g'_{0,n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}g'_{0,n} + \frac{1}{4}g'_{1,n-1}$ и т. д. Индукцией по m получаем $g'_{m,n} = (2m+1)g'_{0,m+n} - 2m^2$ для всех $m, n \geqslant 0$. А поскольку $g'_{m,0} = g'_{0,m}$, то мы должны иметь $g'_{m,n} = m + n + 2mn$. (c) Для $mn > 0$ данная формула удовлетворяет рекуррентному соотношению, поскольку

$$\sin(2m+1)\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\sin(2m-1)\theta}{4} + \frac{\sin(2m+1)\theta}{2} + \frac{\sin(2m+3)\theta}{4}\right);$$

это следует из тождества $\sin(x-y)+\sin(x+y) = 2\sin x \cos y$. Таким образом, остается только проверить граничные условия.

8.50 (a) Используя указание, получаем

$$3(1-z)^2\sum_k\binom{1/2}{k}\left(\frac{8}{9}z\right)^k(1-z)^{2-k}$$
$$=3(1-z)^2\sum_k\binom{1/2}{k}\left(\frac{8}{9}\right)^k\sum_j\binom{k+j-3}{j}z^{j+k};$$

далее следует посмотреть на коэффициент при z^{3+l}. (b) $H(z)=\frac{2}{3}+\frac{5}{27}z+\frac{1}{2}\sum_{l\geqslant 0}c_{3+l}z^{2+l}$. (c) Пусть $r=\sqrt{(1-z)(9-z)}$. Можно доказать, что $(z-3+r)(z-3-r)=4z$, и, вследствие этого, $\big(r/(1-z)+2\big)^2=(13-5z+4r)/(1-z)=\big(9-H(z)\big)/\big(1-H(z)\big)$. (d) Вычисление первой производной при $z=1$ показывает, что $\mathrm{Mean}(H)=1$. Вторая производная расходится при $z=1$, поэтому дисперсия бесконечна.

8.51 (a) Пусть $H_n(z)$ — ПФСВ ваших денег после n кругов игры; $H_0(z)=z$. Для n кругов имеется распределение

$$H_{n+1}(z)=H_n\big(H(z)\big),$$

поэтому требуемый результат получается индукцией (с использованием любопытного тождества из предыдущей задачи). (b) $g_n=H_n(0)-H_{n-1}(0)=4/n(n+1)(n+2)=4(n-1)^{\underline{-3}}$. Математическое ожидание равно 2, а дисперсия бесконечна. (c) Среднее число билетов, которые вы купите в n-м круге, равно $\mathrm{Mean}(H_n)=1$, согласно упр. 15. Поэтому общее число билетов бесконечно. (Таким образом, вы почти наверняка проиграетесь в конце концов, и можно ожидать проигрыша уже после второй игры, но в то же время вы приобретете, как можно ожидать, бесконечно много билетов.) (d) В этом случае ПФСВ после n игр равняется $H_n(z)^2$, и метод из п. (b) дает математическое ожидание $16-\frac{4}{3}\pi^2\approx 2.8$. (Здесь появляется сумма $\sum_{k\geqslant 1}1/k^2=\pi^2/6$.)

8.52 Если ω и ω' — такие события, что $\Pr(\omega)>\Pr(\omega')$, то в последовательности из n независимых экспериментов с большой вероятностью ω будет встречаться чаще чем ω', поскольку число появлений ω будет очень близко к $n\Pr(\omega)$. Следовательно, при $n\to\infty$ со стремящейся к 1 вероятностью медиана и мода значений X в последовательности независимых испытаний будут медианой и модой случайной величины X.

8.53 Мы можем опровергнуть данное утверждение даже в том частном случае, когда каждая случайная величина принимает всего два значения: 0 или 1. Пусть $p_0=\Pr(X{=}Y{=}Z{=}0)$, $p_1=\Pr(X{=}Y{=}\overline{Z}{=}0)$, ..., $p_7=\Pr(\overline{X}{=}\overline{Y}{=}\overline{Z}{=}0)$, где $\overline{X}=1-X$. Тогда $p_0+p_1+\cdots+p_7=1$, и случайные величины попарно независимы тогда и только тогда, когда

$$(p_4+p_5+p_6+p_7)(p_2+p_3+p_6+p_7)=p_6+p_7,$$
$$(p_4+p_5+p_6+p_7)(p_1+p_3+p_5+p_7)=p_5+p_7,$$
$$(p_2+p_3+p_6+p_7)(p_1+p_3+p_5+p_7)=p_3+p_7.$$

Вместе с тем, $\Pr(X+Y=Z=0) \neq \Pr(X+Y=0)\Pr(Z=0) \iff p_0 \neq (p_0+p_1)(p_0+p_2+p_4+p_6)$. Вот одно из решений:

$$p_0 = p_3 = p_5 = p_6 = 1/4\,; \qquad p_1 = p_2 = p_4 = p_7 = 0\,.$$

Эквивалентное определение этих случайных величин: подбросить две монеты и положить $X =$ (первая монета упала решкой вверх), $Y =$ (вторая монета упала решкой вверх), $Z =$ (монеты упали поразному). Другой пример, в котором все вероятности ненулевые, может быть таким:

$$\begin{aligned} &p_0 = 4/64\,, \quad p_1 = p_2 = p_4 = 5/64\,,\\ &p_3 = p_5 = p_6 = 10/64\,, \quad p_7 = 15/64\,. \end{aligned}$$

По этой причине мы говорим, что n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ независимы, если

$$\Pr(X_1 = x_1 \text{ и } \cdots \text{ и } X_n = x_n) = \Pr(X_1 = x_1)\ldots\Pr(X_n = x_n)\,;$$

для выполнения этого свойства попарной независимости недостаточно.

8.54 (Обозначения см. в упр. 27.) Имеем

$$\begin{aligned} E(\Sigma_2^2) &= n\mu_4 + n(n-1)\mu_2^2\,,\\ E(\Sigma_2\Sigma_1^2) &= n\mu_4 + 2n(n-1)\mu_3\mu_1 + n(n-1)\mu_2^2\\ &\qquad + n(n-1)(n-2)\mu_2\mu_1^2\,,\\ E(\Sigma_1^4) &= n\mu_4 + 4n(n-1)\mu_3\mu_1 + 3n(n-1)\mu_2^2\\ &\qquad + 6n(n-1)(n-2)\mu_2\mu_1^2 + n(n-1)(n-2)(n-3)\mu_1^4\,; \end{aligned}$$

отсюда следует, что $V(\widehat{V}X) = \kappa_4/n + 2\kappa_2^2/(n-1)$.

8.55 Всего имеется $A = \frac{1}{17}\cdot 52!$ перестановок с $X = Y$ и $B = \frac{16}{17}\cdot 52!$ перестановок с $X \neq Y$. После описанной процедуры любая перестановка с $X = Y$ будет встречаться с вероятностью $\frac{1}{17}/\bigl((1-\frac{16}{17}p)A\bigr)$, поскольку мы возвращаемся к шагу S1 с вероятностью $\frac{16}{17}p$. Аналогично, любая перестановка с $X \neq Y$ будет встречаться с вероятностью $\frac{16}{17}(1-p)/\bigl((1-\frac{16}{17}p)B\bigr)$. Выбор $p = \frac{1}{4}$ делает $\Pr(X = x \text{ и } Y = y) = \frac{1}{169}$ для всех x и y. (Можно, следовательно, дважды бросить правильную монету и вернуться к шагу S1, если оба раза выпадет решка.)

8.56 Если m четно, то диски всегда остаются на нечетном расстоянии друг от друга и игра продолжается до бесконечности. Если $m = 2l + 1$, то соответствующие производящие функции задаются так:

$$\begin{aligned} G_m &= \tfrac{1}{4}zA_1\,;\\ A_1 &= \tfrac{1}{2}zA_1 + \tfrac{1}{4}zA_2\,,\\ A_k &= \tfrac{1}{4}zA_{k-1} + \tfrac{1}{2}zA_k + \tfrac{1}{4}zA_{k+1}\,, \qquad 1 < k < l,\\ A_l &= \tfrac{1}{4}zA_{l-1} + \tfrac{3}{4}zA_l + 1\,. \end{aligned}$$

(Коэффициент $[z^n]\,A_k$ равняется вероятности того, что диски после n бросков окажутся на расстоянии $2k$.) Вспоминая похожие уравнения из упр. 49, положим $z = 1/\cos^2\theta$ и $A_1 = X\sin 2\theta$, где X надлежит определить. По индукции получаем (не используя уравнение для A_l), что $A_k = X\sin 2k\theta$. Следовательно, нам надо выбрать X так, чтобы

$$\Bigl(1-\frac{3}{4\cos^2\theta}\Bigr)X\sin 2l\theta = 1+\frac{1}{4\cos^2\theta}X\sin(2l-2)\theta\,.$$

Оказывается, что $X = 2\cos^2\theta/\sin\theta\cos(2l+1)\theta$ и, следовательно,

$$G_m = \frac{\cos\theta}{\cos m\theta}\,.$$

Знаменатель обращается в нуль, когда θ является нечетным кратным $\pi/(2m)$; таким образом, $1-q_kz$ — корень знаменателя для $1 \leqslant k \leqslant l$, и указанное в упражнении представление в виде произведения обязано иметь место. Чтобы найти математическое ожидание и дисперсию, можно записать

И снова тригонометрия победила. Не связано ли это с бросанием монет вдоль сторон m-угольника?

$$\begin{aligned}G_m &= \bigl(1-\tfrac12\theta^2+\tfrac1{24}\theta^4-\cdots\bigr)/\bigl(1-\tfrac12m^2\theta^2+\tfrac1{24}m^4\theta^4-\cdots\bigr)\\ &= 1+\tfrac12(m^2-1)\theta^2+\tfrac1{24}(5m^4-6m^2+1)\theta^4+\cdots\\ &= 1+\tfrac12(m^2-1)(\operatorname{tg}\theta)^2+\tfrac1{24}(5m^4-14m^2+9)(\operatorname{tg}\theta)^4+\cdots\\ &= 1+G_m'(1)(\operatorname{tg}\theta)^2+\tfrac12G_m''(1)(\operatorname{tg}\theta)^4+\cdots\,,\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{tg}^2\theta = z-1$ и $\operatorname{tg}\theta = \theta+\frac13\theta^3+\cdots$. Поэтому имеем $\mathrm{Mean}(G_m) = \frac12(m^2-1)$ и $\mathrm{Var}(G_m) = \frac16m^2(m^2-1)$. (Обратите внимание, что отсюда вытекают тождества

$$\frac{m^2-1}{2} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2}\frac{1}{p_k} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2}\Bigl(1\Big/\sin\frac{(2k-1)\pi}{2m}\Bigr)^2;$$

$$\frac{m^2(m^2-1)}{6} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2}\Bigl(\operatorname{ctg}\frac{(2k-1)\pi}{2m}\Big/\sin\frac{(2k-1)\pi}{2m}\Bigr)^2.$$

Третий кумулянт этого распределения равен $\frac1{30}m^2(m^2-1)\times(4m^2-1)$; но на этом кончаются кумулянты с хорошим разложением. Математическое ожидание можно получить гораздо проще. Действительно, $G_m+A_1+\cdots+A_l = z(A_1+\cdots+A_l)+1$, следовательно, для $z=1$ будем иметь $G_m' = A_1+\cdots+A_l$. Поскольку $G_m = 1$ при $z = 1$, простая индукция показывает, что $A_k = 4k$.)

8.57 Имеем $A{:}A \geqslant 2^{l-1}$, $B{:}B < 2^{l-1}+2^{l-3}$ и $B{:}A \geqslant 2^{l-2}$; следовательно, $B{:}B - B{:}A \geqslant A{:}A - A{:}B$ возможно лишь, если $A{:}B > 2^{l-3}$. Это означает, что $\overline{\tau}_2 = \tau_3$, $\tau_1 = \tau_4$, $\tau_2 = \tau_5$, $\ldots$, $\tau_{l-3} = \tau_l$. Но тогда $A{:}A \approx 2^{l-1}+2^{l-4}+\cdots$, $A{:}B \approx 2^{l-3}+2^{l-6}+\cdots$, $B{:}A \approx 2^{l-2}+2^{l-5}+\cdots$

и $B{:}B \approx 2^{l-1} + 2^{l-4} + \cdots$; следовательно, $B{:}B - B{:}A$ меньше, чем $A{:}A - A{:}B$, во всех случаях. (Гюиба и Одлыжко [94] получили более сильные результаты; они показали, что в любом случае шансы Билла максимизируются одной из последовательностей $P\tau_1 \ldots \tau_{l-1}$ или $0\tau_1 \ldots \tau_{l-1}$. На самом деле у Билла имеется единственная выигрышная стратегия; см. следующее упражнение.)

8.58 (Решение Я. Цирика.) Если A есть P^l или 0^l, то одна из двух сравниваемых последовательностей совпадает с A и, следовательно, не может быть использована. В противном случае положим $\widehat{A} = \tau_1 \ldots \tau_{l-1}$, $H = P\widehat{A}$, $T = 0\widehat{A}$. Нетрудно проверить, что $H{:}A = T{:}A = \widehat{A}{:}\widehat{A}$, $H{:}H + T{:}T = 2^{l-1} + 2(\widehat{A}{:}\widehat{A}) + 1$ и $A{:}H + A{:}T = 1 + 2(A{:}A) - 2^l$. Поэтому из уравнения

$$\frac{H{:}H - H{:}A}{A{:}A - A{:}H} = \frac{T{:}T - T{:}A}{A{:}A - A{:}T}$$

следует, что обе дроби равны

$$\frac{H{:}H - H{:}A + T{:}T - T{:}A}{A{:}A - A{:}H + A{:}A - A{:}T} = \frac{2^{l-1}+1}{2^l - 1}\,.$$

Далее можно записать дроби по-другому и доказать, что

$$\frac{H{:}H - H{:}A}{T{:}T - T{:}A} = \frac{A{:}A - A{:}H}{A{:}A - A{:}T} = \frac{p}{q}\,,$$

где $p \perp q$ и $(p+1)\backslash \text{НОД}(2^{l-1}+1, 2^l - 1) = \text{НОД}(3, 2^l - 1)$; так что мы можем считать, что l четно и $p = 1$, $q = 2$. Отсюда следует $A{:}A - A{:}H = (2^l - 1)/3$ и $A{:}A - A{:}T = (2^{l+1} - 2)/3$, следовательно, $A{:}H - A{:}T = (2^l - 1)/3 \geqslant 2^{l-2}$. Мы имеем $A{:}H \geqslant 2^{l-2}$ тогда и только тогда, когда $A = (0P)^{l/2}$. Но в этом случае $H{:}H - H{:}A = A{:}A - A{:}H$, так что $2^{l-1} + 1 = 2^l - 1$ и $l = 2$. (Цирик [343] пошел дальше; он показал, что для $l \geqslant 4$ у Алисы нет лучшего выбора, чем играть $P0^{l-3}P^2$. Но даже при этой стратегии Билл выигрывает с вероятностью около $\frac{2}{3}$.)

8.59 В соответствии с (8.82), нам требуется, чтобы $B{:}B - B{:}A > A{:}A - A{:}B$. Одно из решений: $A = 00PP$, $B = PPP$.

8.60 (a) Возможны два случая: $h_k \ne h_n$ или $h_k = h_n$:

$$G(w,z) = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m-2+w+z}{m}\right)^{k-1} w \left(\frac{m-1+z}{m}\right)^{n-k-1} z$$
$$+ \frac{1}{m}\left(\frac{m-1+wz}{m}\right)^{k-1} wz \left(\frac{m-1+z}{m}\right)^{n-k-1} z\,.$$

(b) Мы можем обосновать это соотношение алгебраически, вычислив частные производные $G(w,z)$ по w и z и положив $w = z = 1$; возможно также комбинаторное обоснование. Какими бы ни были значения $h_1, \ldots, h_{n-1}$, ожидаемое значение $P(h_1, \ldots,$

$h_{n-1}, h_n; n)$ (усреднение по h_n) постоянно, поскольку последовательность хеш-кодов $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ определяет последовательность длин списков $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ и указанное среднее значение равняется $\big((n_1+1)+(n_2+1)+\cdots+(n_m+1)\big)/m = (n-1+m)/m$. Следовательно, случайная величина $EP(h_1, \ldots, h_n; n)$ не зависит от $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ и, следовательно, не зависит от $P(h_1, \ldots, h_n; k)$.

8.61 Если $1 \leqslant k < l \leqslant n$, то, как следует из предыдущего упражнения, коэффициент при $s_k s_l$ в дисперсии среднего равен нулю. Поэтому остается только рассмотреть коэффициент при s_k^2, который равен

$$\sum_{1 \leqslant h_1, \ldots, h_n \leqslant m} \frac{P(h_1, \ldots, h_n; k)^2}{m^n} - \Bigg(\sum_{1 \leqslant h_1, \ldots, h_n \leqslant m} \frac{P(h_1, \ldots, h_n; k)}{m^n}\Bigg)^2,$$

т. е. дисперсии функции $\big((m-1+z)/m\big)^{k-1} z$; она, в свою очередь, равняется $(k-1)(m-1)/m^2$, как в упр. 30.

8.62 пфсв $D_n(z)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$D_0(z) = z,$$
$$D_n(z) = z^2 D_{n-1}(z) + 2(1-z^3)D'_{n-1}(z)/(n+1) \quad \text{для } n > 0.$$

Отсюда выводим соотношение

$$D''_n(1) = (n-11)D''_{n-1}(1)/(n+1) + (8n-2)/7,$$

которое имеет решение $\frac{2}{637}(n+2)(26n+15)$ для всех $n \geqslant 11$ (независимо от начальных условий). Следовательно, дисперсия оказывается равной $\frac{12}{49}(n+2)(212n+123)$ для $n \geqslant 11$.

8.63 (Можно поставить другой вопрос: получается ли предполагаемая последовательность кумулянтов хоть из какого-нибудь распределения? Так, в последовательности кумулянтов κ_2 должен быть неотрицательным и $\kappa_4 + 3\kappa_2^2 = E\big((X-\mu)^4\big)$ должно быть не менее, чем $\big(E\big((X-\mu)^2\big)\big)^2 = \kappa_2^2$, и т. д. Необходимые и достаточные условия для этого варианта задачи найдены Гамбургером [11], [59].)

9.1 Это верно, если все функции положительны. В противном случае можно, например, взять $f_1(n) = n^3 + n^2$, $f_2(n) = -n^3$, $g_1(n) = n^4 + n$, $g_2(n) = -n^4$.

9.2 (a) Имеем $n^{\ln n} \prec c^n \prec (\ln n)^n$, поскольку $(\ln n)^2 \prec n \ln c \prec n \ln\ln n$. (b) $n^{\ln\ln\ln n} \prec (\ln n)! \prec n^{\ln\ln n}$. (c) Прологарифмируйте и покажите, что $(n!)!$ растет быстрее. (d) $F^2_{\lceil H_n \rceil} \asymp \phi^{2\ln n} = n^{2\ln\phi}$; $H_{F_n} \sim n \ln\phi$ растет быстрее, поскольку $\phi^2 = \phi + 1 < e$.

9.3 Замена kn на $O(n)$ подразумевает различные C для разных k; а нужно, чтобы все O имели общую константу. В действительности, в данном контексте требуется, чтобы O обозначало множество функций двух переменных, k и n. Правильно будет записать $\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n^2) = O(n^3)$.

9.4 Например, $\lim_{n\to\infty} O(1/n) = 0$. $O(1/n)$ из левой части есть множество всех функций $f(n)$, для которых найдутся константы C и n_0, такие, что $|f(n)| \leqslant C/n$ для всех $n \geqslant n_0$. Предел любой функции из этого множества равен 0, поэтому левая часть представляет собой одноэлементное множество $\{0\}$. В правой части нет переменных; 0 представляет $\{0\}$, множество (из одного элемента) всех „функций без переменных, имеющих нулевое значение“. (Понимаете ли вы логику этого высказывания? Если нет, вернитесь к этой задаче через год; вы, вероятно, сможете обращаться с O-обозначениями, даже если ваша интуиция не приемлет строгий формализм.)

9.5 Пусть $f(n) = n^2$, а $g(n) = 1$; тогда n принадлежит левому множеству, но не принадлежит правому, так что утверждение ложно.

9.6 $n\ln n + \gamma n + O(\sqrt{n}\ln n)$.

9.7 $(1 - e^{-1/n})^{-1} = nB_0 - B_1 + B_2 n^{-1}/2! + \cdots = n + \frac{1}{2} + O(n^{-1})$.

9.8 Пусть, например, $f(n) = \lfloor n/2\rfloor!^2 + n$, $g(n) = \big(\lceil n/2\rceil - 1\big)! \times \lceil n/2\rceil! + n$. Эти функции, как оказывается, удовлетворяют соотношениям $f(n) = O\big(ng(n)\big)$ и $g(n) = O\big(nf(n)\big)$; разумеется, возможны и примеры с более резким различием.

9.9 (Для полноты мы предположим наличие граничных условий $n \to \infty$, так что каждое O подразумевает две константы.) Любая функция из левой части имеет вид $a(n) + b(n)$, причем существуют константы m_0, B, n_0, C, такие, что $|a(n)| \leqslant B|f(n)|$ для $n \geqslant m_0$ и $|b(n)| \leqslant C|g(n)|$ для $n \geqslant n_0$. Следовательно, функция в левой части не превосходит $\max(B, C)\big(|f(n)| + |g(n)|\big)$ для $n \geqslant \max(m_0, n_0)$, и, значит, она принадлежит правой части.

9.10 Если $g(x)$ принадлежит левой части, так что $g(x) = \cos y$ для некоторого y, причем $|y| \leqslant C|x|$ для некоторой константы C, то $0 \leqslant 1 - g(x) = 2\sin^2(y/2) \leqslant \frac{1}{2}y^2 \leqslant \frac{1}{2}C^2x^2$. Следовательно, множество из левой части содержится в правой, и формула верна.

9.11 Утверждение верно. Действительно, если, скажем, $|x| \leqslant |y|$, то $(x + y)^2 \leqslant 4y^2$. Таким образом, $(x + y)^2 = O(x^2) + O(y^2)$. Следовательно, $O(x + y)^2 = O\big((x + y)^2\big) = O\big(O(x^2) + O(y^2)\big) = O\big(O(x^2)\big) + O\big(O(y^2)\big) = O(x^2) + O(y^2)$.

9.12 $1+2/n+O(n^{-2}) = (1+2/n)\big(1+O(n^{-2})/(1+2/n)\big)$ по (9.26), кроме того, $1/(1 + 2/n) = O(1)$; теперь используйте (9.26).

9.13 $n^n(1 + 2n^{-1} + O(n^{-2}))^n = n^n \exp(n(2n^{-1} + O(n^{-2}))) = e^2 n^n + O(n^{n-1})$.

9.14 Это $n^{n+\beta} \exp((n+\beta)(\alpha/n - \frac{1}{2}\alpha^2/n^2 + O(n^{-3})))$.

(Интересно сравнить эту формулу с аналогичным результатом для среднего биномиального коэффициента, упр. 9.60.)

9.15 $\ln\binom{3n}{n,n,n} = 3n\ln 3 - \ln n + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2\pi + (\frac{1}{36} - \frac{1}{4})n^{-1} + O(n^{-3})$, так что ответом будет

$$\frac{3^{3n+1/2}}{2\pi n}\left(1 - \tfrac{2}{9}n^{-1} + \tfrac{2}{81}n^{-2} + O(n^{-3})\right).$$

9.16 Если l — любое целое число в диапазоне $a \leqslant l < b$, то

$$\int_0^1 B(x)f(l+x)\,dx = \int_{1/2}^1 B(x)f(l+x)\,dx - \int_0^{1/2} B(1-x)f(l+x)\,dx$$
$$= \int_{1/2}^1 B(x)\big(f(l+x) - f(l+1-x)\big)\,dx.$$

Поскольку $l+x \geqslant l+1-x$ при $x \geqslant \frac{1}{2}$, этот интеграл положителен, если $f(x)$ не убывает.

9.17 $\sum_{m\geqslant 0} B_m(\frac{1}{2})z^m/m! = ze^{z/2}/(e^z - 1) = z/(e^{z/2}-1) - z/(e^z - 1)$.

9.18 Вывод в тексте для $\alpha = 1$ можно обобщить, получив

$$b_k(n) = \frac{2^{(2n+1/2)\alpha}}{(2\pi n)^{\alpha/2}} e^{-k^2\alpha/n},$$
$$c_k(n) = 2^{2n\alpha} n^{-(1+\alpha)/2+3\epsilon} e^{-k^2\alpha/n};$$

ответом будет $2^{2n\alpha}(\pi n)^{(1-\alpha)/2}\alpha^{-1/2}(1 + O(n^{-1/2+3\epsilon}))$.

9.19 $H_{10} = 2.928968254 \approx 2.928968256$; $10! = 3628800 \approx 3628712.4$; $B_{10} = 0.075757576 \approx 0.075757494$; $\pi(10) = 4 \approx 10.0017845$; $e^{0.1} = 1.10517092 \approx 1.10517083$; $\ln 1.1 = 0.0953102 \approx 0.0953083$; $1.1111111 \approx 1.1111000$; $1.1^{0.1} = 1.00957658 \approx 1.00957643$. (Аппроксимация $\pi(n)$ дает больше верных цифр при бóльших n; так, $\pi(10^9) = 50847534 \approx 50840742$.)

9.20 (a) Верно; левая часть есть $o(n)$, тогда как правая эквивалентна $O(n)$. (b) Верно; левая часть равна $e \cdot e^{O(1/n)}$. (c) Неверно; левая часть примерно в $\sqrt{n}$ раз превосходит верхнюю границу для правой части.

9.21 Имеем $P_n = p = n(\ln p - 1 - 1/\ln p + O(1/\log n)^2)$, при этом

$$\ln p = \ln n + \ln\ln p - 1/\ln n + \ln\ln n/(\ln n)^2 + O(1/\log n)^2;$$
$$\ln\ln p = \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} - \frac{(\ln\ln n)^2}{2(\ln n)^2} + \frac{\ln\ln n}{(\ln n)^2} + O(1/\log n)^2.$$

Отсюда следует, что

$$P_n = n\biggl(\ln n + \ln\ln n - 1 + \frac{\ln\ln n - 2}{\ln n} - \frac{(\ln\ln n)^2/2 - 3\ln\ln n}{(\ln n)^2} + O(1/\log n)^2\biggr).$$

(Можно несколько улучшить аппроксимацию, заменив здесь $O(1/\log n)^2$ величиной $-5.5/(\ln n)^2 + O(\log\log n/\log n)^3$; в этом случае получаем $P_{1000000} \approx 15480992.8$.)

А что нам скажет утопающий специалист по аналитической теории чисел?

log log log log ...

9.22 Заменим в разложении H_{n^k} член $O(n^{-2k})$ на $-\frac{1}{12}n^{-2k} + O(n^{-4k})$; в результате $O(\Sigma_3(n^2))$ в (9.53) перейдет в $-\frac{1}{12}\Sigma_3(n^2) + O(\Sigma_3(n^4))$. Имеем

$$\Sigma_3(n) = \tfrac{3}{4}n^{-1} + \tfrac{5}{36}n^{-2} + O(n^{-3}),$$

следовательно, член $O(n^{-2})$ в (9.54) может быть заменен на $-\frac{19}{144}n^{-2} + O(n^{-3})$.

9.23 $nh_n = \sum_{0\leqslant k<n} h_k/(n-k) + 2cH_n/(n+1)(n+2)$. Выберем $c = e^{\pi^2/6} = \sum_{k\geqslant 0} g_k$, так что $\sum_{k\geqslant 0} h_k = 0$ и $h_n = O(\log n)/n^3$. Развертывание $\sum_{0\leqslant k<n} h_k/(n-k)$, как в (9.60), дает теперь $nh_n = 2cH_n/(n+1)(n+2) + O(n^{-2})$, следовательно,

$$g_n = e^{\pi^2/6}\left(\frac{n + 2\ln n + O(1)}{n^3}\right).$$

9.24 (a) Если $\sum_{k\geqslant 0}|f(k)| < \infty$ и $f(n-k) = O(f(n))$ для $0 \leqslant k \leqslant n/2$, то

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n/2} O(f(k))\,O(f(n)) + \sum_{k=n/2}^{n} O(f(n))\,O(f(n-k)),$$

что составляет $2O\bigl(f(n)\sum_{k\geqslant 0}|f(k)|\bigr)$, так что в этом случае все доказано. (b) В случае $a_n = b_n = \alpha^{-n}$ свертка $(n+1)\alpha^{-n}$ не есть $O(\alpha^{-n})$.

9.25 $S_n/\binom{3n}{n} = \sum_{k=0}^{n} n^{\underline{k}}/(2n+1)^{\overline{k}}$. Диапазон суммирования можно сузить до, скажем, $0 \leqslant k \leqslant (\log n)^2$. В этом диапазоне $n^{\underline{k}} = n^k\bigl(1 - \binom{k}{2}/n + O(k^4/n^2)\bigr)$ и $(2n+1)^{\overline{k}} = (2n)^k\bigl(1 + \binom{k+1}{2}/2n + O(k^4/n^2)\bigr)$, поэтому слагаемые равны

$$\frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{3k^2 - k}{4n} + O\Bigl(\frac{k^4}{n^2}\Bigr)\right).$$

Следовательно, суммирование по k дает $2 - 4/n + O(1/n^2)$. Теперь для доказательства (9.2) можно применить аппроксимацию Стирлинга к $\binom{3n}{n} = (3n)!/(2n)!\,n!$.

9.26 Минимум достигается на члене $B_{2m}/(2m)(2m-1)n^{2m-1}$, когда $2m \approx 2\pi n+\frac{3}{2}$, и этот член приблизительно равен $1/(\pi e^{2\pi n}\sqrt{n})$. Следовательно, абсолютная погрешность в $\ln n!$ слишком велика для определения точного значения $n!$ путем округления до целого, если n превышает примерно на $e^{2\pi+1}$.

9.27 Можно считать, что $\alpha \neq -1$. Положим $f(x) = x^\alpha$; ответом будет

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = C_\alpha + \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{n^\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k}\binom{\alpha}{2k-1} n^{\alpha-2k+1} + O(n^{\alpha-2m-1}) .$$

В частности, $\zeta(0) = -1/2$ *и* $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$ *для целого* $n > 0$.

(Оказывается, что константа C_α есть $\zeta(-\alpha)$, и, на самом деле, $\zeta(-\alpha)$ *определяется* посредством этой формулы для $\alpha > -1$.)

9.28 В общем случае положим в формуле суммирования Эйлера $f(x) = x^\alpha \ln x$, где $\alpha \neq -1$. Действуя, как в предыдущем упражнении, находим

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \ln k = C'_\alpha + \frac{n^{\alpha+1}\ln n}{\alpha+1} - \frac{n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{n^\alpha \ln n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k}\binom{\alpha}{2k-1} n^{\alpha-2k+1}(\ln n + H_\alpha - H_{\alpha-2k+1}) + O(n^{\alpha-2m-1}\log n);$$

как можно показать [97, §3.7], константа C'_α равна $-\zeta'(-\alpha)$. (Можно исключить множитель $\log n$ из O-слагаемого, когда α — положительное целое $\leqslant 2m$; в этом случае мы также заменяем k-й член суммы в правой части на $B_{2k}\alpha!\,(2k-2-\alpha)!(-1)^\alpha n^{\alpha-2k+1}/(2k)!$ при $\alpha < 2k-1$.) Чтобы получить решение поставленной задачи, положим $\alpha = 1$ и $m = 1$, возьмем экспоненту от обеих частей и получим

$$Q_n = A \cdot n^{n^2/2+n/2+1/12} e^{-n^2/4}\bigl(1 + O(n^{-2})\bigr) ,$$

где $A = e^{1/12-\zeta'(-1)} \approx 1.2824271291$ — „константа Глейшера“.

9.29 Положим $f(x) = x^{-1}\ln x$. Небольшая модификация вычислений из предыдущего упражнения дает

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} + \gamma_1 + \frac{\ln n}{2n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} n^{-2k}(\ln n - H_{2k-1}) + O(n^{-2m-1}\log n) ,$$

где $\gamma_1 \approx -0.0728158454836767248б$ — константа Стилтьеса (см. ответ к 9.57). Взятие экспоненты дает

$$e^{\gamma_1}\sqrt{n^{\ln n}}\left(1+\frac{\ln n}{2n}+O\Bigl(\frac{\log n}{n}\Bigr)^2\right).$$

9.30 Положим $g(x) = x^l e^{-x^2}$ и $f(x) = g(x/\sqrt{n})$. Тогда $n^{-l/2} \times \sum_{k\geqslant 0} k^l e^{-k^2/n}$ есть

$$\int_0^\infty f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(0) - (-1)^m\int_0^\infty \frac{B_m(\{x\})}{m!}f^{(m)}(x)\,dx$$
$$= n^{1/2}\int_0^\infty g(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}n^{(k-1)/2}g^{(k-1)}(0) + O(n^{-m/2}).$$

Поскольку $g(x) = x^l - x^{2+l}/1! + x^{4+l}/2! - x^{6+l}/3! + \cdots$, производные $g^{(m)}(x)$ следуют простой схеме, и ответом будет

$$\frac{1}{2}n^{(l+1)/2}\Gamma\Bigl(\frac{l+1}{2}\Bigr) - \frac{B_{l+1}}{(l+1)!0!} + \frac{B_{l+3}n^{-1}}{(l+3)!1!} - \frac{B_{l+5}n^{-2}}{(l+5)!2!} + O(n^{-3}).$$

9.31 Несколько неожиданное тождество $1/(c^{m-k}+c^m) + 1/(c^{m+k}+c^m) = 1/c^m$ показывает, что сумма членов для $0 \leqslant k \leqslant 2m$ равна $(m+\frac{1}{2})/c^m$. Остальная сумма равна

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{c^{2m+k}+c^m} = \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{c^{2m+k}} - \frac{1}{c^{3m+2k}} + \frac{1}{c^{4m+3k}} - \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{c^{2m+1}-c^{2m}} - \frac{1}{c^{3m+2}-c^{3m}} + \cdots,$$

и этот ряд можно оборвать в любом месте, получив погрешность, не превышающую первого отброшенного члена.

9.32 $H_n^{(2)} = \pi^2/6 - 1/n + O(n^{-2})$ по формуле суммирования Эйлера, поскольку мы знаем константу; H_n задается формулой (9.89). Ответ, следовательно, таков:

$$ne^{\gamma+\pi^2/6}\bigl(1 - \tfrac{1}{2}n^{-1} + O(n^{-2})\bigr).$$

В этом ответе встречаются все три мировые константы: e, π, γ.

9.33 Имеем $n^{\underline{k}}/n^{\overline{k}} = 1 - k(k-1)n^{-1} + \frac{1}{2}k^2(k-1)^2n^{-2} + O(k^6n^{-3})$; деление на $k!$ и суммирование по $k \geqslant 0$ дает $e - en^{-1} + \frac{7}{2}en^{-2} + O(n^{-3})$.

9.34 $A = e^\gamma$; $B = 0$; $C = -\frac{1}{2}e^\gamma$; $D = \frac{1}{2}e^\gamma(1-\gamma)$; $E = \frac{1}{8}e^\gamma$; $F = \frac{1}{12}e^\gamma(3\gamma+1)$.

9.35 Поскольку $1/k\bigl(\ln k + O(1)\bigr) = 1/k\ln k + O\bigl(1/k(\log k)^2\bigr)$, данная сумма равна $\sum_{k=2}^{n} 1/k\ln k + O(1)$. Эта последняя сумма равна, по формуле суммирования Эйлера, $\ln\ln n + O(1)$.

9.36 Здесь замечательно работает формула суммирования Эйлера:

$$S_n = \sum_{0\leqslant k<n} \frac{1}{n^2+k^2} + \frac{1}{n^2+x^2}\bigg|_0^n$$
$$= \int_0^n \frac{dx}{n^2+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2+x^2}\bigg|_0^n + \frac{B_2}{2!}\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\bigg|_0^n + O(n^{-5}).$$

Следовательно, $S_n = \frac{1}{4}\pi n^{-1} - \frac{1}{4}n^{-2} - \frac{1}{24}n^{-3} + O(n^{-5})$.

9.37 Эта сумма равна

$$\sum_{k,q\geqslant 1} (n-qk)\big[n/(q+1)<k\leqslant n/q\big]$$
$$= n^2 - \sum_{q\geqslant 1} q\left(\binom{\lfloor n/q\rfloor+1}{2} - \binom{\lfloor n/(q+1)\rfloor+1}{2}\right)$$
$$= n^2 - \sum_{q\geqslant 1}\binom{\lfloor n/q\rfloor+1}{2}.$$

Оставшаяся сумма подобна (9.55), но без множителя $\mu(q)$. Использованный нами метод работает и здесь, но вместо $1/\zeta(2)$ мы получим $\zeta(2)$, так что ответом будет $\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)n^2 + O(n\log n)$.

9.38 Заменим k на $n-k$ и положим $a_k(n) = (n-k)^{n-k}\binom{n}{k}$. Тогда $\ln a_k(n) = n\ln n - \ln k! - k + O(kn^{-1})$ и можно использовать замену хвоста с $b_k(n) = n^n e^{-k}/k!$, $c_k(n) = kb_k(n)/n$, $D_n = \{\,k \mid k\leqslant \ln n\,\}$, получая в итоге $\sum_{k=0}^{n} a_k(n) = n^n e^{1/e}\big(1+O(n^{-1})\big)$.

9.39 Замена хвоста с $b_k(n) = (\ln n - k/n - \frac{1}{2}k^2/n^2)(\ln n)^k/k!$, $c_k(n) = n^{-3}(\ln n)^{k+3}/k!$, $D_n = \{\,k \mid 0\leqslant k\leqslant 10\ln n\,\}$. Для $k\approx 10\ln n$ имеем $k! \asymp \sqrt{k}\,(10/e)^k(\ln n)^k$, поэтому k-й член есть $O(n^{-10\ln(10/e)}\log n)$. В ответе получаем

$$n\ln n - \ln n - \frac{1}{2}(\ln n)(1+\ln n)/n + O\big(n^{-2}(\log n)^3\big).$$

9.40 Объединяя члены попарно, получим $H_{2k}^m - (H_{2k} - \frac{1}{2k})^m = \frac{m}{2k}H_{2k}^{m-1}$ плюс еще члены, сумма которых по всем $k\geqslant 1$ составляет $O(1)$. Пусть n четно. Из формулы суммирования Эйлера

$$\sum_{k=1}^{n/2}\frac{H_{2k}^{m-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n/2}\frac{(\ln 2e^\gamma k)^{m-1} + O(k^{-1}(\log k)^{m-2})}{k}$$
$$= \frac{(\ln e^\gamma n)^m}{m} + O(1);$$

следовательно, сумма равна $\frac{1}{2}H_n^m + O(1)$. В целом ответ — $\frac{1}{2}(-1)^n H_n^m + O(1)$.

9.41 Положим $\alpha = \hat\phi/\phi = -\phi^{-2}$. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln F_k &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\ln\phi^k - \ln\sqrt5 + \ln(1-\alpha^k)\bigr)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\ln\phi - \frac{n}{2}\ln 5\\ &\qquad + \sum_{k\geqslant 1}\ln(1-\alpha^k) - \sum_{k>n}\ln(1-\alpha^k)\,.\end{aligned}$$

Последняя сумма есть $\sum_{k>n} O(\alpha^k) = O(\alpha^n)$. Следовательно, получаем ответ

$$\phi^{n(n+1)/2}5^{-n/2}C + O(\phi^{n(n-3)/2}5^{-n/2}),$$
$$\text{где}\quad C = (1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots \approx 1.226742\,.$$

9.42 Утверждение в указании вытекает из того, что $\binom{n}{k-1}/\binom{n}{k} = \frac{k}{n-k+1} \leqslant \frac{\alpha n}{n-\alpha n+1} < \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Пусть $m = \lfloor \alpha n\rfloor = \alpha n - \epsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &< \sum_{k\leqslant m}\binom{n}{k}\\ &< \binom{n}{m}\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 + \cdots\right) = \binom{n}{m}\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\,.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sum_{k\leqslant\alpha n}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}O(1)$ и остается оценить $\binom{n}{m}$. Из аппроксимации Стирлинга имеем $\ln\binom{n}{m} = -\frac12\ln n - (\alpha n-\epsilon)\ln(\alpha-\epsilon/n) - \bigl((1-\alpha)n + \epsilon\bigr)\ln(1-\alpha+\epsilon/n) + O(1) = -\frac12\ln n - \alpha n\ln\alpha - (1-\alpha)n\ln(1-\alpha) + O(1)$.

9.43 Знаменатель содержит множители вида $z-\omega$, где ω — комплексный корень из единицы. Из них только множитель $z-1$ входит с кратностью 5. Из (7.31) поэтому следует, что только один корень имеет множитель $\Omega(n^4)$ и этот коэффициент есть $c = 5/(5!\cdot1\cdot5\cdot10\cdot25\cdot50) = 1/1500000$.

9.44 Аппроксимация Стирлинга позволяет утверждать, что для $\ln\bigl(x^{-\alpha}x!/(x-\alpha)!\bigr)$ имеется асимптотический ряд

$$\begin{aligned}-\alpha - (x+\tfrac12-\alpha)\ln(1-\alpha/x) &- \frac{B_2}{2\cdot1}\bigl(x^{-1}-(x-\alpha)^{-1}\bigr)\\ &- \frac{B_4}{4\cdot3}\bigl(x^{-3}-(x-\alpha)^{-3}\bigr) - \cdots,\end{aligned}$$

в котором каждый коэффициент при x^{-k} является многочленом от α. Следовательно, $x^{-\alpha}x!/(x-\alpha)! = c_0(\alpha) + c_1(\alpha)x^{-1} + \cdots + c_n(\alpha)x^{-n} + O(x^{-n-1})$ при $x\to\infty$, где $c_n(\alpha)$ — многочлен от α. Мы знаем, что $c_n(\alpha) = {\alpha \brack \alpha-n}(-1)^n$, если α — целое, и ${\alpha \brack \alpha-n}$ есть многочлен от α степени $2n$; следовательно, $c_n(\alpha) = {\alpha \brack \alpha-n}(-1)^n$ для всех

(Дальнейшее обсуждение см. в [152].)

вещественных α. Другими словами, асимптотические формулы

$$x^{\underline{\alpha}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{\alpha \atop \alpha-k}\right](-1)^k x^{\alpha-k} + O(x^{\alpha-n-1}),$$

$$x^{\overline{\alpha}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{\alpha \atop \alpha-k}\right] x^{\alpha-k} + O(x^{\alpha-n-1})$$

обобщают формулы (6.13) и (6.11), имеющие место в целочисленном случае.

9.45 Пусть неполными частными при разложении α в цепную дробь будут $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$; обозначим через α_m цепную дробь $1/(a_m + \alpha_{m+1})$ для $m \geqslant 1$. Тогда $D(\alpha, n) = D(\alpha_1, n) < D(\alpha_2, \lfloor\alpha_1 n\rfloor) + a_1 + 3 < D(\alpha_3, \lfloor\alpha_2\lfloor\alpha_1 n\rfloor\rfloor) + a_1 + a_2 + 6 < \cdots < D(\alpha_{m+1}, \lfloor\alpha_m\lfloor\ldots\lfloor\alpha_1 n\rfloor\ldots\rfloor\rfloor) + a_1 + \cdots + a_m + 3m < \alpha_1\ldots\alpha_m n + a_1 + \cdots + a_m + 3m$ для всех m. Поделим на n и устремим n к ∞; предел будет меньше, чем $\alpha_1\ldots\alpha_m$ для всех m. И, наконец, имеем

$$\alpha_1\ldots\alpha_m = \frac{1}{K(a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \alpha_m)} < \frac{1}{F_{m+1}}.$$

9.46 Для удобства будем вместо $m(n)$ писать просто m. Из аппроксимации Стирлинга получаем, что $k^n/k!$ достигает максимального значения при $k \approx m \approx n/\ln n$, поэтому заменим k на $m+k$ и найдем, что

$$\ln\frac{(m+k)^n}{(m+k)!} = n\ln m - m\ln m + m - \frac{\ln 2\pi m}{2} - \frac{(m+n)k^2}{2m^2} + O(k^3m^{-2}\log n).$$

На самом деле мы хотим заменить k на $\lfloor m\rfloor + k$; это добавит еще $O(km^{-1}\log n)$. Метод замены хвоста с $|k| \leqslant m^{1/2+\epsilon}$ позволяет выполнить суммирование по k и найти довольно хорошую асимптотическую оценку через величины Θ из (9.93)

$$\varpi_n = \frac{e^{m-1}m^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}}\left(\Theta_{2m^2/(m+n)} + O(1)\right) = e^{m-n-1/2}m^n\sqrt{\frac{m}{m+n}}\left(1 + O\left(\frac{\log n}{n^{1/2}}\right)\right).$$

Отсюда вытекает требуемая формула с относительной погрешностью $O(\log\log n/\log n)$.

9.47 Пусть $\log_m n = l+\theta$, где $0 \leqslant \theta < 1$. Нижняя сумма (сумма с функцией пол) равна $l(n+1)+1-(m^{l+1}-1)/(m-1)$; верхняя сумма (с функцией потолок) равна $(l+1)n - (m^{l+1}-1)/(m-1)$; точная сумма есть $(l+\theta)n - n/\ln m + O(\log n)$. Если пренебречь членами порядка $o(n)$, то разность между верхней и точной суммой будет

равна $(1 - f(\theta))n$, а разность между точной и нижней суммой будет $f(\theta)n$, где

$$f(\theta) = \frac{m^{1-\theta}}{m-1} + \theta - \frac{1}{\ln m}\,.$$

Максимальное значение этой функции есть $f(0) = f(1) = m/(m-1) - 1/\ln m$, а ее минимальное значение $\ln\ln m/\ln m + 1 - (\ln(m-1))/\ln m$. Верхнее значение ближе к точному, когда n близко к степени m, а нижнее точнее, когда θ лежит где-то между 0 и 1.

9.48 Пусть $d_k = a_k + b_k$, где a_k — число цифр перед десятичной точкой. Тогда $a_k = 1 + \lfloor \log H_k \rfloor = \log\log k + O(1)$; здесь 'log' означает $\log_{10}$. Чтобы оценить b_k, найдем число десятичных цифр, требуемое для различения некоторого числа y от близких к нему чисел $y - \epsilon$ и $y + \epsilon'$. Обозначим через $\delta = 10^{-b}$ длину диапазона чисел, округляемых до $\hat{y}$. Тогда имеем $|y - \hat{y}| \leqslant \frac{1}{2}\delta$, а также $y - \epsilon < \hat{y} - \frac{1}{2}\delta$ и $y + \epsilon' > \hat{y} + \frac{1}{2}\delta$. Следовательно, $\epsilon + \epsilon' > \delta$. С другой стороны, если $\delta < \min(\epsilon, \epsilon')$, то округление позволяет отличить $\hat{y}$ от обоих чисел $y - \epsilon$ и $y + \epsilon'$. Таким образом, $10^{-b_k} < 1/(k-1) + 1/k$ и $10^{1-b_k} \geqslant 1/k$; получаем поэтому $b_k = \log k + O(1)$. Окончательно находим $\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} (\log k + \log\log k + O(1))$, что по формуле суммирования Эйлера есть $n \log n + n \log\log n + O(n)$.

9.49 Мы имеем $H_n > \ln n + \gamma + \frac{1}{2}n^{-1} - \frac{1}{12}n^{-2} = f(n)$, причем $f(x)$ возрастает для всех $x > 0$; следовательно, если $n \geqslant e^{\alpha-\gamma}$, то $H_n \geqslant f(e^{\alpha-\gamma}) > \alpha$. Кроме того, $H_{n-1} < \ln n + \gamma - \frac{1}{2}n^{-1} = g(n)$, где $g(x)$ возрастает для всех $x > 0$; следовательно, если $n \leqslant e^{\alpha-\gamma}$, то $H_{n-1} \leqslant g(e^{\alpha-\gamma}) < \alpha$. Таким образом, $H_{n-1} \leqslant \alpha \leqslant H_n$ означает, что $e^{\alpha-\gamma} + 1 > n > e^{\alpha+\gamma} - 1$. (Более точные результаты были получены Боасом и Ренчем [28].)

9.50 (a) Ожидаемый результат равен $\sum_{1 \leqslant k \leqslant N} k/(k^2 H_N^{(2)}) = H_N/H_N^{(2)}$, а нам нужно асимптотическое значение с точностью $O(N^{-1})$:

$$\frac{\ln N + \gamma + O(N^{-1})}{\pi^2/6 - N^{-1} + O(N^{-2})} = \frac{6\ln 10}{\pi^2} n + \frac{6\gamma}{\pi^2} + \frac{36\ln 10}{\pi^4}\frac{n}{10^n} + O(10^{-n})\,.$$

Коэффициент $(6\ln 10)/\pi^2 \approx 1.3998$ говорит, что мы ожидаем приблизительно 40% дохода.

(b) Вероятность получения прибыли равна

$$\sum_{n<k\leqslant N} 1/(k^2 H_N^{(2)}) = 1 - H_n^{(2)}/H_N^{(2)}\,,$$

и, поскольку $H_n^{(2)} = \frac{\pi^2}{6} - n^{-1} + \frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})$, эта вероятность равна

$$\frac{n^{-1} - \frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})}{\pi^2/6 + O(N^{-1})} = \frac{6}{\pi^2}n^{-1} - \frac{3}{\pi^2}n^{-2} + O(n^{-3}),$$

т. е. *убывает* с ростом n. (Ожидаемое значение в п. (a) велико потому, что оно включает такие огромные выплаты, которые повлияли бы на всю мировую экономику, если бы когда-нибудь пришлось бы их выплачивать.)

9.51 Строго говоря, это неверно, поскольку функция, представляемая $O(x^{-2})$, может оказаться неинтегрируемой. (Это может быть, например, функция '$[x \in S]/x^2$', где S — неизмеримое множество.) Но если предположить, что $f(x)$ — интегрируемая функция, такая, что $f(x) = O(x^{-2})$ при $x \to \infty$, то $\left|\int_n^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \int_n^\infty |f(x)|\,dx \leqslant \int_n^\infty Cx^{-2}\,dx = Cn^{-1}$.

9.52 Цепочку возведений в n-ю степень можно на самом деле заменить любой функцией $f(n)$, сколь угодно быстро стремящейся к бесконечности. Определим последовательность $\langle m_0, m_1, m_2, \ldots\rangle$, положив $m_0 = 0$ и взяв в качестве m_k наименьшее целое число $> m_{k-1}$, такое, что

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{m_k} \geqslant f(k+1)^2\,.$$

Пусть теперь $A(z) = \sum_{k\geqslant 1}(z/k)^{m_k}$. Этот степенной ряд сходится для всех z, поскольку члены для $k > |z|$ ограничены геометрической прогрессией. С другой стороны, $A(n+1) \geqslant \bigl((n+1)/n\bigr)^{m_n} \geqslant f(n+1)^2$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} f(n)/A(n) = 0$.

9.53 По индукции, O-член есть $(m-1)!^{-1}\int_0^x t^{m-1} f^{(m)}(x-t)\,dt$. Поскольку $f^{(m+1)}$ имеет знак, противоположный $f^{(m)}$, абсолютная величина этого интеграла ограничена $\left|f^{(m)}(0)\right|\int_0^x t^{m-1}\,dt$; так что погрешность ограничена абсолютной величиной первого отброшенного члена.

9.54 Пусть $g(x) = f(x)/x^\alpha$. Тогда $g'(x) \sim -\alpha g(x)/x$ при $x \to \infty$. По теореме о среднем $g(x - \frac{1}{2}) - g(x + \frac{1}{2}) = -g'(y) \sim \alpha g(y)/y$ для некоторого y в диапазоне от $x - \frac{1}{2}$ до $x + \frac{1}{2}$. Далее, $g(y) = g(x)\bigl(1+O(1/x)\bigr)$, так что $g(x-\frac{1}{2}) - g(x+\frac{1}{2}) \sim \alpha g(x)/x = \alpha f(x)/x^{1+\alpha}$. Следовательно,

Звучит как „теорема о скверном“.

$$\sum_{k\geqslant n}\frac{f(k)}{k^{1+\alpha}} = O\Bigl(\sum_{k\geqslant n}\bigl(g(k-\tfrac{1}{2}) - g(k+\tfrac{1}{2})\bigr)\Bigr) = O\bigl(g(n-\tfrac{1}{2})\bigr)\,.$$

9.55 Оценка величины $(n+k+\frac{1}{2})\ln(1+k/n) + (n-k+\frac{1}{2}) \times \ln(1-k/n)$ расширяется до $k^2/n + k^4/6n^3 + O(n^{-3/2+5\epsilon})$, так что нам, по-видимому, придется добавить в $b_k(n)$ множитель $e^{-k^4/6n^3}$

и взять $c_k(n) = 2^{2n} n^{-2+5\epsilon} e^{-k^2/n}$. Лучше, однако, не трогать $b_k(n)$ и положить

$$c_k(n) = 2^{2n} n^{-2+5\epsilon} e^{-k^2/n} + 2^{2n} n^{-5+5\epsilon} k^4 e^{-k^2/n},$$

заменяя тем самым $e^{-k^4/6n^3}$ на $1 + O(k^4/n^3)$. Сумма $\sum_k k^4 e^{-k^2/n}$ есть $O(n^{5/2})$, как показано в упр. 30.

9.56 Если $k \leqslant n^{1/2+\epsilon}$, то из аппроксимации Стирлинга получаем $\ln(n^{\underline{k}}/n^k) = -\frac{1}{2}k^2/n + \frac{1}{2}k/n - \frac{1}{6}k^3/n^2 + O(n^{-1+4\epsilon})$, следовательно,

$$n^{\underline{k}}/n^k = e^{-k^2/2n}\bigl(1 + k/2n - \tfrac{2}{3}k^3/(2n)^2 + O(n^{-1+4\epsilon})\bigr).$$

Просуммируем, учтя тождество из упр. 30 и не забывая опускать члены с $k = 0$, и получим $-1 + \Theta_{2n} + \Theta_{2n}^{(1)} - \frac{2}{3}\Theta_{2n}^{(3)} + O(n^{-1/2+4\epsilon}) = \sqrt{\pi n/2} - \frac{1}{3} + O(n^{-1/2+4\epsilon})$.

9.57 Если воспользоваться указанием, то данная сумма превратится в $\int_0^\infty ue^{-u}\zeta(1 + u/\ln n)\,du$. Одно из определений дзета-функции — ряд

$$\zeta(1+z) = z^{-1} + \sum_{m\geqslant 0} (-1)^m \gamma_m z^m/m!,$$

где $\gamma_0 = \gamma$, а γ_m — константа Стилтьеса [284, 131]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln k)^m}{k} - \frac{(\ln n)^{m+1}}{m+1}\right).$$

Следовательно, наша сумма равна

$$\ln n + \gamma - 2\gamma_1(\ln n)^{-1} + 3\gamma_2(\ln n)^{-2} - \cdots.$$

9.58 Пусть $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и $f(z) = e^{2\pi i z\theta}/(e^{2\pi i z} - 1)$. Имеем тогда

$$|f(z)| = \frac{e^{-2\pi y\theta}}{1 + e^{-2\pi y}} \leqslant 1, \qquad \text{если } x \bmod 1 = \tfrac{1}{2};$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{e^{-2\pi y\theta}}{|e^{-2\pi y} - 1|} \leqslant \frac{1}{1 - e^{-2\pi\epsilon}}, \qquad \text{если } |y| \geqslant \epsilon.$$

Следовательно, $|f(z)|$ ограничен на контуре и интеграл есть $O(M^{1-m})$. Вычет функции $2\pi i f(z)/z^m$ в точке $z = k \neq 0$ равен $e^{2\pi i k\theta}/k^m$; вычет в точке $z = 0$ есть коэффициент при z^{-1} в разложении

$$\frac{e^{2\pi i z\theta}}{z^{m+1}}\left(B_0 + B_1\frac{2\pi i z}{1!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^{m+1}}\left(B_0(\theta) + B_1(\theta)\frac{2\pi i z}{1!} + \cdots\right),$$

а именно, $(2\pi i)^m B_m(\theta)/m!$. Следовательно, сумма вычетов внутри контура равна

$$\frac{(2\pi i)^m}{m!}B_m(\theta) \;+\; 2\sum_{k=1}^{M} e^{\pi i m/2}\frac{\cos(2\pi k\theta-\pi m/2)}{k^m}\,.$$

Эта сумма равняется интегралу по контуру, т. е. $O(M^{1-m})$, и, следовательно, стремится к нулю при $M\to\infty$.

9.59 Если $F(x)$ — достаточно хорошая функция, то имеет место общее тождество

$$\sum_k F(k+t) = \sum_n G(2\pi n)e^{2\pi i n t}\,,$$

где $G(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}F(x)\,dx$. (Это „формула суммирования Пуассона", и ее можно найти в стандартных учебниках, например, в Хенричи [336, Теорема 10.6e].)

9.60 Согласно упр. 5.22 рассматриваемая формула эквивалентна

$$n^{\overline{1/2}} = n^{1/2}\left(1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}+\frac{5}{1024n^3}-\frac{21}{32768n^4}+O(n^{-5})\right).$$

Следовательно, нужный результат вытекает из упр. 6.64 и 9.44.

9.61 Основная идея — сделать α „почти" рациональным. Пусть $a_k=2^{2^{2^k}}$ — k-е неполное частное в разложении α. Положим $n=\frac12 a_{m+1}q_m$, где $q_m=K(a_1,\ldots,a_m)$, причем m четно. Тогда $0<\{q_m\alpha\}<1/K(a_1,\ldots,a_{m+1})<1/(2n)$, и если взять $\nu=a_{m+1}/(4n)$, то получим отклонение от равномерности $\geqslant \frac14 a_{m+1}$. Если бы это было меньше, чем $n^{1-\epsilon}$, то мы имели бы $a_{m+1}^{\epsilon}=O(q_m^{1-\epsilon})$, но на самом деле $a_{m+1}>q_m^{2^m}$.

9.62 См. Кэнфилд [173]; в работе Дейвид и Бартон [101, гл. 16] можно найти асимптотику чисел Стирлинга обоих родов.

9.63 Положим $c=\phi^{2-\phi}$. Оценка $cn^{\phi-1}+o(n^{\phi-1})$ доказана Файном [76]. Илан Варди заметил, что сформулированную более точную оценку можно вывести из приблизительного рекуррентного соотношения $c^{\phi}n^{2-\phi}e(n)\approx-\sum_k e(k)[1\leqslant k<cn^{\phi-1}]$, которому удовлетворяет остаточный член $e(n)=f(n)-cn^{\phi-1}$. Этому соотношению асимптотически удовлетворяет функция

Еще дальше в решении этой задачи продвинулся Жан-Люк Реми, Journal of Number Theory, vol. 66 (1997), 1–28.

$$\frac{n^{\phi-1}u(\ln\ln n/\ln\phi)}{\ln n}\,,$$

если $u(x+1)=-u(x)$. (Варди высказал гипотезу, что

$$f(n)=n^{\phi-1}\left(c+u\Big(\frac{\ln\ln n}{\ln\phi}\Big)(\ln n)^{-1}+O\big((\log n)^{-2}\big)\right)$$

для какой-то из таких функций u.) Вычисления для малых n показывают, что $f(n)$ равняется ближайшему целому к $cn^{\phi-1}$ для всех $1 \leqslant n \leqslant 400$ за одним исключением: $f(273) = 39 > c \cdot 273^{\phi-1} \approx 38.4997$. Однако эта малая погрешность постепенно возрастает из-за результатов, аналогичных упр. 2.36. Так, например, $e(201636503) \approx 35.73$; $e(919986484788) \approx -1959.07$.

9.64 (Из этого тождества для $B_2(x)$ легко выводится при помощи индукции по m тождество из упр. 58.) Если $0 < x < 1$, то можно записать интеграл $\int_x^{1/2} \sin N\pi t\, dt/\sin \pi t$ в виде суммы N интегралов, каждый из которых есть $O(N^{-2})$, так что весь интеграл есть $O(N^{-1})$; константа в этом O может зависеть от x. Интегрируя тождество $\sum_{n=1}^{N} \cos 2n\pi t = \Re\bigl(e^{2\pi i t}(e^{2N\pi i t} - 1)/(e^{2\pi i t} - 1)\bigr) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2N+1)\pi t/\sin \pi t$ и устремляя N к ∞, получаем $\sum_{n\geqslant 1}(\sin 2n\pi x)/n = \frac{\pi}{2} - \pi x$ — соотношение, известное Эйлеру ([371] и [374, Part 2, §92]). Еще одно интегрирование дает желаемую формулу. (Это решение было предложено Э. М. Э. Вермутом [52]; собственное решение Эйлера не удовлетворяет современным критериям строгости.)

9.65 Поскольку $a_0 + a_1 n^{-1} + a_2 n^{-2} + \cdots = 1 + (n-1)^{-1} \times (a_0 + a_1(n-1)^{-1} + a_2(n-1)^{-2} + \cdots)$, имеем рекуррентное соотношение $a_{m+1} = \sum_k \binom{m}{k} a_k$, которое совпадает с соотношением для чисел Белла. Следовательно, $a_m = \varpi_m$.

Несколько более длинное, но и более информативное доказательство основывается на том факте, что, в силу (7.47), $1/(n-1)\ldots(n-m) = \sum_k {k \brace m}/n^k$.

9.66 Ожидаемое число различных элементов в последовательности 1, $f(1)$, $f(f(1))$, ..., когда f является случайным отображением множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя, есть функция $Q(n)$ из упр. 56, и ее значение равно $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi n} + O(1)$; это может как-то помочь в установлении множителя $\sqrt{2\pi n}$.

„Сейчас уже твердо установлен тот парадоксальный факт, что самые крайние абстракции как раз и представляют орудия нашего познания конкретных фактов.“
— А. Н. Уайтхед [300]

9.67 Известно, что $\ln \chi_n \sim \frac{3}{2} n^2 \ln \frac{4}{3}$; константа $e^{-\pi/6}$ проверена эмпирически с точностью до восьми значащих цифр.

9.68 Равенство будет нарушено, если, например, $e^{n-\gamma} = m + \frac{1}{2} + \epsilon/m$ для некоторого целого m и некоторого $0 < \epsilon < \frac{1}{8}$; однако не известно ни одного контрпримера.

B

Список литературы

„Эта статья восполняет досадный пробел в литературе." — *Math. Reviews*

ВОТ ТЕ РАБОТЫ, которые цитировались в книге. Цифры на полях соответствуют номерам страниц, где помещены цитаты.

Ссылки на опубликованные задачи в основном указывают места, где можно найти решения, а не исходные постановки задач.

По возможности фамилии авторов и названия работ приводятся на языке оригинала или в транслитерации. [Сведения, добавленные при переводе, заключены в квадратные скобки; работы, добавленные при переводе, отмечены знаком *.— *Ред.*]

686. **1** Абель Н. Х. (N. H. Abel). Letter to B. Holmboe (1823), в его *Œuvres Complètes*, first edition, 1839, volume 2, 264–265. Воспроизведено в second edition, 1881, volume 2, 254–255. [Выдержки из этого письма приведены в книге Оре О. *Замечательный математик Нильс Хенрик Абель.* — М.: Физматгиз, 1962, 84–85.]

61, 68. **2** Абрамовиц М., Стиган И. (Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors). *Handbook of Mathematical Functions.* United States Government Printing Office, 1964. Воспроизведено Dover, 1965. [Имеется русский перевод: Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) *Справочник по специальным функциям.* — М.: Наука, 1979.]

687. **3** Адамс У. У., Дейвисон Дж. Л. (William W. Adams and J. L. Davison). „A remarkable class of continued fractions", *Proceedings of the American Mathematical Society* **65** (1977), 194–198.

42, 88, 685. **4** Айверсон К. Э. (Kenneth E. Iverson). *A Programming Language.* Wiley, 1962.

599. **5*** Айерлэнд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* — М.: Мир, 1987.

19. **6** Аллардис Р. Э., Фрейзер А. Й. (R. E. Allardice and A. Y. Fraser). „La Tour d'Hanoï", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **2** (1884), 50–53.

687. **7** Андре Д. (Désiré André). „Sur les permutations alternées", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, series 3, **7** (1881), 167–184.

8 Апери Р. (Roger Apéry). „Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes“, в *Mathématiques*, Ministère des universités (France), Comité des travaux historiques et scientifiques, Section des sciences, *Bulletin de la Section des Sciences* **3** (1981), 37–53. *267, 686.*

9 Аренс В. (W. Ahrens). *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Teubner, Leipzig, 1901. Second edition, in two volumes, 1910 and 1918. [Имеется русский перевод первого издания: Аренсъ В. *Математическiя игры и развлеченiя*. — Петроград: Физика, 1914.] *25.*

10* Аски Р. „С. Рамануджан. Гипергеометрические и базисные гипергеометрические ряды“, *Успехи математических наук*, **45** (1990), 33–76. *252.*

11 Ахиезер Н. И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*. — М.: Физматгиз, 1961. Английский перевод: *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Hafner, 1965. *637.*

12 Ахо А. В., Слоан Н. Дж. (A. V. Aho and N. J. A. Sloane). „Some doubly exponential sequences“, *Fibonacci Quarterly* **11** (1973), 429–437. *685.*

13 Барлоу П. (P. Barlow). „Demonstration of a curious numerical proposition“, *Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts* **27** (1810), 193–205. *686.*

14 Барр С. А. (S. A. Burr). „On moduli for which the Fibonacci sequence contains a complete system of residues“, *Fibonacci Quarterly* **9** (1971), 497–504. *687.*

15 Бахман П. (Paul Bachmann). *Die analytische Zahlentheorie*. Teubner, Leipzig, 1894. *481.*

16 Бейер У. (William H. Beyer, editor). *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 29th edition. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991. *61.*

17 Бейли У. Н. (W. N. Bailey). *Generalized Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, 1935; second edition, 1964. [См. также [10*].] *252, 686.*

18 Бейли У. Н. (W. N. Bailey). „The generating function for Jacobi polynomials“, *Journal of the London Mathematical Society* **13** (1938), 243–246. *591.*

19 Белл Э. Т. (E. T. Bell). „Euler algebra“, *Transactions of the American Mathematical Society* **25** (1923), 135–154. *365.*

20 Белл Э. Т. (E. T. Bell). „Exponential numbers“, *American Mathematical Monthly* **41** (1934), 411–419. [См. также Белл Э. Т. *Творцы математики*. — М.: Просвещение, 1979.] *687.*

21 Бендер Э. А. (Edward A. Bender). „Asymptotic methods in enumeration“, *SIAM Review* **16** (1974), 485–515. *688.*

313, 314, 315. **22** Бернулли Я. (Jacobi Bernoulli). *Ars Conjectandi*, opus posthumum. Basel, 1713. Воспроизведено в *Die Werke von Jakob Bernoulli*, volume 3, 107–286. [Имеется русский перевод четвертой части („числам Бернулли" посвящена вторая часть): Бернулли Я. *Искусство предположения(й).* — Спб: Имп. Академия наук, 1913; воспроизведено в сборнике: Бернулли Я. *О законе больших чисел.* — М.: Наука, 1986. Этому трактату посвящены с. 69–87 книги Никифоровский В. А. *Великие математики Бернулли.* — М.: Наука, 1984.]

685. **23** Бертран Ж. (J. Bertrand). „Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme", *Journal de l'École Royale Polytechnique* **18**, cahier 30 (1845), 123–140. [См. также: Башмаков М. И. „О постулате Бертрана", *Квант*, 1990, № 1, 59–62.]

685. **24** Бине Ж. (J. Binet). „Mémoire sur un système de Formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques", *Journal de l'École Polytechnique* **9**, cahier 16 (1812), 280–354.

331. **25** Бине Ж. (J. Binet). „Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies, d'un ordre quelconque, à coefficients variables", *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* (Paris) **17** (1843), 559–567.

685. **26** Битти С. (Samuel Beatty). „Problem 3177", *American Mathematical Monthly* **34** (1927), 159–160. [См. задачу 38 в [121*]. В этом сборнике можно найти другие задачи из Американского математического ежемесячника, на которые есть ссылки в настоящей библиографии.]

688. **27** Блом Г. (Gunnar Blom). „Problem E 3043: Random walk until no shoes", *American Mathematical Monthly* **94** (1987), 78–79.

646, 688. **28** Боас Р. П., мл., Ренч Дж. У., мл. (R. P. Boas, Jr. and J. W. Wrench, Jr.). „Partial sums of the harmonic series", *American Mathematical Monthly* **78** (1971), 864–870.

685. **29** Болл У. У. Р., Коксетер Г. С. М. (W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter). *Mathematical Recreations and Essays*, twelfth edition. University of Toronto Press, 1974. (Представляет собой переработку книги W. W. R. Ball *Mathematical Recreations and Problems*, first published by Macmillan, 1892.) [Имеется русский перевод: Болл У., Коксетер Г. *Математические эссе и развлечения.* — М.: Мир, 1986.]

110. **30** Боль П. (P. Bohl). „Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **135** (1909), 189–283. [Имеется русский перевод: Боль П. Г. „Об одной проблеме в теории вековых возмущений". *Собрание трудов.* — Рига: Зинатне, 1974, 338–453.]

31 Борель Э. (Émile Borel). *Leçons sur les séries à termes positifs.* Paris, 1902. [Об Эмиле Бореле см.: Полищук Е. М. *Эмиль Борель.* — Л.: Наука, 1980.] *688.*

32 Боруэйн Дж. М., Боруэйн П. Б. (Jonathan M. Borwein and Peter B. Borwein). *Pi and the AGM.* Wiley, 1987. *687.*

33 Брат Альфред [Бруссо] (Brother U. Alfred [Brousseau]). „A mathematician's progress“, *Mathematics Teacher* **59** (1966), 722–727. *685.*

34 Браун М. (Morton Brown). „Problem 6439: A periodic sequence“, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 218. *541.*

35 Браун Т. (T. Brown). „Infinite multi-variable subpolynormal Woffles which do not satisfy the lower regular Q-property (Piffles)“, в *A Collection of 250 Papers on Woffle Theory Dedicated to R. S. Green on His 23rd Birthday.* Цитировалось в A. K. Austin, „Modern research in mathematics“, *The Mathematical Gazette* **51** (1967), 149–150. *(Такие статьи в этой книге не цитировались.)*

36 Браун Т. К. (Thomas C. Brown). „Problem E 2619: Squares in a recursive sequence“, *American Mathematical Monthly* **85** (1978), 52–53. *685.*

37 Браун У. Г. (William G. Brown). „Historical note on a recurrent combinatorial problem“, *American Mathematical Monthly* **72** (1965), 973–977. *393.*

38 Брент Р. П. (Richard P. Brent). „The first occurrence of large gaps between successive primes“, *Mathematics of Computation* **27** (1973), 959–963. *567.*

39 Брент Р. П. (Richard P. Brent). „Computation of the regular continued fraction for Euler's constant“, *Mathematics of Computation* **31** (1977), 771–777. *338, 608.*

40 Бриларт Дж. (John Brillhart). „Some miscellaneous factorizations“, *Mathematics of Computation* **17** (1963), 447–450. *685.*

41 Броко А. (Achille Brocot). „Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode“, *Revue Chronométrique* **6** (1860), 186–194. (В 1962 г. он также опубиковал 97-страничную монографию с тем же названием.) *140.*

42 Брук М., Уолл К. Р. (Maxey Brooke and C. R. Wall). „Problem B-14: A little surprise“, *Fibonacci Quarterly* **1**, 3 (1963), 80. *686.*

43 Бьенэме Ж. (J. Bienaymé). „Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés“, *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* (Paris) **37** (1853), 309–324. *427.*

44* Вагстафф С. С. (S. S. Wagstaff). „Some Uses of Microcomputers in Number Theory Reseach“, *Computers in Mathematics with Applications* **19** (1990), 53–58.

195, 686. **45** Вандермонд А. (A. Vandermonde). „Mémoire sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* (1772), part 1, 71–72; *Mémoires de Mathématique et de Physique, Tirés des Registres de l'Académie Royale des Sciences* (1772), 489–498.

267. **46** Ван дер Портен А. (Alfred van der Poorten). „A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, an informal report", *The Mathematical Intelligencer* **1** (1979), 195–203.

685, 688. **47** Варди И. (Ilan Vardi). „The error term in Golomb's sequence", *Journal of Number Theory* **40** (1992), 1–11.

563. **48** Вебер Г. (H. Weber). „Leopold Kronecker", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **2** (1892), 5–31. Воспроизведено в *Mathematische Annalen* **43** (1893), 1–25.

110. **49** Вейль Г. (Hermann Weyl). „Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **30** (1910), 377–407. [См. также русский перевод статьи Г. Вейля 1916 года „О равномерном распределении чисел по модулю один" в: Вейль Г. *Избранные труды.* — М.: Наука, 1984, 58-93, а также Вейль Г. *Математическое мышление.* — М.: Наука, 1989.]

557. **50** Вейснер Л. (Louis Weisner). „Abstract theory of inversion of finite series", *Transactions of the American Mathematical Society* **38** (1935), 474–484.

538, 685. **51** Венн Дж. (J. Venn). „On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings", *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, series 5, **9** (1880), 1–18.

650. **52** Вермут Э. М. Э. (Edgar M. E. Wermuth). „Die erste Fourierreihe", *Mathematische Semesterberichte* **40** (1993), 133–145.

620, 686. **53** Вильф Г. С. (Herbert S. Wilf). *Generatingfunctionology.* Academic Press, 1990; second edition, 1994.

269, 271, 686. **54** Вильф Г. С., Зильбергер Д. (Herbert S. Wilf and Doron Zeilberger). „An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and 'q') multisum/integral identities", *Inventiones Mathematicae* **108** (1992), 575–633.

687. **55** Во Ф. В., Максфилд М. У. (Frederick V. Waugh and Margaret W. Maxfield). „Side-and-diagonal numbers", *Mathematics Magazine* **40** (1967), 74–83.

687. **56** Вольштенхольм И. (J. Wolstenholme). „On certain properties of prime numbers", *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **5** (1862), 35–39.

299. **57** Ворпицки Ю. (J. Worpitzky). „Studien über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **94** (1883), 203–232.

58 Вуд Д. (Derick Wood). „The Towers of Brahma and Hanoi revisited“, *Journal of Recreational Mathematics* **14** (1981), 17–24. *685.*

59 Гамбургер Г. (Hans Hamburger). „Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems“, *Mathematische Annalen* **81** (1920), 235–319; **82** (1921), 120–164, 168–187. *637.*

60* Гарднер М. *Математические новеллы.* — М.: Мир, 1974. *128.*

61 Гарднер М. (Martin Gardner). „About phi, an irrational number that has some remarkable geometrical expressions“, *Scientific American* **201**, 2 (August 1959), 128–134. Воспроизведено с дополнениями в его книге *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, 1961, 89–103. [Имеется русский перевод: Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* — М.: Мир, 1971.] *331.*

62 Гарднер М. (Martin Gardner). „On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations“, *Scientific American* **231**, 4 (October 1974), 120–124. Воспроизведено с дополнениями в его книге *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, 1988, 55–69. [Имеется русский перевод: Гарднер М. *Путешествие во времени.* — М.: Мир, 1990.] *448.*

63 Гарднер М. (Martin Gardner). „From rubber ropes to rolling cubes, a miscellany of refreshing problems“, *Scientific American* **232**, 3 (March 1975), 112–114; **232**, 4 (April 1975), 130, 133. Воспроизведено с дополнениями в его книге *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, 1988, 111–124. [Имеется русский перевод: Гарднер М. *Путешествие во времени.* — М.: Мир, 1990.] *686.*

64 Гарднер М. (Martin Gardner). „On checker jumping, the amazon game, weird dice, card tricks and other playful pastimes“, *Scientific American* **238**, 2 (February 1978), 19, 22, 24, 25, 30, 32. Воспроизведено с дополнениями в его книге *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, 1989, 265–280. [Имеется русский перевод: Гарднер М. *От мозаик Пенроуза к надежным шифрам.* — М.: Мир, 1991.] *688.*

65 Гарфункель Дж. (J. Garfunkel). „Problem E 1816: An inequality related to Stirling's formula“, *American Mathematical Monthly* **74** (1967), 202. *688.*

66 Гаспер Дж., Рахман М. (George Gasper and Mizan Rahman). *Basic Hypergeometric Series.* Cambridge University Press, 1990. [Имеется русский перевод: Гаспер Дж., Рахман М. *Базисные гипергеометрические ряды.* — М.: Мир, 1993.] *252.*

67 Гаусс К. Ф. (C. F. Gauss). *Disquisitiones Arithmeticæ.* Leipzig, 1801. Воспроизведено в его *Werke*, volume 1. *148, 685.*

68 Гаусс К. Ф. (Carolo Friderico Gauss). „Disquisitiones generales *235, 251, 571, 686.*

circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \,.\, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)} xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \text{etc.}$$

Pars prior", *Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores* **2** (1813). (Опубликовано Королевским Гетингенским научным обществом 20 января 1812.) Воспроизведено в его *Werke*, volume 3, 123–163, вместе с ранее неопубикованной частью на с. 207–229. [Имеется русский перевод: Гаусс К. Ф. *Труды по теории чисел. Арифметические исследования.* — М.: Изд. АН СССР, 1959, 15–583.]

685. **69** Гаусс К. Ф. (C. F. Gauss). „Pentagramma mirificum", написано примерно в 1836. Опубликовано в его *Werke*, volume 3, 480–490.

25. **70** Герштейн И. Н., Капланскии И. (I. N. Herstein and I. Kaplansky). *Matters Mathematical.* Harper & Row, 1974.

686. **71** Гессель И. (Ira Gessel). „Some congruences for Apéry numbers", *Journal of Number Theory* **14** (1982), 362–368.

300. **72** Гессель И., Стенли Р. П. (Ira Gessel and Richard P. Stanley). „Stirling polynomials", *Journal of Combinatorial Theory*, series A, **24** (1978), 24–33.

567. **73** Ги Р. К. (Richard K. Guy). *Unsolved Problems in Number Theory.* Springer-Verlag, 1981.

301. **74** Гинсбург Дж. (Jekuthiel Ginsburg). „Note on Stirling's numbers", *American Mathematical Monthly* **35** (1928), 77–80.

688. **75** Глейшер Дж. У. Л. (J. W. L. Glaisher). „On the product $1^1.2^2.3^3 \ldots n^n$", *Messenger of Mathematics* **7** (1877), 43–47.

649, 685. **76** Голомб С. У. (Solomon W. Golomb). „Problem 5407: A nondecreasing indicator function", *American Mathematical Monthly* **74** (1967), 740–743.

548. **77** Голомб С. У. (Solomon W. Golomb). „The 'Sales Tax' theorem", *Mathematics Magazine* **49** (1976), 187–189.

499. **78** Голомб С. У. (Solomon W. Golomb). „Problem E 2529: An application of $\psi(x)$", *American Mathematical Monthly* **83** (1976), 487–488.

253, 686. **79** Госпер Р. У., мл. (R. William Gosper, Jr.). „Decision procedure for indefinite hypergeometric summation", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **75** (1978), 40–42.

80 Гранди Г. (Guido Grandi). Letter to Leibniz (July 1713), в *Leibnizens mathematische Schriften*, volume 4, 215–217. [Об этом хрестоматийном письме профессора Пизанского университета Гвидо Гранди см., например: Юшкевич А. П. (ред.) *История математики.* — М.: Наука, 1970] *78.*

81 Грейтцер С. Л. (Samuel L. Greitzer). *International Mathematical Olympiads, 1959–1977.* Mathematical Association of America, 1978. *685.*

82 Грин Д. Х., Кнут Д. Э. (Daniel H. Greene and Donald E. Knuth). *Mathematics for the Analysis of Algorithms.* Birkhäuser, Boston, 1981; third edition, 1990. [Имеется русский перевод второго издания: Грин Д. Х., Кнут Д. Э. *Математические методы анализа алгоритмов.* — М.: Мир, 1987.] *578, 688.*

83 Гросс О. А. (Oliver A. Gross). „Preferential arrangements", *American Mathematical Monthly* **69** (1962), 4–8. *687.*

84 Грэхем Р. Л. (R. L. Graham). „On a theorem of Uspensky", *American Mathematical Monthly* **70** (1963), 407–409. *554.*

85 Грэхем Р. Л. (R. L. Graham). „A Fibonacci-like sequence of composite numbers", *Mathematics Magazine* **37** (1964), 322–324. *687.*

86 Грэхем Р. Л. (R. L. Graham). „Problem 5749", *American Mathematical Monthly* **77** (1970), 775. *686.*

87 Грэхем Р. Л. (Ronald L. Graham). „Covering the positive integers by disjoint sets of the form $\{\lfloor n\alpha+\beta\rfloor : n = 1, 2, \ldots\}$", *Journal of Combinatorial Theory*, series A, **15** (1973), 354–358. *556.*

88 Грэхем Р. Л. (R. L. Graham). „Problem 1242: Bijection between integers and composites", *Mathematics Magazine* **60** (1987), 180. *685.*

89 Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э. (R. L. Graham and D. E. Knuth). „Problem E 2982: A double infinite sum for $|x|$", *American Mathematical Monthly* **96** (1989), 525–526. *685.*

90 Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. (Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Addison-Wesley, 1989; second edition, 1994. [Имеется русский перевод второго издания: Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.] *126.*

91 Грэхем Р. Л., Поллак Х. О. (R. L. Graham and H. O. Pollak). „Note on a nonlinear recurrence related to $\sqrt{2}$", *Mathematics Magazine* **43** (1970), 143–145. *685.*

92 Грюнбаум Б. (Branko Grünbaum). „Venn diagrams and independent families of sets", *Mathematics Magazine* **48** (1975), 12–23. *538.*

93 Гуд И. Дж. (I. J. Good). „Short proof of a conjecture by Dyson", *Journal of Mathematical Physics* **11** (1970), 1884. *686.*

636, 687, 688. **94** Гюиба Л. Дж., Одлыжко А. М. (L. J. Guibas and A. M. Odlyzko). „String overlaps, pattern matching, and nontransitive games“, *Journal of Combinatorial Theory*, series A, **30** (1981), 183–208.

198, 269. **95** Дайсон Ф. Дж. (F. J. Dyson). „Some guesses in the theory of partitions“, *Eureka* **8** (1944), 10–15.

23. **96** Даннингтон Г. У. (G. Waldo Dunnington). *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science.* Exposition Press, New York, 1955. [На русском языке см. также: Бюлер В. *Гаусс (биографическое исследование).* — М.: Наука, 1989.]

482, 485, 641, 688. **97** Де Брейн Н. Г. (N. G. de Bruijn). *Asymptotic Methods in Analysis.* North-Holland, 1958; third edition, 1970. Воспроизведено Dover, 1981. [Имеется русский перевод первого издания: де Брейн Н. Г. *Асимптотические методы в анализе.* — М.: ИЛ, 1961.]

687. **98** Де Брейн Н. Г. (N. G. de Bruijn). „Problem 9“, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, series 3, **12** (1964), 68.

329, 521. **99** Де Муавр А. (Abraham de Moivre). *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis.* London, 1730.

161. **100** Дедекинд Р. (R. Dedekind). „Abriß einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **54** (1857), 1–26. Воспроизведено в его *Gesammelte mathematische Werke*, volume 1, 40–67.

649. **101** Дейвид Ф. Н. Бартон Д. Э. (F. N. David and D. E. Barton). *Combinatorial Chance.* Hafner, 1962.

239. **102** Дейвис Ф. Дж. (Philip J. Davis). „Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function“, *American Mathematical Monthly* **66** (1959), 849–869.

339, 686. **103** Дейвисон Дж. Л. (J. L. Davison). „A series and its associated continued fraction“, *Proceedings of the American Mathematical Society* **63** (1977), 29–32.

686. **104** Дейкстра Э. У. (Edsger W. Dijkstra). *Selected Writings on Computing: A Personal Perspective.* Springer-Verlag, 1982. [См. также: Дейкстра Э. *Дисциплина программирования.* — М.: Мир, 1978.]

600. **105** Джарден Д., Моцкин Т. (Dov Jarden and Theodor Motzkin). „The product of sequences with a common linear recursion formula of order 2“, *Riveon Lematematika* **3** (1949), 25–27, 38 (на иврите с аннотацией на английском языке). Dov Jarden, *Recurring Sequences*, Jerusalem, 1958, 42–45; second edition, 1966, 30–33.

594. **106** Дженокки А. (Angelo Genocchi). „Intorno all'espressione generale de'numeri Bernulliani“, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* **3** (1852), 395–405.

107 Джонс Б. (Bush Jones). „Note on internal merging“, *Software—Practice and Experience* **2** (1972), 241–243. *201.*

108 Диксон А. К. (A. C. Dixon). „On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem“, *Messenger of Mathematics* **20** (1891), 79–80. *686.*

109 Диксон Л. Э. (Leonard Eugene Dickson). *History of the Theory of Numbers.* Carnegie Institution of Washington, volume 1, 1919; volume 2, 1920; volume 3, 1923. Воспроизведено Stechert, 1934, и Chelsea, 1952, 1971. *551.*

110 Дирихле Г. Л. (G. Lejeune Dirichlet). „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen“, *Bericht über die Verhandlungen der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1842), 93–95. Воспроизведено в его *Werke*, volume 1, 635–638. *685.*

111 Дугол Дж. (John Dougall). „On Vandermonde's theorem, and some more general expansions“, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **25** (1907), 114–132. *198.*

112 Дьюдени Г. Э. (Henry Ernest Dudeney). *The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems.* E. P. Dutton, New York, 1908; 4th edition, Dover, 1958. (Свое первое обобщение ханойской башни Дьюдени опубликовал в *The Weekly Dispatch* 25 May 1902 и 15 March 1903.) [Имеется русский перевод четвертого издания: Дьюдени Г. Э. *Кентерберийские головоломки.* — М.: Мир, 1979.] *685.*

113 Дюбуа-Раймон П. (P. du Bois-Reymond). „Sur la grandeur relative des infinis des fonctions“, *Annali di Matematica pura ed applicata*, series 2, **4** (1871), 338–353. *478.*

114 Дюбнер Х. (Harvey Dubner). „Generalized repunit primes“, *Mathematics of Computation* **61** (1993), 927–930. *685.*

115 Заальшютц Л. (Louis Saalschütz). „Eine Summationsformel“, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **35** (1890), 186–188. *264.*

116* *Записки научных семинаров ЛОМИ* **8** (1968). *605.*

117 Зейв Д. А. (Derek A. Zave). „A series expansion involving the harmonic numbers“, *Information Processing Letters* **5** (1976), 75–77. *687.*

118 Зилверман Д. (David L. Silverman). „Problematical Recreations 447: Numerical links“, *Aviation Week & Space Technology* **89**, 10 (1 September 1968), 71. Воспроизведено как Problem 147 в *Second Book of Mathematical Bafflers*, edited by Angela Fox Dunn, Dover, 1983. *687.*

119 Зильбергер Д. (Doron Zeilberger). „A holonomic systems approach to special functions identities“, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **32** (1990), 321–368. *608.*

259. **120** Зильбергер Д. (Doron Zeilberger). „The method of creative telescoping“, *Journal of Symbolic Computation* **11** (1991), 195–204.

604, 653. **121*** *Избранные задачи из журнала.* — М.: Мир, 1977.

25. **122** Иосиф Флавий (Flavius Josephus). *ΙΣΤΟΡΙΑ ΙΟΥΔΑΪΚΟΥ ΠΟΛΕΜΟΥ ΠΡΟΣ ΡΩΜΑΙΟΥΣ.* Английский перевод: *History of the Jewish War against the Romans*, by H. St. J. Thackeray, в Loeb Classical Library edition of Josephus's works, volumes 2 and 3, Heinemann, London, 1927–1928. („Задача Иосифа“ взята, возможно, из более ранней рукописи, сохранившейся только в древнерусском варианте.) [См.: *История иудейской войны Иосифа Флавия в древнерусском переводе Н. А. Мещерского.* — М.: Изд. АН СССР, 1958.]

578. **123** Йонассен А., Кнут Д. Э. (Arne Jonassen and Donald E. Knuth). „A trivial algorithm whose analysis isn't“, *Journal of Computer and System Sciences* **16** (1978), 301–322.

287. **124** Карамата И. (J. Karamata). „Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités rattachant“, *Mathematica* (Cluj) **9** (1935), 164–178.

687. **125** Карлитц Л. (L. Carlitz). „The generating function for $\max(n_1, n_2, \cdots, n_k)$“, *Portugaliae Mathematica* **21** (1962), 201–207.

324. **126** Кассини Ж.-Д. (Jean-Dominique Cassini). „Une nouvelle progression de nombres“, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, volume 1, 201. (В этой работе Кассини собраны математические результаты, представленные Королевской академии наук в 1680 г. Издание вышло в 1733 г.)

231. **127** Каталан Э. (E. Catalan). „Note sur une Équation aux différences finies“, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **3** (1838), 508–516.

687. **128** Кауцки И. (I. Kaucký). „Problem E 2257: A harmonic identity“, *American Mathematical Monthly* **78** (1971), 908.

324. **129** Кеплер И. (Johannes Kepler). Letter to Joachim Tancke (12 May 1608), в его *Gesammelte Werke*, volume 16, 154–165.

685. **130** Кёртис Д. Р. (D. R. Curtiss). „On Kellogg's Diophantine problem“, *American Mathematical Monthly* **29** (1922), 380–387.

648. **131** Кипер Дж. Б. (J. B. Keiper). „Power series expansions of Riemann's ξ function“, *Mathematics of Computation* **58** (1992), 765–773.

132* Клайн М. *Математика. Утрата определенности.* — М.: Мир, 1984.

685, 686. **133** Кламкин М. С. (Murray S. Klamkin). *International Mathematical Olympiads, 1978–1985, and Forty Supplementary Problems.* Mathematical Association of America, 1986.

134 Клаузен Т. (Th. Clausen). „Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form *686.*

$$y = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}\cdot\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}x^2 + \text{etc.}$$

ein Quadrat von der Form

$$z=1+\frac{\alpha'}{1}\cdot\frac{\beta'}{\gamma'}\cdot\frac{\delta'}{\epsilon'}x+\frac{\alpha'.\alpha'+1}{1.2}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1}{\gamma'.\gamma'+1}\cdot\frac{\delta'.\delta'+1}{\epsilon'.\epsilon'+1}x^2+\text{etc. hat"}$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik **3** (1828), 89–91.

135 Клаузен Т. (Th. Clausen). „Beitrag zur Theorie der Reihen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **3** (1828), 92–95. *686.*

136 Клаузен Т. (Th. Clausen). „Theorem", *Astronomische Nachrichten* **17** (1840), columns 351–352. *687.*

137 Кнопп К. (Konrad Knopp). *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Julius Springer, Berlin, 1922; second edition, 1924. Воспроизведено Dover, 1945. Fourth edition, 1947; fifth edition, 1964. Английский перевод: *Theory and Application of Infinite Series*, 1928; second edition, 1951. *688.*

138 Кнут Д. Э. (Donald Knuth). „Transcendental numbers based on the Fibonacci sequence", *Fibonacci Quarterly* **2** (1964), 43–44, 52. *597.*

139 Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). *The Art of Computer Programming*, volume 1: *Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley, 1968; third edition, 1997. [Имеется русский перевод первого издания: Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ*, том 1: Основные алгоритмы. — М.: Мир, 1976.] *10, 541, 555, 573, 618, 685, 686, 687, 688.*

140 Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). *The Art of Computer Programming*, volume 2: *Seminumerical Algorithms.* Addison-Wesley, 1969; third edition, 1997. [Имеется русский перевод первого издания: Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ*, том 2: Получисленные алгоритмы. — М.: Мир, 1977.] *133, 134, 153, 541, 685, 686, 687, 688.*

141 Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). *The Art of Computer Programming*, volume 3: *Sorting and Searching.* Addison-Wesley, 1973; second edition, 1998. [Имеется русский перевод первого издания: Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ*, том 3: Сортировка и поиск. — М.: Мир, 1978.] *297, 448, 542, 686, 687, 688.*

142 Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Problem E 2492: Some sum", *American Mathematical Monthly* **82** (1975), 855. *686.*

143 Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires.* Les Presses de l'Université de Montréal, 1976. Переработанное и исправленное издание, 1980. Английский перевод, 1997. *688.*

685. **144** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). *The TEXbook.* Addison-Wesley, 1984. Воспроизведено как volume A, *Computers & Typesetting*, 1986. [Имеется русский перевод: Кнут Д. Э. Всё про TEX. — Протвино: АО RDTEX, 1993.]

608. **145** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „An analysis of optimum caching", *Journal of Algorithms* **6** (1985), 181–199.

685. **146** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). *Computers & Typesetting*, volume D: *METAFONT: The Program.* Addison-Wesley, 1986.

685. **147** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Problem 1280: Floor function identity", *Mathematics Magazine* **61** (1988), 319–320.

685. **148** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Problem E 3106: A new sum for n^2", *American Mathematical Monthly* **94** (1987), 795–797.

687. **149** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Fibonacci multiplication", *Applied Mathematics Letters* **1** (1988), 57–60.

605. **150** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „A Fibonacci-like sequence of composite numbers", *Mathematics Magazine* **63** (1990), 21–25.

686. **151** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Problem E 3309: A binomial coefficient inequality", *American Mathematical Monthly* **97** (1990), 614.

42, 188, 297, 645. **152** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Two notes on notation", *American Mathematical Monthly* **99** (1992), 403–422.

297, 611, 687. **153** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Convolution polynomials", *The Mathematica Journal* **2**,4 (Fall 1992), 67–78.

319. **154** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Johann Faulhaber and sums of powers", *Mathematics of Computation* **61** (1993), 277–294.

224. **155** Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth). „Bracket notation for the coefficient-of operator", в *A Classical Mind*, essays in honour of C. A. R. Hoare, edited by A. W. Roscoe, Prentice-Hall, 1994, 247–258.

599. **156** Кнут Д. Э., Букгольц Т. (Donald E. Knuth and Thomas J. Buckholtz). „Computation of Tangent, Euler, and Bernoulli numbers", *Mathematics of Computation* **21** (1967), 663–688.

688. **157** Кнут Д. Э., Варди И. (Donald E. Knuth and Ilan Vardi). „Problem 6581: The asymptotic expansion of the middle binomial coefficient", *American Mathematical Monthly* **97** (1990), 626–630.

572, 687. **158** Кнут Д. Э., Вильф Г. С. (Donald E. Knuth and Herbert S. Wilf). „The power of a prime that divides a generalized binomial coefficient", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **396** (1989), 212–219.

12. **159** Кнут Д. Э., Цапф Г. (Donald E. Knuth and Hermann Zapf). „AMS Euler— A new typeface for mathematics", *Scholarly Publishing* **20** (1989), 131–157.

160 Коллингвуд С. Д. (Stuart Dodgson Collingwood). *The Lewis Carroll Picture Book.* T. Fisher Unwin, 1899. Воспроизведено Dover в 1961 г. под новым названием *Diversions and Digressions of Lewis Carroll.* *325.*

161 Комте Л. (Louis Comtet). *Advanced Combinatorics.* Dordrecht, Reidel, 1974. *688.*

162 Конан-Дойль А. (A. Conan Doyle). „The sign of the four; or, The problem of the Sholtos", *Lippincott's Monthly Magazine* (Philadelphia) **45** (1890), 147–223. [Имеется русский перевод: Конан Дойль А. „Знак четырех". *Собрание сочинений*, том 1. — М.: Правда, 1966, 151–264.] *258, 442.*

163 Конан-Дойль А. (A. Conan Doyle). „The adventure of the final problem", *The Strand Magazine* **6** (1893), 558–570. [Имеется русский перевод: Конан Дойль А. „Последнее дело Холмса". *Собрание сочинений*, том 2. — М.: Правда, 1966, 221–240.] *187.*

164 Конвей Дж. Х., Грэхем Р. Л. (J. H. Conway and R. L. Graham). „Problem E 2567: A periodic recurrence", *American Mathematical Monthly* **84** (1977), 570–571. *541.*

165 Коши О.-Л. (Augustin-Louis Cauchy). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique.* Imprimerie Royale, Paris, 1821. Воспроизведено в его *Œuvres Complètes*, series 2, volume 3. [Имеется русский перевод: Коши О.-Л. *Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении.* — Спб: Имп. Академия наук, 1831.] *685.*

166 Крамер Г. (Harald Cramér). „On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers", *Acta Arithmetica* **2** (1937), 23–46. *567, 686.*

167 Крамп К. (C. Kramp). *Élémens d'arithmétique universelle.* Cologne, 1808. *135.*

168 Крелль А. Л. (A. L. Crelle). „Démonstration élémentaire du théorème de Wilson généralisé", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **20** (1840), 29–56. *685.*

169 Кроу Д. У. (D. W. Crowe). „The n-dimensional cube and the Tower of Hanoi", *American Mathematical Monthly* **63** (1956), 29–30. *685.*

170 Куммер Э. Э. (E. E. Kummer). „Über die hypergeometrische Reihe *242, 686.*

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots\text{“};$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik **15** (1836), 39–83, 127–172. Воспроизведено в его *Collected Papers*, volume 2, 75–166.

686. **171** Куммер Э. Э. (E. E. Kummer). „Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **44** (1852), 93–146. Воспроизведено в его *Collected Papers*, volume 1, 485–538.

541. **172** Куршан Р. П., Гопинат Б. (R. P. Kurshan and B. Gopinath). „Recursively generated periodic sequences", *Canadian Journal of Mathematics* **26** (1974), 1356–1371.

649, 688. **173** Кэнфилд Э. Р. (E. Rodney Canfield). „On the location of the maximum Stirling number(s) of the second kind", *Studies in Applied Mathematics* **59** (1978), 83–93.

49, 93, 249. **174** Кэррол Л. (Lewis Carroll [C. L. Dodgson]). *Through the Looking Glass and What Alice Found There.* Macmillan, 1871. [Имеется русский перевод: Кэрролл Л. *Приключения Алисы в Стране чудес. Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье.* — М.: Наука, 1979.]

325. **175*** Кэррол Л. *История с узелками.* — М.: Мир, 1973.

687. **176** Лагранж Ж. Л. (de la Grange [Lagrange]). „Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin (1771), 125–137. Воспроизведено в его *Œuvres*, volume 3, 425–438.

510. **177** Лагранж Ж. Л. (de la Grange [Lagrange]). „Sur une nouvelle espèce de calcul rélatif à la différentiation & à l'intégration des quantités variables", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin (1772), 185–221. Воспроизведено в его *Œuvres*, volume 3, 441–476. [См. также: Тюлина И. А. *Жозеф Луи Лагранж.* — М., Наука, 1977.]

228. **178** Ламберт И. Г. (I. H. Lambert). „Observationes variæ in Mathesin puram", *Acta Helvetica* **3** (1758), 128–168. Воспроизведено в его *Opera Mathematica*, volume 1, 16–51.

228. **179** Ламберт И. Г. (Lambert). „Observations analytiques", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin (1770), 225–244. Воспроизведено в его *Opera Mathematica*, volume 2, 270–290.

487, 688. **180** Ландау Э. (Edmund Landau). *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, two volumes. Teubner, Leipzig, 1909.

686. **181** Ландау Э. (Edmund Landau). *Vorlesungen über Zahlentheorie*, three volumes. Hirzel, Leipzig, 1927.

126. **182*** Ландау Э. *Основы анализа.* — М.: ИЛ, 1947.

336. **183** Ланьи Т. Ф., де (Thomas Fantet de Lagny). *Analyse générale ou Méthodes nouvelles pour résoudre les problèmes de tous les genres et de tous les degrés à l'infini.* Опубликовано в *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, volume 11, Paris, 1733.

184 Лаплас P. C. (P. S. de la Place [Laplace]). „Mémoire sur les approximations des Formules qui sont fonctions de très-grands nombres“, *Mémoires de l'Academie royale des Sciences de Paris* (1782), 1–88. Воспроизведено в его *Œuvres Complètes* **10**, 207–291. *505.*

185 Лах И. (I. Lah). „Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik“, *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik* **7** (1955), 203–212. *686.*

186 Лежандр А.-М. (Adrien-Marie Legendre). *Essai sur la Théorie des Nombres.* Paris, 1798; second edition, 1808. Third edition (новое название *Théorie des Nombres*, in two volumes), 1830; fourth edition, Blanchard, 1955. *685.*

187 Лейбниц Г. В. (G. W. Leibniz). Letter to Johann Bernoulli (May 1695), в *Leibnizens mathematische Schriften*, volume 3, 174–179. [См. также: Погребысский И. Б. *Лейбниц.* — М.: Наука, 1971.] *194.*

188 Леккеркеркер К. Г. (C. G. Lekkerkerker). „Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci“, *Simon Stevin* **29** (1952), 190–195. *327.*

189 Лемер Д. Х. (D. H. Lehmer). „Tests for primality by the converse of Fermat's theorem“, *Bulletin of the American Mathematical Society*, series 2, **33** (1927), 327–340. Воспроизведено в его *Selected Papers*, volume 1, 69–82. *685.*

190 Лемер Д. Х. (D. H. Lehmer). „On Stern's diatomic series“, *American Mathematical Monthly* **36** (1929), 59–67. *687.*

191 Лемер Д. Х. (D. H. Lehmer). „On Euler's totient function“, *Bulletin of the American Mathematical Society*, series 2, **38** (1932), 745–751. Воспроизведено в его *Selected Papers*, volume 1, 319–325. *568.*

192 Ленжиель Т. (Tamás Lengyel). „A combinatorial identity and the world series“, *SIAM Review* **35** (1993), 294–297. *193.*

193 Ленжиель Т. (Tamás Lengyel). „On some properties of the series $\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k$ and the Stirling numbers of the second kind“, *Discrete Mathematics* **150** (1996), 281–292. *687.*

194 Ли Сянь-Лянь (Li Shan-Lan). *Duò Jī Bǐ Lèi* [Sums of Piles Obtained Inductively]. В его *Zégǔxī Zhaī Suànxué* [Classically Inspired Meditations on Mathematics], Nanjing, 1867. *299.*

195 Либ Э. Х. (Elliott H. Lieb). „Residual entropy of square ice“, *Physical Review* **162** (1967), 162–172. *688.*

196 Линесс Р. К. (R. C. Lyness). „Cycles“, *The Mathematical Gazette* **29** (1945), 231–233. *541.*

197 Линесс Р. К. (R. C. Lyness). „Cycles“, *The Mathematical Gazette* **45** (1961), 207–209. *541.*

198* Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* — М.: Наука, 1973.

161. **199** Лиувилль Ж. (J. Liouville). „Sur l'expression $\varphi(n)$, qui marque combien la suite 1, 2, 3, ..., n contient de nombres premiers à n", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, series 2, **2** (1857), 110–112.

685. **200** Логан Б. Ф. (B. F. Logan). „The recovery of orthogonal polynomials from a sum of squares", *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **21** (1990), 1031–1050.

687. **201** Логан Б. Ф. (B. F. Logan). „Polynomials related to the Stirling numbers", AT&T Bell Laboratories internal technical memorandum, August 10, 1987.

604. **202** Лойд С. (Sam Loyd). *Cyclopedia of Puzzles.* Franklin Bigelow Corporation, Morningside Press, New York, 1914.

604. **203*** Лойд С. *Математическая мозаика.* — М.: Мир, 1980.

686. **204** Лонг К. Г., Хоггат Э., мл. (Calvin T. Long and Verner E. Hoggatt, Jr.). „Sets of binomial coefficients with equal products", *Fibonacci Quarterly* **12** (1974), 71–79.

567. **205** Лу С., Яо К. (Shituo Lou and Qi Yao). „A Chebychev's type of prime number theorem in a short interval-II", *Hardy-Ramanujan Journal* **15** (1992), 1–33.

685, 686. **206** Люка Э. (E. Lucas). „Sur les rapports qui existent entre la théorie des nombres et le Calcul intégral", *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* (Paris) **82** (1876), 1303–1305.

686. **207** Люка Э. (Édouard Lucas). „Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier", *Bulletin de la Société mathématique de France* **6** (1877), 49–54.

324, 686. **208** Люка Э. (Édouard Lucas). *Théorie des Nombres*, volume 1. Paris, 1891.

17. **209** Люка Э. (Édouard Lucas). *Récréations mathématiques*, four volumes. Gauthier-Villars, Paris, 1891–1894. Воспроизведено в Albert Blanchard, Paris, 1960. (Ханойская башня обсуждается в томе 3, сс. 55–59.) [На русском языке см.: Люка Э. *Математические развлечения.* — Спб.: 1883.]

687. **210** Майерс Б. Р. (B. R. Myers). „Problem 5795: The spanning trees of an n-wheel", *American Mathematical Monthly* **79** (1972), 914–915.

509. **211** Мак-Лорен К. (Colin MacLaurin). *Collected Letters*, edited by Stella Mills. Shiva Publishing, Nantwich, Cheshire, 1982.

164. **212** Мак-Магон П. А. (P. A. MacMahon). „Application of a theory of permutations in circular procession to the theory of numbers", *Proceedings of the London Mathematical Society* **23** (1892), 305–313.

213 Марцлофф Ж.-К. (J.-C. Martzloff). *Histoire des Mathématiques Chinoises.* Paris, 1988. Английский перевод: Springer-Verlag, 1997. *299.*

214 Матиясевич Ю. В. „Диофантовость перечислимых множеств", Доклады АН СССР 191 (1970), 279-282. Английский перевод с дополнениями автора: „Enumerable sets are diophantine", *Soviet Mathematics* **11** (1970), 354–357. *326, 686.*

215 Мёбиус А. Ф. (A. F. Möbius). „Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **9** (1832), 105–123. Воспроизведено в его *Gesammelte Werke*, volume 4, 589–612. *163.*

216 Мелзяк З. А. (Z. A. Melzak). *Companion to Concrete Mathematics.* Volume 1, *Mathematical Techniques and Various Applications*, Wiley, 1973; volume 2, *Mathematical Ideas, Modeling & Applications*, Wiley, 1976. *9.*

217 Мендельсон Н. С. (N. S. Mendelsohn). „Problem E 2227: Divisors of binomial coefficients", *American Mathematical Monthly* **78** (1971), 201. *686.*

218 Мерсенн М. (Marini Mersenni). *Cogitata Physico-Mathematica.* Paris, 1644. *133.*

219 Мертенс Ф. (F. Mertens). „Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **77** (1874), 289–338. *164.*

220 Мертенс Ф. (F. Mertens). „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **78** (1874), 46–62. *41.*

221 Меснер А. (A. Moessner). „Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen", *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 1951, Heft 3, 29. *687.*

222 Милс У. Х. (W. H. Mills). „A prime representing function", *Bulletin of the American Mathematical Society*, series 2, **53** (1947), 604. *685.*

223 Мозер Л. (Leo Moser). „Problem B-6: Some reflections", *Fibonacci Quarterly* **1**, 4 (1963), 75–76. *323.*

224 Монтгомери Х. Л. (Hugh L. Montgomery). „Fluctuations in the mean of Euler's phi function", *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, Mathematical Sciences, **97** (1987), 239–245. *502.*

225 Монтгомери П. Л. (Peter L. Montgomery). „Problem E 2686: LCM of binomial coefficients", *American Mathematical Monthly* **86** (1979), 131. *686.*

226 Моцкин Т. С., Штраус Э. Г. (T. S. Motzkin and E. G. Straus). „Some combinatorial extremum problems", *Proceedings of the American Mathematical Society* **7** (1956), 1014–1021. *608.*

685. **227** Найвен И. (Ivan Niven). *Diophantine Approximations.* Interscience, 1963.

365. **228** Найвен И. (Ivan Niven). „Formal power series“, *American Mathematical Monthly* **76** (1969), 871–889.

230. **229** Нобель Р. А. (R. Arthur Knoebel). „Exponentials reiterated“, *American Mathematical Monthly* **88** (1981), 235–252.

307. **230** Ньютон И. (Isaac Newton). Letter to John Collins (18 February 1670), в *The Correspondence of Isaac Newton*, volume 1, 27. Отрывки помещены в *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, volume 3, 563. [Русский перевод части писем см. в: Ньютон И. *Математические работы.* — М.–Л.: ОНТИ, 1937; упомянутого письма там нет.]

104. **231** Одлыжко Э. М., Вильф Г. С. (Andrew M. Odlyzko and Herbert S. Wilf). „Functional iteration and the Josephus problem“, *Glasgow Mathematical Journal* **33** (1991), 235–240.

685. **232** Паскаль Б. (Blaise Pascal). „De numeris multiplicibus“, представлено в Académie Parisienne в 1654 г. и опубликовано вместе с его *Traité du triangle arithmétique* [233]. Воспроизведено в *Œuvres de Blaise Pascal*, volume 3, 314–339.

180, 181, 669. **233** Паскаль Б. (Blaise Pascal). „Traité du triangle arithmetique“, в его *Traité du Triangle Arithmetique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere*, Paris, 1665. Воспроизведено в *Œuvres de Blaise Pascal* (Hachette, 1904–1914), volume 3, 445–503; латинские издания от 1654 г. в volume 11, 366–390. [О математических работах Паскаля Б., в том числе о его „Трактате об арифметическом треугольнике“, см.: Кляус У. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. *Паскаль.* — М.: Наука, 1971.]

446. **234** Пенни У. (Walter Penney). „Problem 95: Penney-Ante“, *Journal of Recreational Mathematics* **7** (1974), 321.

687. **235** Перкус Дж. К. (J. K. Percus), *Combinatorial Methods.* Springer-Verlag, 1971.

259, 620, 686. **236** Петковшек М. (Marko Petkovšek). „Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients“, *Journal of Symbolic Computation* **14** (1992), 243–264.

686. **237** Пирс Ч. С. (C. S. Peirce). Letter to E. S. Holden (January 1901). Воспроизведено в *The New Elements of Mathematics*, edited by Carolyn Eisele, Mouton, The Hague, 1976, volume 1, 247–253. (см. также с. 211.)

567. **238** Пирс Ч. С. (C. S. Peirce). Letter to Henry B. Fine (17 July 1903). Воспроизведено в *The New Elements of Mathematics*, edited by Carolyn Eisele, Mouton, The Hague, 1976, volume 3, 781–784. (См. также „Ordinals“, неопубликованная рукопись приблизительно 1905 г., в *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, volume 4, 268–280.)

239* Пойа Д. *Как решить задачу.* — М.: Учпедгиз, 1961. *34, 63.*

240* Пойа Д. *Математическое открытие.* — М.: Наука, 1970. *36, 207.*

241 Пойа Д. (G. Pólya). „Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen", *Acta Mathematica* **68** (1937), 145–254. Английский перевод с комментариями Р. Рида (Ronald C. Read): *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, 1987. *687.*

242 Пойа Д. (George Pólya). *Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton University Press, 1954. [Имеются два издания русского перевода: Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* — М.: ИЛ, 1957; М.: Наука, 1975.] *9, 21, 33, 224, 550, 685.*

243 Пойа Д. (G. Pólya). „On picture-writing", *American Mathematical Monthly* **63** (1956), 689–697. *361, 687.*

244 Пойа Д., Сегё Д. (G. Pólya and G. Szegö). *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, two volumes. Julius Springer, Berlin, 1925; fourth edition, 1970 и 1971. Английский перевод: *Problems and Theorems in Analysis*, 1972 и 1976. [Имеются несколько изданий русского перевода: Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*, в 2-х томах. — М.: Наука, 1937-1938; 1956; 1978.] *83, 688.*

245 Похгаммер Л. (L. Pochhammer). „Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **71** (1870), 316–352. *68.*

246* *Проблемы Гильберта.* — М.: Наука, 1969. *326.*

247 Пуанкаре А. (H. Poincaré). „Sur les fonctions à espaces lacunaires", *American Journal of Mathematics* **14** (1892), 201–221. *688.*

248 Пуассон С. Д. (S. D. Poisson). „Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, series 2, **6** (1823), 571–602. *510.*

249 Пфафф И. Ф. (J. F. Pfaff). „Observationes analyticæ ad *L. Euleri* institutiones calculi integralis, Vol. IV, Supplem. II & IV", *Nova acta academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **11**, Histoire section, 37–57. (В этом томе, опубликованном в 1798 г., большинство работ относятся к 1793 г., хотя статья Пфаффа на самом деле была написана в 1797 г.) [Об этой статье И.Ф. Пфаффа см.: Ожигова Е. П. *Математика в Петербургской академии наук.* — М.: Наука, 1980.] *235, 246, 686.*

250 Пэтил Г. П. (G. P. Patil). „On the evaluation of the negative binomial distribution with examples", *Technometrics* **2** (1960), 501–505. *687.*

251 Радо Р. (R. Rado). „A note on the Bernoullian numbers", *Journal of the London Mathematical Society* **9** (1934), 88–90. *687.*

685. **252** Райт Э. М. (E. M. Wright). „A prime-representing function", *American Mathematical Monthly* **58** (1951), 616–618; список опечаток см, в **59** (1952), 99.

686. **253** Рам Ж., де (Georges de Rham). „Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane", *Elemente der Mathematik* **2** (1947), 73–76, 89–97. Воспроизведено в его *Œuvres Mathématiques*, 678–689.

685. **254** Рао Д. Р. (D. Rameswar Rao). „Problem E 2208: A divisibility problem", *American Mathematical Monthly* **78** (1971), 78–79.

571. **255** Рейнвиль Э. Д. (Earl D. Rainville). „The contiguous function relations for ${}_pF_q$ with applications to Bateman's $J_n^{u,\nu}$ and Rice's $H_n(\zeta, p, \nu)$", *Bulletin of the American Mathematical Society*, series 2, **51** (1945), 714–723.

688. **256** Рейч С. (Simeon Reich). „Problem 6056: Truncated exponential-type series", *American Mathematical Monthly* **84** (1977), 494–495.

484. **257** Рекорд Р. (Robert Recorde). *The Whetstone of Witte.* London, 1557.

686. **258** Рёдсет Э. (Øystein Rødseth). „Problem E 2273: Telescoping Vandermonde convolutions", *American Mathematical Monthly* **79** (1972), 88–89.

599, 686. **259** Рибенбойм П. (Paulo Ribenboim). *13 Lectures on Fermat's Last Theorem.* Springer-Verlag, 1979. [На русском языке см. также: Эдвардс Г. *Последняя теорема Ферма.* — М.: Мир, 1980.]

685. **260** Риман Б. (Bernhard Riemann). „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", Habilitationsschrift, Göttingen, 1854. Опубликовано в *Abhandlungen der mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13** (1868), 87–132. Воспроизведено в его *Gesammelte Mathematische Werke*, 227–264. [Имеются русские переводы: Бернштейн С. Н. (ред.) *Разложенiе функцiй в тригонометрическiе ряды.* — Харьков: Харьковское математическое общество, 1914, 25–90; Риман Б. *Сочинения.* — М.–Л.: ГИТТЛ, 1948, 225–261.]

685. **261** Робертс С. (Samuel Roberts). „On the figures formed by the intercepts of a system of straight lines in a plane, and on analogous relations in space of three dimensions", *Proceedings of the London Mathematical Society* **19** (1889), 405–422.

686. **262** Рой Р. (Ranjan Roy). „Binomial identities and hypergeometric series", *American Mathematical Monthly* **94** (1987), 36–46.

134. **263** Россер Дж. Б., Шёнфельд Л. (J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld). „Approximate formulas for some functions of prime numbers", *Illinois Journal of Mathematics* **6** (1962), 64–94.

264 Рота Г.-К. (Gian-Carlo Rota). „On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions“, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **2** (1964), 340–368. *557.*

265 Рэни Дж. Н. (George N. Raney). „Functional composition patterns and power series reversion“, *Transactions of the American Mathematical Society* **94** (1960), 441–451. *394, 687.*

266 Салтыков А. И. „О функции Эйлера“, *Вестник Московского государственного университета*, серия 1, Математика, механика (1960), № 6, 34–50. *502.*

267 Сегеди М. (M. Szegedy). „The solution of Graham's greatest common divisor problem“, *Combinatorica* **6** (1986), 67–71. *567.*

268 Седлачек Й. (J. Sedláček). „On the skeletons of a graph or digraph“, в *Combinatorial Structures and their Applications*, Gordon and Breach, 1970, 387–391. (В этом томе представлены труды конференции Calgary International Conference on Combinatorial Structures and their Applications, 1969.) *687.*

269 Серпински В. (W. Sierpiński). „Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme“, *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres* (Cracovie), series A (1910), 9–11. *110.*

270 Серпински В. (W. Sierpiński). „Sur les nombres dont la somme de diviseurs est une puissance du nombre 2“, *Calcutta Mathematical Society Golden Jubilee Commemorative Volume* (1958–1959), part 1, 7–9. *685.*

271 Серпински В. (Wacław Sierpiński). *A Selection of Problems in the Theory of Numbers.* Macmillan, 1964. [На русском языке см.: Серпински В. *250 задач по элементарной теории чисел.* — М.: Просвещение, 1968.] *686.*

272* Серпинский В. *Сто вопросов арифметики.* — М.: Госучпедиздат, 1961. *551.*

273 Силвестер Дж. Дж. (J. J. Sylvester). „Problem 6919“, *Mathematical Questions with their Solutions from the 'Educational Times'* **37** (1882), 42–43, 80. *685.*

274 Силвестер Дж. Дж. (J. J. Sylvester). „On the number of fractions contained in any 'Farey series' of which the limiting number is given“, *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, series 5, **15** (1883), 251–257. Воспроизведено в его *Collected Mathematical Papers*, volume 4, 101–109. *157.*

275 Скорер Р. С., Гранди П. М., Смит К. А. Б. (R. S. Scorer, P. M. Grundy, and C. A. B. Smith). „Some binary games“, *The Mathematical Gazette* **28** (1944), 96–103. *685.*

61, 376, 503. **276** Слоан Н. Дж. А. (N. J. A. Sloane). *A Handbook of Integer Sequences.* Academic Press, 1973. Sequel, with Simon Plouffe, *The Encyclopedia of Integer Sequences*, Academic Press, 1995. http://www.research.att.com/~njas/sequences.

235. **277** Сойер У. У. (W. W. Sawyer). *Prelude to Mathematics.* Baltimore, Penguin, 1955. [Имеются два издания русского перевода: Сойер У. У. *Прелюдия к математике.* — М.: Просвещение, 1965; 1972.]

445. **278** Соловьев А. Д. „Одно комбинаторное тождество и его применение к задаче о первом наступлении редкого события", *Теория вероятностей и ее применения,* **11** (1966), 313–320. Английский перевод: „A combinatorial identity and its application to the problem concerning the first occurrence of a rare event", *Theory of Probability and its Applications* **11** (1966), 276–282.

8. **279** Спон У. Г., мл. (William G. Spohn, Jr.). „Can mathematics be saved?" *Notices of the American Mathematical Society* **16** (1969), 890–894.

687. **280** Стенли Р. П. (Richard P. Stanley). „Differentiably finite power series", *European Journal of Combinatorics* **1** (1980), 175–188.

687. **281** Стенли Р. П. (Richard P. Stanley). „On dimer coverings of rectangles of fixed width", *Discrete Applied Mathematics* **12** (1985), 81–87.

577, 687, 688. **282** Стенли Р. П. (Richard P. Stanley). *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Wadsworth & Brooks/Cole, 1986. [Имеется русский перевод: Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика.* — М.: Мир, 1990.]

148. **283** Стил Г., Вудс Р., Финкель Р. А., Криспин М. Р., Столман Р. М., Гудфеллоу Дж. С. (Guy L. Steele Jr., Donald R. Woods, Raphael A. Finkel, Mark R. Crispin, Richard M. Stallman, and Geoffrey S. Goodfellow). *The Hacker's Dictionary: A Guide to the World of Computer Wizards.* Harper & Row, 1983.

648. **284** Стилтьес Т. Дж. (T. J. Stieltjes). Letters to Hermite (June 1885), в *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, volume 1, 146–159.

685. **285** Стилтьес Т. Дж. (T. J. Stieltjes). „Table des valeurs des sommes $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$", *Acta Mathematica* **10** (1887), 299–302. Воспроизведено в *Œuvres Complètes*, volume 2, 100–103.

219, 288, 329. **286** Стирлинг Дж. (James Stirling). *Methodus Differentialis.* London, 1730. Английский перевод: *The Differential Method*, 1749.

99. **287** Стретт Дж. В. (John William Strutt). Third Baron Rayleigh, *The Theory of Sound.* First edition, 1877; second edition,

1894. (Цитируемый материал относительно иррационального спектра взят из разд. 92a второго издания.) [Имеется русский перевод: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). *Теория звука*, в 2-х томах. — М.: Гостехиздат, 1955.]

288* Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики*. — М.: Наука, 1978. *118, 158.*

289 Су Л. К. (L. C. Hsu). „Note on a combinatorial algebraic identity and its application", *Fibonacci Quarterly* **11** (1973), 480–484. *686.*

290 Суини Д. У. (Dura W. Sweeney). „On the computation of Euler's constant", *Mathematics of Computation* **17** (1963), 170–178. *521.*

291 Танни С. (S. Tanny). „A probabilistic interpretation of Eulerian numbers", *Duke Mathematical Journal* **40** (1973), 717–722. *687.*

292 Тейзингер Л. (L. Theisinger). „Bemerkung über die harmonische Reihe", *Monatshefte für Mathematik und Physik* **26** (1915), 132–134. *686.*

293 Тиеле Т. Н. (T. N. Thiele). *The Theory of Observations*. Charles & Edwin Layton, London, 1903. Воспроизведено в *The Annals of Mathematical Statistics* **2** (1931), 165–308. *435, 436.*

294 Титчмарш Е. К. (E. C. Titchmarsh). *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Clarendon Press, Oxford, 1951; second edition, revised by D. R. Heath-Brown, 1986. [Имеется русский перевод: Титчмарш Е. К. *Теория дзета-функции Римана*. — М.: ИЛ, 1953.] *688.*

295 Трикоми Ф. Г., Эрдейи А. (F. G. Tricomi and A. Erdélyi). „The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions", *Pacific Journal of Mathematics* **1** (1951), 133–142. *688.*

296* *Труды по теории чисел*. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. *133.*

297* Уайтхед А. Н. *Введение в математику*. — Петроград (Пгд): 1916. *77.*

298 Уайтхед А. Н. (Alfred North Whitehead). *An Introduction to Mathematics*. London and New York, 1911. *544.*

299 Уайтхед А. Н. (Alfred North Whitehead). „Technical education and its relation to science and literature", chapter 2 в *The Organization of Thought, Educational and Scientific*, London and New York, 1917. Воспроизведено как глава 4 в *The Aims of Education and Other Essays*, New York, 1929. [Имеется русский перевод: Уайтхэдъ А. Н. *Введение въ математику*. — Петроград: Физика, 1916.] *114.*

300 Уайтхед А. Н. (Alfred North Whitehead). *Science and the Modern World*. New York, 1925. Глава 2 воспроизведена в *The World of Mathematics*, edited by James R. Newman, 1956, volume 1, 402–416. *650.*

325. **301** Уивер У. (Warren Weaver). „Lewis Carroll and a geometrical paradox“, *American Mathematical Monthly* **45** (1938), 234–236. [См. также задачу 339 в [121*].]

685. **302** Уильямс Х. К., Дюбнер Х. (H. C. Williams and Harvey Dubner). „The primality of R1031“, *Mathematics of Computation* **47** (1986), 703–711.

686. **303** Уиппл Ф. Дж. У. (F. J. W. Whipple). „Some transformations of generalized hypergeometric series“, *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2, **26** (1927), 257–272.

311. **304** Унгар П. (Peter Ungar). „Problem E 3052: A sum involving Stirling numbers“, *American Mathematical Monthly* **94** (1987), 185–186.

686. **305** Уоллис Дж. (John Wallis). *A Treatise of Angular Sections.* Oxford, 1684.

687. **306** Уоринг Э. (Edward Waring). *Meditationes Algebraïcæ.* Cambridge, 1770; third edition, 1782.

687. **307** Уотерхауз У. К. (William C. Waterhouse). „Problem E 3117: Even odder than we thought“, *American Mathematical Monthly* **94** (1987), 691–692.

685. **308** Успенский Я. В. (J. V. Uspensky). „On a problem arising out of the theory of a certain game“, *American Mathematical Monthly* **34** (1927), 516–521.

319. **309** Фаулхабер И. (Johann Faulhabern). *Academia Algebræ*, Darinnen die miraculosische Inventiones zu den höchsten Cossen weiters *continuirt* und *profitiert* werden, ... biß auff die regulierte *Zensicubiccubic* Coß durch offnen Truck *publiciert* worden. Augsburg, 1631.

418, 688. **310** Феллер У. (William Feller). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. Wiley, 1950; second edition, 1957; third edition, 1968. [Имеется перевод третьего издания: Феллер У. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, том 1. — М.: Мир, 1984.]

156. **311** Ферма П., де (Pierre de Fermat). Letter to Marin Mersenne (25 December 1640), в *Œuvres de Fermat*, volume 2, 212–217. [См. также: Correspondance du P. Marin Mersenne, Paris, CNRS, 1960. Одно из писем П. Ферма преподобному М. Мерсенну (июнь 1638 г.) помещено в книге: Декарт Р. *Геометрия.* — М.–Л.: ГТТИ, 1938, 170–181]

685, 686. **312** Фибоначчи Л. (Leonardo Fibonacci [Pisano]). *Liber Abaci.* First edition, 1202 (now lost); second edition, 1228. Воспроизведено в *Scritti di Leonardo Pisano*, edited by Baldassarre Boncompagni, 1857, volume 1.

43. **313** Финетти Б., де (Bruno de Finetti). *Teoria delle Probabilità.* Turin, 1970. Английский перевод: *Theory of Probability*, Wiley, 1974–1975.

314 Фишер М. Э. (Michael E. Fisher). „Statistical mechanics of dimers on a plane lattice", *Physical Review* **124** (1961), 1664–1672. *687.*

315 Фишер Р. А. (R. A. Fisher). „Moments and product moments of sampling distributions", *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2, **30** (1929), 199–238. *687.*

316 Форкадель П. (Pierre Forcadel). *L'arithmeticque.* Paris, 1557. *686.*

317 Франческа П., делла (Piero della Francesca). *Libellus de quinque corporibus regularibus.* Vatican Library, manuscript Urbinas 632. Переведено на итальянский Лукой Пачоли: Pacioli's *Diuine Proportione*, Venice, part 3, 1509. [Об этой работе и книге Луки Пачоли см.: Юшкевич А. П. (ред.) *История математики*, том 1. — М.: Наука, 1970.] *686.*

318 Фредмен М. Л. (Michael Lawrence Fredman). *Growth Properties of a Class of Recursively Defined Functions.* Ph.D. thesis, Stanford University, Computer Science Department, 1972. *555.*

319 Фрейзер У. Д., Мак-Келлар А. Ц. (W. D. Frazer and A. C. McKellar). „Samplesort: A sampling approach to minimal storage tree sorting", *Journal of the Association for Computing Machinery* **27** (1970), 496–507. *686.*

320 Фрейм Дж. С., Стюарт Б. М., Данкель О. (J. S. Frame, B. M. Stewart, and Otto Dunkel). „Partial solution to problem 3918", *American Mathematical Monthly* **48** (1941), 216–219. [См. также [121*].] *685.*

321 Фрейнел Дж. (J. Franel). Solutions to questions 42 and 170, в L'*Intermédiaire des Mathématiciens* **1** (1894), 45–47; **2** (1895), 33–35. *592.*

322 Френкель А. С. (Aviezri S. Fraenkel). „Complementing and exactly covering sequences", *Journal of Combinatorial Theory*, series A, **14** (1973), 8–20. *556, 685.*

323 Френкель А. С. (Aviezri S. Fraenkel). „How to beat your Wythoff games' opponent on three fronts", *American Mathematical Monthly* **89** (1982), 353–361. *607.*

324 Фурье Ж. (J. Fourier). „Refroidissement séculaire du globe terrestre", *Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris*, series 3, **7** (1820), 58–70. Воспроизведено в *Œuvres de Fourier*, volume 2, 271–288. *40.*

325 Фусс Н. И. (Nikolao Fuss). „Solutio quæstionis, quot modis polygonum n laterum in polygona m laterum, per diagonales resolvi quæat", *Nova acta academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **9** (1791), 243–251. [Об этой и других работах Н. И. Фусса в области полигонометрии см.: Лысенко В. И. *Николай Иванович Фусс.* — М.: Наука, 1975.] *396.*

567. **326** Хаймович М., Фрейман Г., Шонхейм Й. (M. Chaimovich, G. Freiman, and J. Schönheim). „On exceptions to Szegedy's theorem“, *Acta Arithmetica* **49** (1987), 107–112.

9, 15. **327** Халмош П. Р. (P. R. Halmos). „How to write mathematics“, *L'Enseignement mathématique* **16** (1970), 123–152. Воспроизведено в *How to Write Mathematics*, American Mathematical Society, 1973, 19–48. [Имеется русский перевод: Халмош П. Р. „Как писать математические тексты“, *Успехи математических наук*, **26** (1971), 243–269.]

8. **328** Халмош П. Р. (Paul R. Halmos). *I Want to Be a Mathematician: An Automathography*. Springer-Verlag, 1985. Воспроизведено в Mathematical Association of America, 1988.

337. **329** Халфен Дж. Х. (G. H. Halphen). „Sur des suites de fractions analogues à la suite de Farey“, *Bulletin de la Société mathématique de France* **5** (1876), 170–175. Воспроизведено в его *Œuvres*, volume 2, 102–107.

8. **330** Хаммерсли Дж. М. (J. M. Hammersley). „On the enfeeblement of mathematical skills by 'Modern Mathematics' and by similar soft intellectual trash in schools and universities“, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* **4**, 4 (October 1968), 66–85.

687. **331** Хаммерсли Дж. М. (J. M. Hammersley). „An undergraduate exercise in manipulation“, *The Mathematical Scientist* **14** (1989), 1–23.

61. **332** Хансен Э. Р. (Eldon R. Hansen). *A Table of Series and Products*. Prentice-Hall, 1975.

480, 688. **333** Харди Г. Х. (G. H. Hardy). *Orders of Infinity: The 'Infinitär-calcül' of Paul du Bois-Reymond*. Cambridge University Press, 1910; second edition, 1924.

687. **334** Харди Г. Х. (G. H. Hardy). „A mathematical theorem about golf“, *The Mathematical Gazette* **29** (1944), 226–227. Воспроизведено в его *Collected Papers*, volume 7, 488.

135, 685. **335** Харди Г. Х., Райт Э. М. (G. H. Hardy and E. M. Wright). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Clarendon Press, Oxford, 1938; fifth edition, 1979.

332, 365, 649, 688. **336** Хенричи П. (Peter Henrici). *Applied and Computational Complex Analysis*. Wiley, volume 1, 1974; volume 2, 1977; volume 3, 1986.

686. **337** Хенричи П. (Peter Henrici). „De Branges' proof of the Bieberbach conjecture: A view from computational analysis“, *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* (1987), 105–121.

686. **338** Хиллман А. П., Хоггат В. Э., мл. (A. P. Hillman and V. E. Hoggatt, Jr.). „A proof of Gould's Pascal hexagon conjecture“, *Fibonacci Quarterly* **10** (1972), 565–568, 598.

339 Хоар К. А. Р. (C. A. R. Hoare). „Quicksort“, *The Computer Journal* **5** (1962), 10–15. [На русском языке см. алгоритм 64б в: Агеев М. И. и др. *Библиотека алгоритмов* 51б–100б. — М.: Советское радио, 1976, 31.] *46.*

340 Холанд И. Й., Кнут Д. Э. (Inger Johanne Håland and Donald E. Knuth). „Polynomials involving the floor function“, *Mathematica Scandinavica* **76** (1995), 194–200. *556, 685.*

341 Холл М., мл. (Marshall Hall, Jr.). *The Theory of Groups.* Macmillan, 1959. [Имеется русский перевод: Холл М. *Теория групп.* — М.: ИЛ, 1962.] *597.*

342 Цеккендорф Э. (E. Zeckendorf). „Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas“, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* **41** (1972), 179–182. *327.*

343 Цирик Я. А. (János A. Csirik). „Optimal strategy for the first player in the Penney ante game“, *Combinatorics, Probability and Computing* **1** (1992), 311–321. *636.*

344 Чебышёв П. Л. (P. L. Chebyshev). „Mémoire sur les nombres premiers“, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **17** (1852), 366–390. Воспроизведено в его *Œuvres*, volume 1, 51–70. [Имеются русские переводы: Чебышев П. Л. „О простых числах“, Сочиненія П. Л. Чебышёва, томъ 1. — Спб: Имп. Академия Наукъ, 1899, 51–70. См. также Чебышёв П. Л. *Полное собрание сочинений*, том 1. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1944, 191–207.] *685.*

345 Чебышёв П. Л. *„О средних величинах“. Математический сборник* **2** (1867), 1–9. Воспроизведено в: Чебышёв П. Л. *Полное собрание сочинений*, том. 2. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1944, 431–437. Французский перевод: „Des valeurs moyennes“, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, series 2, **12** (1867), 177–184; воспроизведено в его *Œuvres*, volume 1, 685–694. *427.*

346 Чебышёв П. Л. „О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах“, *Сообщения и протоколы заседаний математического общества при Императорском" Харьковском" Университете* **4**, 2 (1882), 93–98. Воспроизведено в: Чебышёв П. Л. *Полное собрание сочинений*, том. 3. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1944, 191–207, 128–131. Французский перевод: „Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les mêmes limites“, в его *Œuvres*, volume 2, 716–719. *57.*

347 Чейс А. Б. (Arnold Buffum Chace). *The Rhind Mathematical Papyrus*, volume 1. Mathematical Association of America, 1927. (Работа снабжена великолепным списком литературы египетских математиков, подготовленным Р. Арчибальдом.) *685.*

[О „математическом папирусе Райнда“ см., например: Юшкевич А. П. (ред.) *История математики...*, том 1. — М.: Наука, 1970, 18–20.]

601, 687. **348** Чжун Ф. Р. К., Грэхем Р. Л. (F. R. K. Chung and R. L. Graham). „On the cover polynomial of a digraph“, *Journal of Combinatorial Theory*, series B, **65** (1995), 273–290.

686. **349** Шаллит Дж. О. (J. O. Shallit). „Problem 6450: Two series“, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 513–514.

592. **350** Шаркёзи А. (A. Sárközy). „On divisors of binomial coefficients, I“, *Journal of Number Theory* **20** (1985), 70–80.

303. **351** Шарп Р. Т. (R. T. Sharp). „Problem 52: Overhanging dominoes“, *Pi Mu Epsilon Journal* **1**, 10 (1954), 411–412.

325. **352** Шлёмильх О. (O. Schlömilch). „Ein geometrisches Paradoxon“, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **13** (1868), 162.

687. **353** Шрёдер Э. (Ernst Schröder). „Vier combinatorische Probleme“, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **15** (1870), 361–376.

687. **354** Шрётер Г. (Heinrich Schröter). „Ableitung der Partialbruch- und Produkt-Entwickelungen für die trigonometrischen Funktionen“, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **13** (1868), 254–259.

687. **355** Штаудт К. Г. Ц., фон (K. G. C. von Staudt). „Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **21** (1840), 372–374.

21, 685. **356** Штейнер Я. (J. Steiner). „Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1** (1826), 349–364. Воспроизведено в его *Gesammelte Werke*, volume 1, 77–94. [На русском языке см. также: Штейнер Я. *Геометрические построения.* — М.: Госучпедиздат, 1939.]

140. **357** Штерн М. А. (M. A. Stern). „Ueber eine zahlentheoretische Funktion“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **55** (1858), 193–220.

685. **358** Штикельбергер Л. (L. Stickelberger). „Ueber eine Verallgemeinerung der Kreistheilung“, *Mathematische Annalen* **37** (1890), 321–367.

592, 686. **359** Штрел Ф. (Volker Strehl). „Binomial identities — combinatorial and algorithmic aspects“, *Discrete Mathematics* **136** (1994), 309–346.

131. **360** Эвклид. *ΣΤΟΙΧΕΙΑ*. Старинный манускрипт, впервые напечатан в Базеле в 1533 г. Школьный учебник (на греческом и латинском) в 5-ти томах Гейберга (J. L. Heiberg). Teubner, Leipzig, 1883–1888. [Имеется русский перевод: *Начала Евклида*, книги I–VI, VII–X, XI–XV. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948–1950.]

361 Эдвардс А. У. Ф. (A. W. F. Edwards). *Pascal's Arithmetical Triangle.* Oxford University Press, 1987. [На русском языке см. также: Успенский В. А. *Треугольник Паскаля.* — М.: Наука, 1966.] *180.*

362 Эйзенштейн Г. (G. Eisenstein). „Entwicklung von $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot}}}}$", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **28** (1844), 49–52. Воспроизведено в его *Mathematische Werke* **1**, 122–125. *230.*

363 Эйлер Л. (Leonhard Euler). Letter to Christian Goldbach (13 October 1729), в *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIIIème Siècle*, edited by P. H. Fuss, St. Petersburg, 1843, volume 1, 3–7. [См. также: Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729–1764, Berlin, Akademie-Verlag, 1965, 19–23.] *239, 686.*

364 Эйлер Л. (L. Eulero). „De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **5** (1730), 36–57. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 14, 1–24. *239.*

365 Эйлер Л. (Leonh. Eulero). „Methodus generalis summandi progressiones", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **6** (1732), 68–97. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 14, 42–72. *509.*

366 Эйлер Л. (Leonh. Eulero). „Observationes de theoremate quodam Fermatiano, aliisque ad numeros primos spectantibus", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **6** (1732), 103–107. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 2, 1–5. Воспроизведено в его *Commentationes arithmeticæ collectæ*, volume 1, 1–3. *156.*

367 Эйлер Л. (Leonh. Eulero). „De progressionibus harmonicis observationes", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **7** (1734), 150–161. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 14, 87–100. *308.*

368 Эйлер Л. (Leonh. Eulero). „Methodus universalis series summandi ulterius promota", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **8** (1736), 147–158. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 14, 124–137. *297.*

369 Эйлер Л. (Leonh. Euler). „De fractionibus continuis, Dissertatio", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **9** (1737), 98–137. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 14, 187–215. *146.*

370 Эйлер Л. (Leonh. Euler). „Variæ observationes circa series infinitas", *Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **9** (1737), 160–188. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 14, 216–244. *685.*

650. **371** Эйлер Л. (Leonhard Euler). Letter to Christian Goldbach (4 July 1744), в *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIIIème Siècle*, edited by P. H. Fuss, St. Petersburg, 1843, volume 1, 278–293.

687. **372** Эйлер Л. (Leonhardo Eulero). *Introductio in Analysin Infinitorum*. Tomus primus, Lausanne, 1748. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 8. Переведено на французский, 1786; немецкий, 1788; английский, 1988. [Имеются русские переводы: Эйлер Л. *Введение в анализ бесконечных*, том 1. — М.–Л.: ОНТИ, 1936; 2-е изд.: М.: Физматгиз, 1961.]

687. **373** Эйлер Л. (L. Eulero). „De partitione numerorum", *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **3** (1750), 125–169. Воспроизведено в его *Commentationes arithmeticæ collectæ*, volume 1, 73–101. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 2, 254–294.

68, 297, 650, 687. **374** Эйлер Л. (Leonhardo Eulero). *Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*. St. Petersburg, Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ, 1755. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 10. Переведено на немецкий, 1790. [Имеется русский перевод: Эйлер Л. *Дифференциальное исчисление*. — М.–Л.: Гостехиздат, 1949.]

158. **375** Эйлер Л. (L. Eulero). „Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata", *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **8** (1760), 74–104. (Было представлено также в Берлинскую академию наук в 1758.) Воспроизведено в его *Commentationes arithmeticæ collectæ*, volume 1, 274–286. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 2, 531–555.

335. **376** Эйлер Л. (L. Eulero). „Specimen algorithmi singularis", *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **9** (1762), 53–69. (Было представлено также в Берлинскую академию наук в 1757.) Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 15, 31–49.

619, 687. **377** Эйлер Л. (L. Eulero). „Observationes analyticæ", *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **11** (1765), 124–143. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 15, 50–69.

23, 687. **378** Эйлер Л. (Leonhard Euler). *Vollständige Anleitung zur Algebra. Erster Theil. Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen*. St. Petersburg, 1770. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 1. Переведено на голландский, 1773; французский, 1774; латинский, 1790; английский, 1797. [Имеются издания на русском языке: *Универсальная арифметика Леонарда Ейлера*, том 1. — С.-Петербург: 1768, 2-е изд., 1787; *Основания алгебры Леонарда Ейлера*, том 1. — С.-Петербург: 1912.]

379 Эйлер Л. (L. Eulero). „Observationes circa bina biquadrata quorum summam in duo alia biquadrata resolvere liceat", *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **17** (1772), 64–69. Воспроизведено в его *Commentationes arithmeticæ collectæ*, volume 1, 473–476. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 3, 211–217. *155.*

380 Эйлер Л. (L. Eulero). „Observationes circa novum et singulare progressionum genus", *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **20** (1775), 123–139. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 7, 246–261. *555.*

381 Эйлер Л. (L. Eulero). „De serie Lambertina, plurimisque eius insignibus proprietatibus", *Acta academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **3**,2 (1779), 29–51. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 6, 350–369. *230.*

382 Эйлер Л. (L. Eulero). „Specimen transformationis singularis serierum", *Nova acta academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ* **12** (1794), 58–70. Представлено в 1778 г.. Воспроизведено в его *Opera Omnia*, series 1, volume 16(B), 41–55. *235, 686.*

383 Элькис Н. (Noam D. Elkies). „On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$", *Mathematics of Computation* **51** (1988), 825–835. *155.*

384 Эндрюс Г. Э. (George E. Andrews). „Applications of basic hypergeometric functions", *SIAM Review* **16** (1974), 441–484. *244, 686.*

385 Эндрюс Г. Э. (George E. Andrews). „On sorting two ordered sets", *Discrete Mathematics* **11** (1975), 97–106. *573.*

386 Эндрюс Г. Э. (George E. Andrews). *The Theory of Partitions.* Addison-Wesley, 1976. [Имеется русский перевод: Эндрюс Г. *Теория разбиений.* — М.: Наука, 1982.] *364.*

387 Эндрюс Г. Э. (George E. Andrews). „Euler's 'exemplum memorabile inductionis fallacis' and q-trinomial coefficients", *Journal of the American Mathematical Society* **3** (1990), 653–669. *620.*

388 Эндрюс Г. Э., Утимура К. (George E. Andrews and K. Uchimura). „Identities in combinatorics IV: Differentiation and harmonic numbers", *Utilitas Mathematica* **28** (1985), 265–269. *687.*

389 Эрдёш П. (Erdős Pál). „Az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$ egyenlet egész számú megoldásairól", *Matematikai Lapok* **1** (1950), 192–209. Аннотацию на английском языке см. на с. 210. *685.*

390 Эрдёш П. (Paul Erdős). „My Scottish Book 'problems'", в *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*, edited by R. Daniel Mauldin, 1981, 35–45. *455.*

391 Эрдёш П., Грэхем Р. Л. (P. Erdős and R. L. Graham). *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory.* Université de Genève, L'Enseignement Mathématique, 1980. *556, 567, 686, 687.*

568, 592. **392** Эрдёш П., Грэхем Р. Л., Ружа И. З., Штраус Э. Г. (P. Erdős, R. L. Graham, I. Z. Ruzsa, and E. G. Straus). „On the prime factors of $\binom{2n}{n}$“, *Mathematics of Computation* **29** (1975), 83–92.

599. **393** Эрмит Ш. (Charles Hermite). Letter to C. W. Borchardt (8 September 1875), в *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **81** (1876), 93–95. Воспроизведено в его *Œuvres*, volume 3, 211–214.

686. **394** Эрмит Ш. (Charles Hermite). *Cours de M. Hermite.* Faculté des Sciences de Paris, 1882. Third edition, 1887; fourth edition, 1891. [Имеется русский перевод четвертого издания: Эрмит Ш. *Курс анализа.* — М.–Л.: ОНТИ, 1936.]

581, 686. **395** Эрмит Ш. (Charles Hermite). Letter to S. Pincherle (10 May 1900), в *Annali di Matematica pura ed applicata*, series 3, **5** (1901), 57–60. Воспроизведено в его *Œuvres*, volume 4, 529–531. [О переписке Эрмита см.: Ожигова Е. П. *Шарль Эрмит.* — Л.: Наука, 1982.]

687. **396** Эсваратасан А., Левайн Э. (Arulappah Eswarathasan and Eugene Levine). „p-integral harmonic sums“, *Discrete Mathematics* **91** (1991), 249–257.

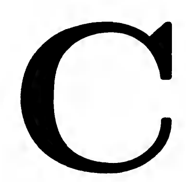
685. **397** Эткинсон М. Д. (M. D. Atkinson). „The cyclic towers of Hanoi“, *Information Processing Letters* **13** (1981), 118–119.

687. **398** Эткинсон М. Д. (M. D. Atkinson). „How to compute the series expansions of sec x and tan x“, *American Mathematical Monthly* **93** (1986), 387–389. [См. также: A. J. Kempner, „On the shape of polynomial curves“, *Tôhoku Math. J.* **37** (1933), 347–362; R. C. Entringer, „A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers“, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **14** (1966), 241–246.]

687. **399** Юнген Р. (R. Jungen). „Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence“, *Commentarii Mathematici Helvetici* **3** (1931), 266–306.

85. **400** Якоби К. Г. (C. G. J. Jacobi). *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum.* Königsberg, Bornträger, 1829. Воспроизведено в его *Gesammelte Werke*, volume 1, 49–239.

230. **401** Янсон С., Кнут Д. Э., Лучак Т., Питтел Б. (Svante Janson, Donald E. Knuth, Tomasz Łuczak, and Boris Pittel). „The birth of the giant component“, *Random Structures and Algorithms* **4** (1993), 233–358.



Первоисточники упражнений

УПРАЖНЕНИЯ для этой книги подбирались из многих источников. Авторы книги старались проследить происхождение всех задач — исключение составляют случаи, когда упражнение столь элементарно, что придумавший его, вероятно, и не помышлял что-либо придумать.

Многие упражнения заимствованы из станфордских экзаменационных задач по курсу конкретной математики. Зачастую новые задачи для этих экзаменов предлагались самими преподавателями и ассистентами — вот подходящий повод перечислить их имена.

Год	*Преподаватель*	*Ассистенты*
1970	Дон Кнут	Воган Пратт
1971	Дон Кнут	Лео Гюиба
1973	Дон Кнут	Хенсон Грейвс, Луи Жуайек
1974	Дон Кнут	Скот Драйсдейл, Том Портер
1975	Дон Кнут	Марк Браун, Луи Траб Пардо
1976	Энди Яо	Марк Браун, Лайл Рэмшоу
1977	Энди Яо	Йосси Сило
1978	Фрэнсис Яо	Йосси Сило
1979	Рон Грэхем	Фрэнк Лианг, Крис Тонг, Марк Хайман
1980	Энди Яо	Андрей Бродер, Джим Мак-Грат
1981	Рон Грэхем	Орен Паташник
1982	Эрнст Мэйр	Джоан Фейгенбаум, Дэйв Хелмболд
1983	Эрнст Мэйр	Анна Карлин
1984	Дон Кнут	Орен Паташник, Алекс Шаффер
1985	Андрей Бродер	Пан Чжень, Стефан Шаркански
1986	Дон Кнут	Ариф Мёчант, Стефан Шаркански

Практические занятия были очень ценными, я бы даже сказал — бесценными.

Оставьте на следующий год того же преподавателя и тех же ассистентов.

Практические пособия весьма удачны и полезны.

Практически я никогда не „получал“ чисел Стирлинга.

Помимо перечисленных специалистов, свой вклад в данный курс внесли Дэйвид Кларнер (1971), Боб Седгевик (1974), Лео Гюиба (1975) и Лайл Рэмшоу (1979), каждый из которых принял приглашение прочитать шесть и более лекций. Подробные записи лекций, которые каждый год составлялись ассистентами и редактировались преподавателями, послужили основой этой книги.

1.1 Пойа [242, с. 120].
1.2 Скорер, Гранди и Смит [275].
1.5 Венн [51].
1.6 Штейнер [356]; Робертс [261].
1.8 Гаусс [69].
1.9 Коши [165, замечание 2 к теореме 17].
1.10 Эткинсон [397].
1.11 Идея Вуда [58].
1.14 Штейнер [356]; Пойа [242, гл. 3]; Брат Альфред [33].
1.17 Дьюдени [112, головоломка 1].
1.21 Болл [29] приписывает авторство Б. А. Суидену.
1.22 Основано на идее Питера Шора.*
1.23 Бьорн Поонен.*
1.25 Фрейм, Стюарт и Данкель [320].
2.2 Айверсон [4, с. 11].
2.3 [139, упр. 1.2.3–2].
2.5 [139, упр. 1.2.3–25].
2.22 Бине [24, §4].
2.23 Выпускной экзамен 1982 г.
2.26 [139, упр. 1.2.3–26].
2.29 Коллоквиум 1979 г.
2.30 Коллоквиум 1973 г.
2.31 Стилтьес [285].
2.34 Риман [260, §3].
2.35 Эйлер [370] дал ошибочное „доказательство“, используя расходящиеся ряды.
2.36 Голомб [76]; Варди [47].
2.37 Лео Мозер.*
3.6 Эрнст Мэйр, домашнее задание 1982 г.
3.8 Дирихле [110].
3.9 Чейс [347]; Фибоначчи [312, с. 77–83].
3.12 [139, упр. 1.2.4–48(a)].
3.13 Битти [26]; Найвен [227, теорема 3.7].
3.19 [139, упр. 1.2.4–34].
3.21 Коллоквиум 1975 г.
3.23 [139, упр. 1.2.4–41].
3.28 Браун [36].
3.30 Ахо и Слоан [12].
3.31 Грейтцер [81, задача 1972/3, решение 2].
3.32 [89].
3.33 Коллоквиум 1984 г.
3.34 Коллоквиум 1970 г.
3.35 Коллоквиум 1975 г.
3.36 Коллоквиум 1976 г.
3.37 Коллоквиум 1986 г; [147].
3.38 Коллоквиум 1974 г.
3.39 Коллоквиум 1971 г.
3.40 Коллоквиум 1980 г.
3.41 Кламкин [133, задача 1978/3].
3.42 Успенский [308].
3.45 Ахо и Слоан [12].
3.46 Грэхем и Поллак [91].
3.48 Холанд и Кнут [340].
3.49 Р. Л. Грэхем и Д. Р. Хофштадтер.*
3.52 Френкель [322].
3.53 Ш. К. Стейн.*
4.4 [146, §526].
4.16 Силвестер [273].
4.19 [144, с. 148–149].
4.20 Бертран [23, с. 129]; Чебышёв [344]; Райт [252].
4.22 Бриларт [40]; Уильямс и Дюбнер [302].
4.23 Крау [169].
4.24 Лежандр [186, второе издание, введение].
4.26 [140, упр. 4.5.3–43].
4.31 Паскаль [232].
4.36 Харди и Райт [335, §14.5].
4.37 Ахо и Слоан [12].
4.38 Люка [206].
4.39 [88].
4.40 Штикельбергер [358].
4.41 Лежандр [186, §135]; Харди и Райт [335, теорема 82].
4.42 [140, упр. 4.5.1–6].
4.44 [140, упр. 4.5.3–39].
4.45 [140, упр. 4.3.2–13].
4.47 Лемер [189].
4.48 Гаусс [67, §78]; Крелль [168].
4.52 Коллоквиум 1974 г.
4.53 Коллоквиум 1973 г., идея Рао [254].
4.54 Коллоквиум 1974 г.
4.56 Логан [200], ф-ла (6.15)].
4.57 Частный случай представлен в [148].
4.58 Серпински [270].
4.59 Кёртис [130]; Эрдёш [389].
4.60 Милс [222].
4.61 [139, упр. 1.3.2–19].

4.63 Барлоу [13]; Абель [1].
4.64 Пирс [237].
4.66 Рибенбойм [259]; Серпински [271, задача P^2_{10}].
4.67 [86].
4.69 Крамер [166].
4.70 П. Эрдёш.*
4.71 [391, с. 96].
4.72 [391, с. 103].
4.73 Ландау [181, том 2, ф-ла 648].
5.1 Форкадель [316].
5.3 Лонг и Хоггат [204].
5.5 Курсовой выпускной экзамен 1983 г.
5.13 Коллоквиум 1975 г.
5.14 [139, упр. 1.2.6–20].
5.15 Диксон [108].
5.21 Эйлер [363].
5.25 Гаусс [68, §7].
5.28 Эйлер [382].
5.29 Куммер [170, ф-ла 26.4].
5.31 Госпер [79].
5.34 Бейли [17, §10.4].
5.36 Куммер [171, с. 116].
5.37 Вандермонд [45].
5.38 [139, упр. 1.2.6–16].
5.40 Рёдсет [258].
5.43 Пфафф [249]; [139, упр. 1.2.6–31].
5.48 Раньян Рой.*
5.49 Рой [262, ф-ла 3.13].
5.53 Гаусс [68]; Ричард Аски.*
5.58 Фрейзер и Мак-Келлар [319].
5.59 Станфордский общеобразовательный экзамен по информатике (зимний семестр 1987 г.).
5.60 [139, упр. 1.2.6–41].
5.61 Люка [207].
5.62 Коллоквиум 1971 г.
5.63 Коллоквиум 1974 г.
5.64 Коллоквиум 1980 г.
5.65 Коллоквиум 1983 г.
5.66 Коллоквиум 1984 г.
5.67 Коллоквиум 1976 г.
5.68 Коллоквиум 1985 г.
5.69 Лайл Рэмшоу, лекция по приглашению, 1986.
5.70 Эндрюс [384, теорема 5.4].
5.71 Вильф [53, упр. 4.16].
5.72 Эрмит [394].
5.74 Коллоквиум 1979 г.
5.75 Коллоквиум 1971 г.
5.76 [139, упр. 1.2.6–59 (исправленное)].
5.77 Коллоквиум 1986 г.
5.78 [142].
5.79 Мендельсон [217]; Монтгомери [225].
5.81 Выпускной экзамен 1986 г.; [151].
5.82 Хиллман и Хоггат [338].
5.85 Су [289].
5.86 Гуд [93].
5.88 Эрмит [395].
5.91 Уиппл [303].
5.92 Клаузен [134], [135].
5.93 Госпер [79].
5.95 Петковшек [236, следствие 3.1].
5.96 Петковшек [236, следствие 5.1].
5.98 Ира Гессель.*
5.102 Г. С. Вильф.*
5.104 Фолкер Штрел.*
5.105 Хенричи [337, р. 118].
5.108 Апери [8].
5.109 Гессель [71].
5.110 Р. У. Госпер, мл.*
5.111 [391, с. 71].
5.112 [391, с. 71].
5.113 Вильф и Зильбергер [54].
5.114 Штрел [359] указывает в качестве автора А. Шмидта.
6.6 Фибоначчи [312, с. 283].
6.15 [141, упр. 5.1.3–2].
6.21 Тейзингер [292].
6.25 Гарднер [63] приписывает авторство Денису Уилкину.
6.27 Люка [206].
6.28 Люка [208, гл. 18].
6.31 Лах [185]; Л. У. Флойд.*
6.35 Коллоквиум 1977 г.
6.37 Шаллит [349].
6.39 [139, упр. 1.2.7–15].
6.40 Кламкин [133, задача 1979/1].
6.41 Коллоквиум 1973 г.
6.43 Брук и Уолл [42].
6.44 Матиясевич [214].
6.46 Франческа [317]; Уоллис [305, гл. 4].
6.47 Люка [206].
6.48 [140, упр. 4.5.3–9(с)].
6.49 Дейвисон [103].
6.50 Коллоквиум 1985 г.; Рам [253]; Дейкстра [104, с. 230–232].

6.51 Уоринг [306]; Лагранж [176]; Вольштенхольм [56].
6.52 Эсваратасан и Левайн [396].
6.53 Кауцки [128] излагает частный случай.
6.54 Штаудт [355]; Клаузен [136]; Радо [251].
6.55 Эндрюс и Утимура [388].
6.56 Коллоквиум 1986 г.
6.57 Задача коллоквиума 1984 г., предложенная Р. Флойдом.*
6.58 [139, упр. 1.2.8–30]; коллоквиум 1982 г.
6.59 Барр [14].
6.61 Выпускной экзамен 1976 г.
6.62 Д. Боруэн и П. Боруэн [32, §3.7].
6.63 [139, разд. 1.2.10]; Стенли [282, предложение 1.3.12].
6.65 Танни [291].
6.66 [141, упр. 5.1.3–3].
6.67 Чжун и Грэхем [348].
6.68 Логан [201].
6.69 [141, упр. 6.1–13].
6.72 Эйлер [374, часть 2, гл. 8].
6.73 Эйлер [372, гл. 9 и 10]; Шрётер [354].
6.75 Эткинсон [398].
6.76 [141, ответ 5.1.3–3]; Ленжиель [193].
6.78 Логан [201].
6.79 *Boston Herald*, от 21 августа 1904 г., раздел юмора
6.80 Зилверман и Дан [118].
6.82 [149].
6.83 [85], по модулю ошибки вычисления.
6.85 Барр [14].
6.86 [158].
6.87 [140, упр. 4.5.3–2 и 3].
6.88 Адамс и Дейвисон [3].
6.90 Лемер [190].
6.92 Часть (а) из работы Эсваратасана и Левайна [396].
7.2 [139, упр. 1.2.9–1].
7.8 Зейв [117].
7.9 [139, упр. 1.2.7–22].
7.11 Выпускной экзамен 1971 г.
7.12 [141].
7.13 Рэни [265].
7.15 Белл [20].
7.16 Пойа [241]; [139, упр. 2.3.4.4–1].
7.19 [153].
7.20 Юнген [399, с. 299] указывает в качестве автора А. Гурвица.
7.22 Пойа [243].
7.23 Домашние задания 1983 г.
7.24 Майерс [210]; Седлачек [268].
7.25 [140, доказательство Карлитца леммы 3.3.3B].
7.26 [139, упр. 1.2.8–12].
7.32 [391, с. 25–26] указывает в качестве авторов Л. Мирского и М. Ньюмена.
7.33 Выпускной экзамен 1971 г.
7.34 Томас Фидер.*
7.36 Выпускной экзамен 1974 г.
7.37 Эйлер [373, абзац 50]; выпускной экзамен 1971 г.
7.38 Карлитц [125].
7.39 [139, упр. 1.2.9–18].
7.41 Андре [7]; [141, упр. 5.1.4–22].
7.42 Выпускной экзамен 1974 г.
7.44 Гросс [83]; [141, упр. 5.3.1–3].
7.45 де Брейн [98].
7.47 Во и Максфилд [55].
7.48 Выпускной экзамен 1984 г.
7.49 Уотерхауз [307].
7.50 Шрёдер [353]; [139, упр. 2.3.4.4–31].
7.51 Фишер [314]; Перкус [235, с. 89–123]; Стенли [281].
7.52 Хаммерсли [331].
7.53 Эйлер [378, часть 2, раздел 2, гл. 6, §91].
7.54 Меснер [221].
7.55 Стенли [280].
7.56 Эйлер [377].
7.57 В [391, с. 48] имеется ссылка на П. Эрдёша и П. Турана.
8.13 Томас М. Ковер.*
8.15 [139, упр. 1.2.10–17].
8.17 Пэтил [250].
8.24 Джон Кнут (в возрасте 4-х лет) и Д. Э. К.; выпускной экзамен 1975 г.
8.26 [139, упр. 1.3.3–18].
8.27 Фишер [315].
8.29 Гуиба и Одлыжко [94].
8.32 Выпускной экзамен 1977 г.
8.34 Харди [334] ошибся в анализе этой ситуации и пришел к противоположным выводам.

8.35 Выпускной экзамен 1981 г.
8.36 Гарднер [64] указывает в качестве автора Джорджа Сичермана.
8.38 [140, упр. 3.3.2–10].
8.39 [143, упр. 4.3(a)].
8.41 Феллер [310, упр. IX.33].
8.43 [139, разд. 1.2.10 и 1.3.3].
8.44 Выпускной экзамен 1984 г.
8.45 Выпускной экзамен 1985 г.
8.46 Феллер [310] указывает в качестве автора Гуго Штейнгауза.
8.47 Выпускной экзамен 1974 г.; задача возникла при анализе 2–3-деревьев.
8.48 Выпускной экзамен 1979 г.
8.49 Блом [27]; выпускной экзамен 1984 г.
8.50 Выпускной экзамен 1986 г.
8.51 Выпускной экзамен 1986 г.
8.53 Феллер [310] указывает в качестве автора С. Н. Бернштейна.
8.57 Лайл Рэмшоу.*
8.58 Гюиба и Одлыжко [94].
9.1 Харди [333, 1.3(g)].
9.2 Часть (c) взята из Гарфункель [65].
9.3 [139, упр. 1.2.11.1–6].
9.6 [139, упр. 1.2.11.1–3].
9.8 Харди [333, 1.2(iv)].
9.9 Ландау [180, том 1, с. 60].
9.14 [139, упр. 1.2.11.3–6].
9.16 Кнопп [137, издание $\geqslant 2$, §64C].
9.18 Бендер [21, §3.1].
9.20 Выпускной экзамен 1971 г.
9.24 [82, §4.1.6].
9.27 Титчмарш [294].
9.28 Глейшер [75].
9.29 де Брейн [97, §3.7].
9.32 Выпускной экзамен 1976 г.
9.34 Выпускной экзамен 1973 г.
9.35 Выпускной экзамен 1975 г.
9.36 Семинары 1980 г.
9.37 [140, ф-ла 4.5.3–21].
9.38 Выпускной экзамен 1977 г.
9.39 Выпускной экзамен 1975 г., идея Рейча [256].
9.40 Выпускной экзамен 1977 г.
9.41 Выпускной экзамен 1980 г.
9.42 Выпускной экзамен 1979 г.
9.44 Трикоми и Эрдейи [295].
9.46 де Брейн [97, §6.3].
9.47 Домашнее задание 1980 г.; [141, ф-ла 5.3.1–34].
9.48 Выпускной экзамен 1980 г.
9.49 Выпускной экзамен 1974 г.
9.50 Выпускной экзамен 1984 г.
9.51 [82, §4.2.1].
9.52 Пуанкаре [247]; Борель [31, с. 27].
9.53 Пойа и Сегё [244, часть 1, задача 140].
9.57 Эндрю М. Одлыжко.*
9.58 Хенричи [336, упр. 4.9.8].
9.60 [157].
9.62 Кенфилд [173].
9.63 Варди [47].
9.65 Комте [161, гл. 5, упр. 24].
9.66 М. П. Шюценберже.*
9.67 Либ [195]; Стенли [282, упр. 4.37(c)].
9.68 Боас и Ренч [28].

* Неопубликованное личное сообщение.

Указатели

(Здесь должны быть ссылки и на граффити.)

В СЛУЧАЕ, КОГДА УКАЗАТЕЛЬ отсылает к странице, содержащей соответствующее упражнение, из ответа к этому упражнению (в приложении А) можно извлечь дополнительную информацию; при этом номера страниц с ответами не указываются, если только указатель не отсылает к понятию, которое не фигурирует в формулировке соответствующего упражнения. Некоторые не представленные здесь обозначения (типа $x^{\underline{n}}$, $\lfloor x \rfloor$ и $\left\langle {n \atop m} \right\rangle$) перечислены на сс. 15 и 16 в разделе „Значения обозначений". [В именной указатель вошли также и ссылки на авторов добавленной при переводе литературы.]

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ТАБЛИЦ

Оригинал-макет американского издания подготовлен в Станфордском университете при помощи издательской системы TEX для научно-технических текстов, разработанной Д. Э. Кнутом. Для набора математических формул использовано новое семейство шрифтов AMS Euler Германа Цапфа, которое он создал по заказу Американского математического общества. Текст набран шрифтами Concrete прямого и курсивного начертания — новая версия семейства Computer Modern Дональда Кнута, гармонирующая с математическими шрифтами AMS Euler. [При подготовке оригинал-макета русского перевода был использован исходный TEXовский файл, любезно предоставленный проф. Кнутом. Кириллический аналог шрифтов Concrete CM-LH, которым набран текст русского издания, изготовили О. Г. Лапко и А. В. Ходулёв. — *Ред.*]

Учебное издание

Роналд Грэхем, Дональд Кнут, Орен Паташник

Конкретная математика

Основание информатики

Заведующий редакцией академик В. И. Арнольд
Зам. зав. редакцией А. С. Попов
Ведущий редактор И. А. Маховая
Художественный редактор Н. В. Дубова
Технический редактор О. Г. Лапко
Корректор Е. Д. Веломытцева

Оригинал-макет подготовлен О. Г. Лапко в пакете Plain-TeX
с использованием шрифтов AMS Euler и Concrete CM
с кириллическим расширением LH

Лицензия ЛР № 010174 от 20.05.97 г.

Подписано к печати 15.10.98. Формат 70×100/16.
Гарнитура Concrete CM-LH. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем 22,00 бум. л. Усл. печ. л. 57,20. Уч.-изд. л. 49,03.
Изд. № 1/1017. Тираж 12 000 экз. (второй завод 5001–12000 экз.)
Заказ 832. С016

Издательство „Мир“
Государственного комитета Российской Федерации по печати
129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Диапозитивы изготовлены в издательстве „Мир“

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ОАО „Можайский полиграфический комбинат“
143200, Можайск, ул. Мира, 93.